Aufgabensammlung

Zufallsstreubereich

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Zufallsstreubereich

Rookie Level

Belastung_von_Bauteilen (B_069)

a) Das Unternehmen behauptet, dass der Erwartungswert der Belastung, der die Bauteile standhalten, μ = 120 Newton (N) beträgt.

Eine Stichprobe ergab folgende Werte:

118,5 N	122 N	120,5 N	117 N	118,5 N	121 N	121,5 N	119,5 N

– Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s dieser Stichprobe.
– Überprüfen Sie mithilfe eines 95-%-Vertrauensbereichs für μ, ob die Behauptung des Unternehmens durch diese Stichprobe untermauert werden kann.

Benutzerfreundlichkeit von Websites * (B_422)

b) Die Anzahl der täglichen Zugriffe auf eine bestimmte Website kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 10 Werten wurde erhoben:

9730	9932	8960	10488	9842	10340	10234	9549	9751	10190

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Zufallsstichprobe.
– Bestimmen Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung.

CO2-Gehalt der Luft * (B_398)

b) In Schulklassen ist der CO_2-Gehalt an Wintertagen nach 2 Unterrichtsstunden annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe in 7 zufällig ausgewählten Klassen ergibt folgende Werte:

CO_2-Gehalt in ppm	2500	2780	3500	4000	2800	2740	3850

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstandardabweichung dieser Messwerte.
– Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ.

Schadstoffausbreitung (2) * (B_048)

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung σ = 8,5 mg/m³ beträgt.

Schallschutzwaende_1 (B_029)

b) Die Längen X von Lärmschutzwänden eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ = 3,5 mm. Bei einer Stichprobe von 20 Stück wird eine mittlere Länge von $\bar{x}$ = 3998,9 mm festgestellt.

– Ermitteln Sie das 98-%-Konfidenzintervall für μ.

Der Hersteller gibt eine Länge von μ = 4000 mm an.

– Beurteilen Sie die Angabe des Herstellers aufgrund dieses Konfidenzintervalls.

Solarzelle (B_262)

c) Der Energieertrag von Photovoltaikanlagen eines bestimmten Typs ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 6$ Kilowattstunden (kWh).

Für 10 zufällig ausgewählte Anlagen dieses Typs wurden folgende Energieerträge in kWh gemessen:

195	198	210	204	196	202	210	199	192	201

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ des Energieertrags.
– Beschreiben Sie, wie sich die Breite des Konfidenzintervalls ändert, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α kleiner wird.

Viskositaeten_von_Fluessigkeiten (B_112)

c) Die Viskosität eines bestimmten Rapsöls ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 160$ Millipascal · Sekunde (mPa · s) mit einer Standardabweichung $\sigma = 3$ mPa · s. Aus verfahrenstechnischen Gründen wurde bei der Pressung die Temperatur verändert. Anschließend wurden 6 Proben gezogen und deren Viskositäten gemessen.

Viskosität in mPa · s	162	156	155	157	160	162

– Überprüfen Sie mithilfe eines symmetrischen 95-%-Vertrauensbereichs, ob man von einer Veränderung des Erwartungswerts ausgehen sollte.
– Begründen Sie, warum sich die Breite des Vertrauensbereichs verringert, wenn bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit die Stichprobenanzahl erhöht wird.

Roboter (2) * (B_345)

d) Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt.
Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit $\mu = 300$ mm und $\sigma = 5$ mm sind.
Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

Widerstaende (2) * (B_396)

a) Bei der Produktion von elektrischen Widerständen können die Widerstandswerte als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100{,}0\ \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}2\ \Omega$ angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 20 Widerständen wird untersucht.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert der Widerstandswerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Wirkstoffkonzentration (B_369)

d) Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist eine bestimmte Konzentration eines Wirkstoffs im Blut notwendig. Im Rahmen einer Versuchsreihe wurden folgende Zeiten von der Verabreichung bis zum Erreichen dieser Konzentration bei verschiedenen Personen gemessen (Zeit in Minuten):

60 48 50 65 69 53 64 57 67 56

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der vorliegenden Daten.
– Ermitteln Sie den Vertrauensbereich für μ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1$ %, wenn davon ausgegangen wird, dass die Zeiten normalverteilt sind.

