Aufgabensammlung

Exponentieller Wachstum & Zerfall

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Exponentieller Wachstum & Zerfall

Grundkompetenzen

Funktionsterm* - 1_841, FA5.1, Halboffenes Antwortformat

Von einer reellen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist Folgendes bekannt:

- $f(1) = 3$
- Für alle reellen Zahlen x gilt: $f(x + 1)$ ist um 50 % größer als $f(x)$.

Geben Sie einen Funktionsterm einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ________________________________

Dicke einer Bleiplatte* - 1_672, FA5.1, Offenes Antwortformat

In der Medizintechnik werden Röntgenstrahlen eingesetzt. Durch den Einbau von Bleiplatten in Schutzwänden sollen Personen vor diesen Strahlen geschützt werden. Man geht davon aus, dass pro 1 mm Dicke der Bleiplatte die Strahlungsintensität um 5 % abnimmt.

Berechnen Sie die notwendige Dicke x (in mm) einer Bleiplatte, wenn die Strahlungsintensität auf 10 % der ursprünglichen Strahlungsintensität, mit der die Strahlen auf die Bleiplatte auftreffen, gesenkt werden soll!

Änderungsprozess* - 1_599, FA5.1, 1 aus 6

Durch die Gleichung $N(t) = 1{,}2 \cdot 0{,}98^t$ wird ein Änderungsprozess einer Größe N in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben.

Welcher der angeführten Änderungsprozesse kann durch die angegebene Gleichung beschrieben werden? Kreuzen Sie den zutreffenden Änderungsprozess an!

Von einer radioaktiven Substanz zerfallen pro Zeiteinheit 0,02 % der am jeweiligen Tag vorhandenen Menge.	☐
In ein Speicherbecken fließen pro Zeiteinheit 0,02 m³ Wasser zu.	☐
Vom Wirkstoff eines Medikaments werden pro Zeiteinheit 1,2 mg abgebaut.	☐
Die Einwohnerzahl eines Landes nimmt pro Zeiteinheit um 1,2 % zu.	☐
Der Wert einer Immobilie steigt pro Zeiteinheit um 2 %.	☐
Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☐

Exponentialfunktion* - 1_575, FA5.1, Halboffenes Antwortformat

Von einer Exponentialfunktion f sind die folgenden Funktionswerte bekannt:

$f(0) = 12$ und $f(4) = 192$

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Exponentialfunktion f an!

$f(x) =$ ________________________________

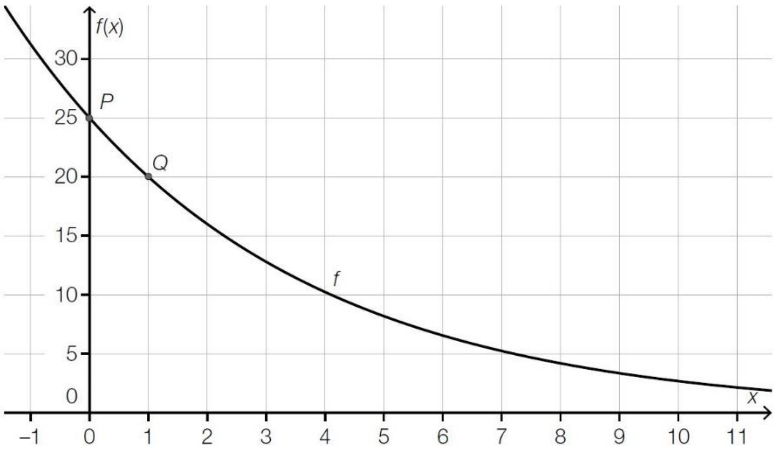
Ausbreitung eines Ölteppichs* - 1_483, FA5.1, Offenes Antwortformat

Der Flächeninhalt eines Ölteppichs beträgt momentan 1,5 km² und wächst täglich um 5 %.

Geben Sie an, nach wie vielen Tagen der Ölteppich erstmals größer als 2 km² ist!