Flughafen * (B_506)

b) Der Kerosinverbrauch eines bestimmten Flugzeugs auf einer bestimmten Strecke kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Der Erwartungswert beträgt μ = 845 L/100 km und die Standardabweichung beträgt σ = 25 L/100 km.

1) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem der Kerosinverbrauch mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Nach Reparaturarbeiten soll der Erwartungswert des Kerosinverbrauchs mithilfe eines Konfidenzintervalls neu geschätzt werden. Dabei wird angenommen, dass die Standardabweichung gleich geblieben ist.

Nach den Reparaturarbeiten wurde der Kerosinverbrauch in L/100 km von einer Zufallsstichprobe von 10 Flügen auf dieser Strecke gemessen:

844	840	864	820	788	858	832	817	839	796

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 99-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Kerosinverbrauchs nach den Reparaturarbeiten.

Schwimmbad (2) * (B_602)

c) Die Aufenthaltsdauer der Gäste im Saunabereich eines Thermalbads kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist die zugehörige Verteilungsfunktion F dargestellt.

1) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion f ein.

Abbildung 1:

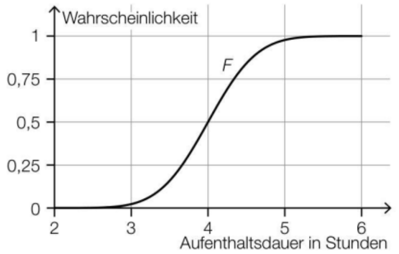
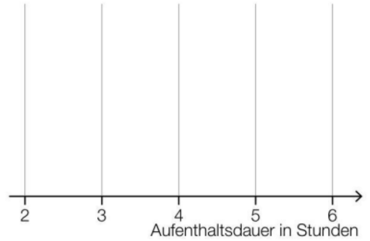


Abbildung 2:



Die Aufenthaltsdauer der Gäste in einem Erlebnisbad ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 5,8 h und der Standardabweichung σ = 1,2 h.
Für eine Stichprobe von 9 Gästen wird der Stichprobenmittelwert der Aufenthaltsdauer untersucht.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Stichprobenmittelwert im Zeitintervall [5; 6] liegt.

Pro Level

Laenge eines Werkstuecks * (B_309)

a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm und $\sigma = 0{,}5$ mm.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

– Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ an.
– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstreubereichs halbiert.
– Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 7$ größer ist als jenes für $n = 5$.

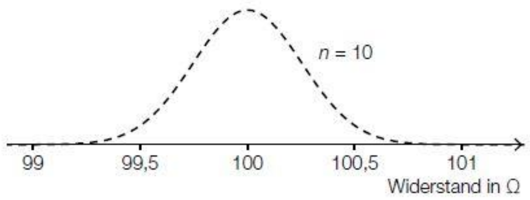
Widerstandstemperatursensoren * (B_430)

b) Ein Unternehmen produziert Widerstandstemperatursensoren. Der Widerstand dieser Sensoren bei 0 °C ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 100\ \Omega$ und $\sigma = 0{,}8\ \Omega$.

Eine Zufallsstichprobe von 10 Sensoren wird der Produktion entnommen, und es wird jeweils der Widerstand bei 0 °C gemessen.

– Geben Sie die geschätzten Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte an.
– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert μ symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 98 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Zufallsstichprobe von $n = 10$ Sensoren strichliert dargestellt.



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion für einen Stichprobenumfang $n > 10$.

LED-Lampen (5) * (B_346)

b) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit $\sigma = 75$ Lumen angenommen werden.
Für 8 zufällig ausgewählte Lampen wurde jeweils der Lichtstrom (in Lumen) gemessen.

1053	900	984	873	838	1045	960	955

– Ermitteln Sie den 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ.
– Zeigen Sie anhand der entsprechenden Formel, warum für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem σ gilt: Wird der Stichprobenumfang vervierfacht, so halbiert sich die Breite des $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs für den Erwartungswert μ.

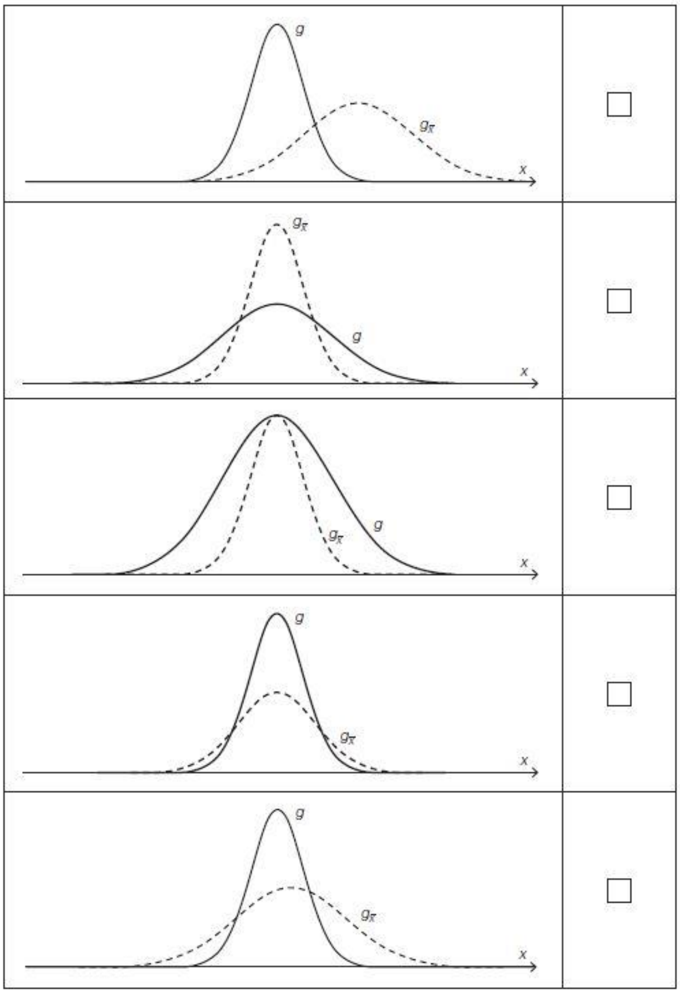
Verbinder (B_274)

c) Die Breiten der Verbinder eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5{,}5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ mm. Einer umfangreichen Lieferung solcher Verbinder werden Zufallsstichproben vom Umfang $n = 20$ entnommen und es werden die Stichprobenwerte ermittelt.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

d) Nachstehend sind der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Grundgesamtheit und der Graph der Dichtefunktion $g_{\bar{x}}$ der zugehörigen Verteilung der Stichprobenmittelwerte von Stichproben mit $n = 20$ dargestellt.

– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, in der die beiden Funktionsgraphen zueinander passend dargestellt sind. *[1 aus 5]*



Durchmesser einer Stahlwelle * (B_019)

c) Bei Maschine C sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10{,}00$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03$ mm.

Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang n untersucht.

– Berechnen Sie für $n = 30$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite des 99-%-Zufallsstreubereichs halbiert.

Linienbus (B_070)

d) In den Bussen einer bestimmten Linie soll die Auslastung überprüft werden.
Die Anzahl der Passagiere pro Bus ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 44$ Personen und der Standardabweichung $\sigma = 12$ Personen.
In 25 Bussen wird eine Überprüfung der Passagieranzahl durchgeführt.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

– Argumentieren Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, wenn sich die Breite des 95-%-Zufallsstreubereichs halbieren soll.

Gastwirtschaft* (B_443)

a) Automatische Abfüllanlagen für Getränke sollen möglichst gleichmäßige Füllmengen gewährleisten.
Die Füllmenge bei einer bestimmten Abfüllanlage ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ ml und der Standardabweichung $\sigma = 4{,}5$ ml.

Die Füllmenge wird mithilfe einer Stichprobe des Umfangs n überprüft.

1) Berechnen Sie für $n = 10$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

2) Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 5$ kleiner als jenes für $n = 10$ ist.

Plexiglasprismen (B_358)

b) Einer Produktion wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 7$ entnommen und es wurden die Massen der Prismen bestimmt. Für die Massen kann eine Normalverteilung angenommen werden.