Exponentialfunktion* - 1_435, FA5.1, Offenes Antwortformat

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch die Punkte $P = (0|25)$ und $Q = (1|20)$.



Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion f an!

Wirkstoff* - 1_696, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

Die Abnahme der Menge des Wirkstoffs eines Medikaments im Blut lässt sich durch eine Exponentialfunktion modellieren.
Nach einer Stunde sind 10 % der Anfangsmenge des Wirkstoffs abgebaut worden.

Berechnen Sie, welcher Prozentsatz der Anfangsmenge des Wirkstoffs nach insgesamt vier Stunden noch im Blut vorhanden ist!

_____________ % der Anfangsmenge

Wachstum* - 1_340, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess der Form $f(t) = c \cdot a^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t.

Ermitteln Sie für $t = 2$ und $t = 3$ die Werte der Funktion f!

t	$f(t)$
0	400
1	600
2	$f(2)$
3	$f(3)$

$f(2) =$ ____________________________________

$f(3) =$ ____________________________________

Exponentialfunktion* - 1_648, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Für eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{\lambda \cdot x}$ gilt: $f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$.

Geben Sie den Wert von λ an!

$\lambda =$ ____________________________________

Zellkulturen* - 1_624, FA5.3, Zuordnungsformat

Im Rahmen eines biologischen Experiments werden sechs Zellkulturen günstigen und ungünstigen äußeren Bedingungen ausgesetzt, wodurch die Anzahl der Zellen entweder exponentiell zunimmt oder exponentiell abnimmt.
Dabei gibt $N_i(t)$ die Anzahl der Zellen in der jeweiligen Zellkultur t Tage nach Beginn des Experiments an ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Ordnen Sie den vier beschriebenen Veränderungen jeweils die zugehörige Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0{,}15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0{,}5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0{,}85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1{,}5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1{,}85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

Wachstum einer Population* - 1_531, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Die Größe einer Population wird in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{0{,}1188 \cdot t}$ beschrieben, wobei die Zeit t in Stunden angegeben wird. Dabei bezeichnet N_0 die Größe der Population zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Bestimmen Sie denjenigen Prozentsatz p, um den die Population pro Stunde wächst!

$p \approx$ __________ %

Eigenschaften einer Exponentialfunktion* - 1_459, FA5.4, 2 aus 5

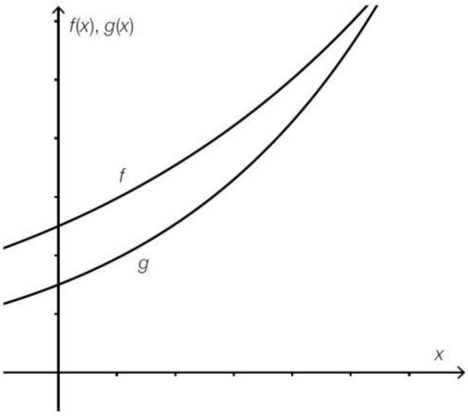
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 50 \cdot 1{,}97^x$.

Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (50 \mid 0)$.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 5 vergrößert, wird der Funktionswert 50-mal so groß.	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	☐

Parameter von Exponentialfunktionen* - 1_482, FA5.3, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier Exponentialfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = d \cdot b^x$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die Parameter a, b, c, d der beiden gegebenen Exponentialfunktionen gelten die Beziehungen ______①______ und ______②______.

①	
$c < d$	☐
$c = d$	☐
$c > d$	☐

②	
$a < b$	☐
$a = b$	☐
$a > b$	☐

Exponentialfunktion* - 1_387, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Von einer Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 25 \cdot b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+$; $b \neq 0$; $b \neq 1$) ist folgende Eigenschaft bekannt:

Wenn x um 1 erhöht wird, sinkt der Funktionswert auf 25 % des Ausgangswertes.

Geben Sie den Wert des Parameters b an!

$b =$ ________________________________

Funktion mit einer besonderen Eigenschaft* - 1_720, FA5.4, Halboffenes Antwortformat

Für eine nicht konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$.