Prisma	1	2	3	4	5	6	7
Masse in Gramm (g)	285,2	283,7	285,2	281,4	282,6	282,3	283,3

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Massen der Prismen.

– Beschreiben Sie die Auswirkungen auf das Konfidenzintervall, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α größer wird.

– Erklären Sie, welche Maßnahme zu ergreifen ist, um bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit ein schmäleres Konfidenzintervall zu erhalten.

Koerpermasse (2) * (B_534)

a) In einer Schule werden die Oberarmlängen von Mädchen und Burschen einer bestimmten Altersgruppe erhoben.

Die Daten einer Stichprobe von 6 Mädchen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Oberarmlänge in cm	35,8	36,9	37,6	37,8	36,0	37,0

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} für die Oberarmlänge der Mädchen dieser Stichprobe. *[0/1 P.]*

Die Oberarmlänge von Burschen dieser Altersgruppe kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Aus einer Stichprobe von 9 Burschen werden für die Oberarmlänge der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 34{,}7$ cm und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 0{,}4$ cm ermittelt.

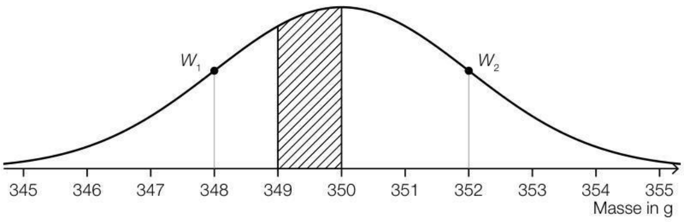
2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der Oberarmlänge von Burschen dieser Altersgruppe. *[0/1 P.]*

Fischzucht * (B_566)

a) Forellen sind als Speisefische sehr beliebt.

Die Masse einer Forelle, wie sie in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

Im Rahmen der regelmäßigen Qualitätskontrollen werden Stichproben vom Umfang $n = 9$ entnommen.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte.



W_1, W_2 ... Wendepunkte der Dichtefunktion

1) Ermitteln Sie die durch die schraffierte Fläche dargestellte Wahrscheinlichkeit.

Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit unterscheidet sich von der Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte.

2) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit.

b) Auch Saiblinge sind als Speisefische sehr beliebt.

Die Masse eines Saiblings, wie er in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ wurden der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 299$ g und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 6{,}3$ g ermittelt.

1) Ermitteln Sie den zweiseitigen 90-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung.

Federung von Mountainbikes * (B_576)

b) Eine wichtige Kenngröße einer Feder ist die sogenannte *Federkonstante*.

Bei der Herstellung einer bestimmten Feder wird angenommen, dass die Federkonstante annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 80$ Newton pro cm (N/cm), die Standardabweichung beträgt $\sigma = 3$ N/cm.

In der Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang $n = 8$ untersucht.

1) Berechnen Sie denjenigen zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

Eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ ergab die folgenden Messwerte (in N/cm):

69,77 82,12 80,67 78,72 75,28 75,51 75,66 79,13

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob das arithmetische Mittel dieser Stichprobe im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten ist.

Reiseverhalten * (B_589)

c) Die Anzahl der Busreisenden bei einer bestimmten Reise kann als normalverteilt mit der Standardabweichung σ angenommen werden. Mithilfe einer Zufallsstichprobe vom Umfang n mit dem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ wurde der nachstehende zweiseitige Vertrauensbereich für den Erwartungswert dieser Normalverteilung ermittelt.

$$\bar{x} \pm 2{,}5 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [40; 50]$$

1) Ordnen Sie den beiden Größen jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu.

σ	
n	

A	16
B	4
C	6
D	9

Smartphones und Mobilfunk * (B_592)

b) Absorbiert ein Körper elektromagnetische Strahlung, so führt dies durch Energieaufnahme zur Erwärmung des Körpers.

Dabei ist der SAR-Wert (spezifische Absorptionsrate) in Watt pro Kilogramm (W/kg) eine wichtige Kenngröße.

Der SAR-Wert eines bestimmten Smartphone-Modells kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Stichprobe ergab die folgenden Messwerte:

SAR-Wert in W/kg	0,970	0,971	0,968	0,970	0,965	0,973	0,971	0,966

1) Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Messwerte.

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der SAR-Werte.

All Star Level

Tunnelvortrieb * (B_521)

c) Beim Ausbau des Tunnels werden vorgefertigte Betonelemente eingesetzt. Die Breite dieser Betonelemente ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5$ m und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}005$ m.

Zur Qualitätssicherung werden Zufallsstichproben mit dem Stichprobenumfang $n = 10$ entnommen und die Stichprobenmittelwerte der Breiten ermittelt.

1) Geben Sie den Erwartungswert $\mu_{\bar{x}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ für die Verteilung dieser Stichprobenmittelwerte an.

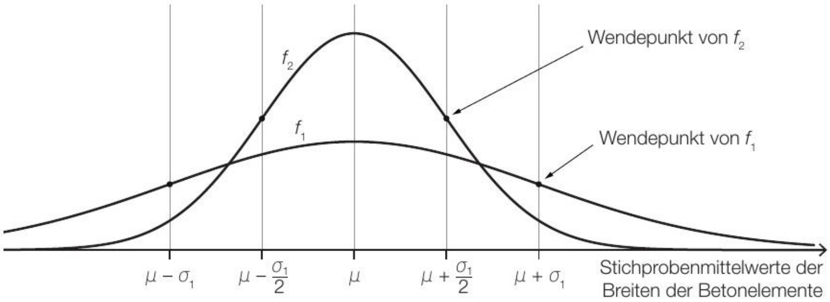
$\mu_{\bar{x}} =$ ______________________ m

$\sigma_{\bar{x}} =$ ______________________ m

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobenmittelwerte zwischen 4,996 m und 5,004 m liegen.

f_1 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang $n_1 = 6$.
f_2 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang n_2.

3) Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Abbildung den Stichprobenumfang n_2.

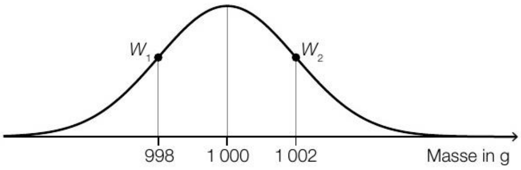


Werkzeuge * (B_531)

c) Stahlnägel werden in Packungen abgefüllt.

Die Masse der Packungen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 1 000 g und der Standardabweichung σ = 6 g.

Im Zuge einer Qualitätskontrolle werden Stichproben zu jeweils n Packungen entnommen. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte dargestellt.



W_1, W_2 ... Wendepunkte der Dichtefunktion

1) Geben Sie die Anzahl n der Packungen an, aus denen diese Stichproben jeweils bestehen.

n = __________ Packungen *[0/1 P.]*

Bei einer anderen Sorte von Stahlnägeln ist die Masse der Packungen ebenfalls annähernd normalverteilt. Bei einer Stichprobe von 8 zufällig ausgewählten Packungen wurden die nachstehenden Werte (in g) gemessen.

500,8	499,4	500,2	501,6	502,5	500,5	499,8	501,4

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der Masse der Packungen dieser Sorte von Stahlnägeln. *[0/1 P.]*

Lösungen

Rookie Level

Belastung von Bauteilen (B_069) Lösung

a) Stichprobe: $n = 8$; $\bar{x} = 119{,}8125$ N; $s = 1{,}73076...$ N

Anzahl der Freiheitsgrade: $n - 1 = 7$

$1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$;

$$\bar{x} - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$119{,}8125 - 2{,}365 \cdot \frac{1{,}73...}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 119{,}8125 + 2{,}365 \cdot \frac{1{,}73...}{\sqrt{8}}$$

$$118{,}36 \text{ N} \leq \mu \leq 121{,}26 \text{ N}$$

Der Erwartungswert μ liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit im Intervall [118,4 N; 121,3 N].

Die Behauptung des Unternehmens, dass $\mu = 120$ N ist, wird daher durch diese Stichprobe untermauert.

Benutzerfreundlichkeit von Websites * (B_422) Lösung

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 9\,901{,}6$

Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 446{,}87...$

$$\mu_u = \bar{x} - t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9901{,}6 - 2{,}262... \cdot \frac{446{,}87...}{\sqrt{10}} = 9581{,}9...$$

$$\mu_o = \bar{x} + t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9901{,}6 + 2{,}262... \cdot \frac{446{,}87...}{\sqrt{10}} = 10221{,}2...$$

95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert: [9582; 10221]

CO2-Gehalt der Luft * (B_398) Lösung

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 3\,167{,}14...$ ppm

$s = 603{,}17...$ ppm

Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$n = 7 \Rightarrow f = 6$

$t_{6;0{,}975} = 2{,}44691...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in ppm: $2\,609{,}29... \leq \mu \leq 3\,724{,}98...$

Schadstoffausbreitung * (B_048) Lösung

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 158{,}5$ mg/m³

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$n = 10$

$\alpha = 5$ %

$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m³: $153{,}2 \leq \mu \leq 163{,}8$.

Schallschutzwaende (B_029) Lösung

b) $\bar{x} = 3\,998{,}9$ mm
$\sigma = 3{,}5$ mm

$1 - \alpha = 0{,}98$; $\alpha = 0{,}02$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$

$\mu_{\text{un}}^{\text{ob}} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_{\text{un}}^{\text{ob}} = 3\,998{,}9 \pm 2{,}326\ldots \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{20}}$

$\mu_{\text{un}} = 3\,997{,}07\ldots \approx 3\,997{,}0$ mm

$\mu_{\text{ob}} = 4\,000{,}72\ldots \approx 4\,000{,}8$ mm

Konfidenzintervall für μ: $3\,997{,}0 \text{ mm} \leq \mu \leq 4\,000{,}8$ mm

Aufgrund der vorliegenden Stichprobe liegt der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % im Bereich von 3 997,0 mm bis 4 000,8 mm.
Auf Basis einer Irrtumswahrscheinlicheit von 2 % kann die Angabe des Herstellers als richtig angesehen werden.

Solarzelle (B_262) Lösung

c) $\bar{x} = 200{,}7$ kWh

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$1\,000 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}$

$z_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall μ in kWh:
[196,98; 204,42] (Intervallgrenzen gerundet)

Wird die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner, so wird das Konfidenzintervall breiter.

Viskositaeten von Fluessigkeiten (B_112) Lösung

c) $\bar{x} = 158{,}66\ldots$ mPa · s, $s = 3{,}07\ldots$ mPa · s
Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm t_{5;0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{6}}$

$t_{5;0{,}975} = 2{,}5705\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in mPa · s:
[155,437…; 161,895…] ≈ [155,44; 161,90]

Der Stichprobenmittelwert liegt innerhalb des Vertrauensbereichs. Man kann daher nicht von einer Veränderung des Erwartungswerts ausgehen.

Breite eines Vertrauensbereichs: $2 \cdot t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Die Stichprobenanzahl geht bei der Berechnung der Breite des Vertrauensbereichs einerseits in den Term $\frac{s}{\sqrt{n}}$ und andererseits bei der Berechnung des t-Quantils ein ($f = n - 1$).
Durch beide Einflüsse führt eine Erhöhung der Stichprobenanzahl zu einem schmäleren Vertrauensbereich.

Roboter (2) * (B_345) Lösung

d) Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$300 \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$

$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [297,81; 302,19].

Widerstaende * (B_396) Lösung

a) Zweiseitigen 90-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$100 \pm u_{0,95} \cdot \frac{3,2}{\sqrt{20}}$
$u_{0,95} = 1,644\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in Ω: [98,8; 101,2] (*gerundet*).

Wirkstoffkonzentration (B_369) Lösung

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 58,9$ min
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 7,279...$ min

Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:
$58,9 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{7,279...}{\sqrt{10}}$

$n = 10 \quad \Rightarrow \quad f = 9$
$t_{9;0,995} = 3,249...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in min:
[51,42; 66,38] (Intervallgrenzen gerundet)

Flughafen * (B_506) Lösung

b1) X ... Kerosinverbrauch in L/100 km

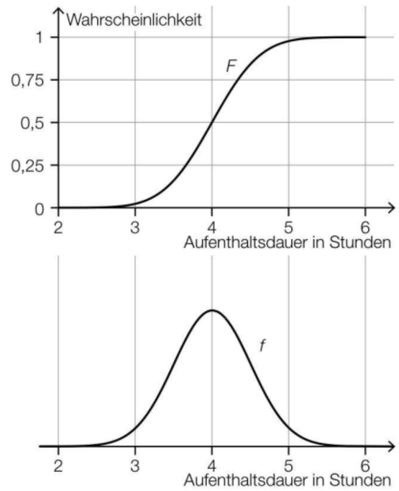
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0,90 \quad \Rightarrow \quad [803,8...; 886,1...]$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 829,8$

Berechnung des 99-%-Konfidenzintervalls $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der Normalverteilung:
$\mu_u = 829,8 - 2,576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 809,4...$
$\mu_o = 829,8 + 2,576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 850,1...$
Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in L/100 km: [809,4...; 850,1...]

Lösung: Schwimmbad (2) * (B_602)

c1)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass das Maximum an der Stelle 4 liegt und die Kurve die Form einer Gauß'schen Glockenkurve hat.

c2) $\bar{X}$ ... Aufenthaltsdauer in Stunden
Normalverteilung mit $\mu = 5,8$ und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,2}{\sqrt{9}} = 0,4$
$P(5 \leq \bar{X} \leq 6) = 0,6687...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 66,9 %.

Pro Level

Laenge eines Werkstuecks * (B_309) Lösung

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{x}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0,975} \cdot \sigma_{\bar{x}}$
$u_{0,975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

Widerstandstemperatursensoren * (B_430) Lösung

b) $\mu_{\bar{x}} = 100\ \Omega$

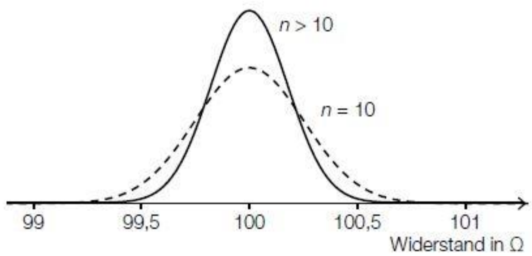
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}\ \Omega$

Zweiseitigen 98-%-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$100 \pm z_{0,99} \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}$

$z_{0,99} = 2{,}326\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallstreubereich in Ω: [99,41; 100,59] (gerundet).



LED-Lampen (5) * (B_346) Lösung

b) Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Berechnung von $\bar{x}$ mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 951$ Lumen

$\sigma = 75$ Lumen

$n = 8$

$\alpha = 5\ \%$

$u_{0,975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in Lumen: $899 \leq \mu \leq 1003$.

Der Ausdruck $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bestimmt die Breite des Vertrauensbereichs.

Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n bedeutet für die Breite:

$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Verbinder (B_274) Lösung

c) $\mu = 5{,}5$ mm

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}$ mm

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

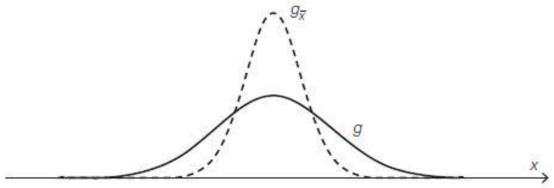
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$5{,}5 \pm 1{,}959\ldots \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}$

$5{,}2808\ldots \leq \overline{X} \leq 5{,}7191\ldots$

Der Mittelwert einer zufällig ausgewählten Stichprobe liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Bereich von 5,28 mm bis 5,72 mm.

d)

[...]	
	☒
[...]	
[...]	
[...]	

Durchmesser einer Stahlwelle * (B_019) Lösung

c) $\mu = 10{,}00$ mm und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}03}{\sqrt{30}}$ mm

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[9,985...; 10,014...]

Eine Halbierung der Breite erfordert, dass der Stichprobenumfang mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

Linienbus (B_070) Lösung

d) zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$44 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{12}{\sqrt{25}}$

$z_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich:

[39; 49] (Intervallgrenzen gerundet auf Ganze)

Die Breite des Zufallsstreubereichs ist $b = 2 \cdot z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Um b zu halbieren, müsste der Stichprobenumfang n vervierfacht werden, weil

$\frac{b}{2} = 2 \cdot z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot n}}$.

Gastwirtschaft * (B_443) Lösung

a1) $\mu = 500$ ml und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}5}{\sqrt{10}}$ ml

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[496,33...; 503,66...]

a2) Die Standardabweichung einer Stichprobe ist umso größer, je kleiner der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 5$ breiter als für $n = 10$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 5$ kleiner als für $n = 10$ sein.

Plexiglasprismen (B_358) Lösung

b) Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$ und der Standardabweichung s der Stichprobe mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 283{,}3857\ldots$, $s = 1{,}4392\ldots$

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$n = 7 \;\Rightarrow\; f = 6$

$t_{6;\,0{,}975} \approx 2{,}4469\ldots$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in g: [282,0546…; 284,7167…]

Wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α größer, so wird das Konfidenzintervall schmäler.

Bei gleichbleibender Irrtumswahrscheinlichkeit muss man die Stichprobengröße erhöhen, damit das Konfidenzintervall schmäler wird.

Koerpermasse (2) * (B_534) Lösung

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 36{,}85$ cm

$s_{n-1} = 0{,}814\ldots$ cm

a2) zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$

$n = 9 \;\Rightarrow\; f = 8$

$t_{8;0{,}975} = 2{,}306\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in cm: $34{,}39\ldots \leq \mu \leq 35{,}00\ldots$

Fischzucht * (B_566) Lösung

a1) Ablesen von $\sigma_{\bar{x}}$ und $\mu_{\bar{x}}$ aus der Abbildung:

$\sigma_{\bar{x}} = 2$

$\mu_{\bar{x}} = 350$

$P(349 \leq X \leq 350) = 0{,}1914\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 19,1 %.

a2) $2 = \frac{\sigma}{\sqrt{9}}$

$\sigma = 6$

b1) Berechnung des 90-%-Vertrauensbereichs $[\mu_u;\ \mu_o]$ mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 299 - t_{8;0{,}95} \cdot \frac{6{,}3}{\sqrt{9}} = 295{,}094\ldots$

$\mu_o = 299 + t_{8;0{,}95} \cdot \frac{6{,}3}{\sqrt{9}} = 302{,}905\ldots$

$t_{8;0{,}95} = 1{,}859\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in g: [295,094...; 302,905...]

Lösung: Federung von Mountainbikes * (B_576)

b1) $\mu = 80$ N/cm

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$ N/cm

Berechnung des 99-%-Zufallsstreubereichs mittels Technologieeinsatz:

[77,267...; 82,732...] (in N/cm)

b2) Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ dieser Stichprobe mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 77{,}1075$ N/cm

Das arithmetische Mittel dieser Stichprobe ist nicht im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten.

Lösung: Reiseverhalten * (B_589)

c1)

σ	C
n	D

A	16
B	4
C	6
D	9

Lösung: Smartphones und Mobilfunk * (B_592)

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 0{,}969...$
$s_{n-1} = 0{,}00271...$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\mu_{\text{unten}} = \bar{x} - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{8}} = 0{,}9669...$

$\mu_{\text{oben}} = \bar{x} + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{8}} = 0{,}9715...$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}3646...$

zweiseitiger 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert: [0,9669...; 0,9715...]

All Star Level

Tunnelvortrieb * (B_521) Lösung

c1) $\mu_{\bar{x}} = 5$ m

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}005}{\sqrt{10}}$ m $= 0{,}00158...$ m

c2) $\overline{X}$ ... Stichprobenmittelwerte der Breite für $n = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(4{,}996 \leq \overline{X} \leq 5{,}004) = 0{,}9885...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 98,9 %.

c3) $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 4 \cdot 6 = 24$

Werkzeuge * (B_531) Lösung

c1) $n = 9$ Packungen

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 500{,}775$
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 1{,}0208...$

Berechnung des 95-%-Vertrauensbereichs $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 500{,}775 - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{1{,}0208...}{\sqrt{8}} = 499{,}92...$

$\mu_o = 500{,}775 + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{1{,}0208...}{\sqrt{8}} = 501{,}62...$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}3646...$

Daraus ergibt sich der folgende Vertrauensbereich in g: [499,92...; 501,62...].