Geben Sie eine Gleichung einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ________________________________

Exponentialfunktion* - 1_339, FA5.4, 2 aus 5

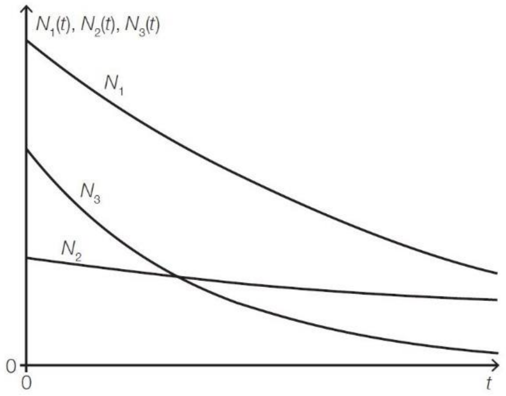
Eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ist eine Exponentialfunktion, für deren reelle Parameter c und a gilt: $c \neq 0$, $a > 1$.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf diese Exponentialfunktion f und alle Werte $k, h \in \mathbb{R}$, $k > 1$ zutreffen!

$f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$	☐
$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	☐
$f(x + 1) = a \cdot f(x)$	☐
$f(0) = 0$	☐
$f(x + h) = f(x) + f(h)$	☐

Halbwertszeiten von Zerfallsprozessen* - 1_840, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Die drei Exponentialfunktionen N_1, N_2 und N_3 beschreiben jeweils einen Zerfallsprozess mit den zugehörigen Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3.
Nachstehend sind Ausschnitte der Graphen dieser drei Funktionen abgebildet.



Ordnen Sie die Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3 der Größe nach. Beginnen Sie mit der kürzesten Halbwertszeit.

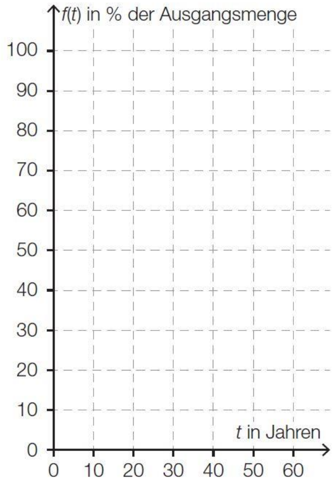
_______ < _______ < _______

Halbwertszeit* - 1_816, FA5.5, Konstruktionsformat

Das radioaktive Isotop ^{137}Cs (Cäsium) hat eine Halbwertszeit von etwa 30 Jahren.

Die Funktion f gibt in Abhängigkeit von der Zeit t an, wie viel Prozent der Ausgangsmenge an ^{137}Cs noch vorhanden sind (t in Jahren, $f(t)$ in % der Ausgangsmenge).
Die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge an ^{137}Cs wird als *Ausgangsmenge* bezeichnet.

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Zeitintervall [0; 60] den Graphen von f ein.



Halbwertszeit* - 1_792, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Die Funktion f mit $f(t) = 80 \cdot b^t$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ beschreibt die Masse $f(t)$ einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $f(t)$ in mg). Die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz beträgt 4 h.
Eine Messung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Berechnen Sie diejenige Masse (in mg) der radioaktiven Substanz, die nach den ersten 3 Halbwertszeiten vorhanden ist.

Anzahl von Tieren* - 1_768, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Man nimmt an, dass sich die Anzahl der Tiere einer bestimmten Tierart auf der Erde um 1,8 % pro Jahr erhöht.

Bestimmen Sie diejenige Zeitdauer in Jahren, innerhalb der sich die Anzahl der Tiere dieser Tierart auf der Erde verdoppelt.

Zeitdauer: ca. ____________ Jahre

Verzinsung* - 1_744, FA5.5, Offenes Antwortformat

Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparbuch mit 1 % p. a. (pro Jahr) verzinst.

Für die nachstehende Aufgabenstellung gilt die Annahme, dass allfällige Steuern oder Gebühren nicht gesondert berücksichtigt werden müssen und dass keine weiteren Einzahlungen oder Auszahlungen erfolgen.

Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich das Kapital K_0 bei gleichbleibendem Zinssatz verdoppelt.

Halbwertszeit* - 1_649, FA5.5, Offenes Antwortformat

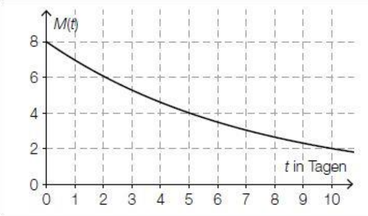
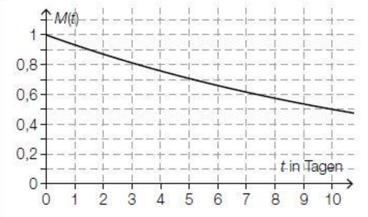
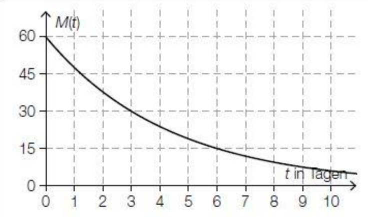
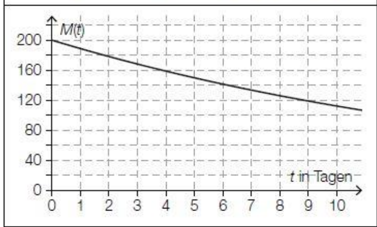
Die Masse $m(t)$ einer radioaktiven Substanz kann durch eine Exponentialfunktion m in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.
Zu Beginn einer Messung sind 100 mg der Substanz vorhanden, nach vier Stunden misst man noch 75 mg dieser Substanz.

Bestimmen Sie die Halbwertszeit t_H dieser radioaktiven Substanz in Stunden!

Halbwertszeiten* - 1_600, FA5.5, Zuordnungsformat

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von Exponentialfunktionen, die jeweils die Abhängigkeit der Menge einer radioaktiven Substanz von der Zeit beschreiben.
Dabei gibt $M(t)$ die Menge (in mg) zum Zeitpunkt t (in Tagen) an.

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Halbwertszeit (aus A bis F) zu!

A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Dicke einer Bleischicht* - 1_576, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Die Intensität elektromagnetischer Strahlung nimmt bei Durchdringung eines Körpers exponentiell ab.

Die Halbwertsdicke eines Materials ist diejenige Dicke, nach deren Durchdringung die Intensität der Strahlung auf die Hälfte gesunken ist. Die Halbwertsdicke von Blei liegt für die beobachtete Strahlung bei 0,4 cm.

Bestimmen Sie diejenige Dicke d, die eine Bleischicht haben muss, damit die Intensität auf 12,5 % der ursprünglichen Intensität gesunken ist!

d = ______________________________ cm

Halbwertszeit von Cobalt-60* - 1_554, FA5.5, Offenes Antwortformat

Das radioaktive Isotop Cobalt-60 wird unter anderem zur Konservierung von Lebensmitteln und in der Medizin verwendet.
Das Zerfallsgesetz für Cobalt-60 lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}13149 \cdot t}$ mit t in Jahren; dabei bezeichnet N_0 die vorhandene Menge des Isotops zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die vorhandene Menge zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Berechnen Sie die Halbwertszeit von Cobalt-60!

Bienenbestand* - 1_507, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Wegen eines Umweltgifts nimmt der Bienenbestand eines Imkers täglich um einen fixen Prozentsatz ab. Der Imker stellt fest, dass er innerhalb von 14 Tagen einen Bestandsverlust von 50 % erlitten hat.

Berechnen Sie den täglichen relativen Bestandsverlust in Prozent!

täglicher relativer Bestandsverlust: __________ %

Technetium* - 1_411, FA5.5, Offenes Antwortformat

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop $^{99m}_{43}\text{Tc}$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.

Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

Halbwertszeit* - 1_1189, FA5.5, 2 aus 5

Die Halbwertszeit einer bestimmten radioaktiven Substanz beträgt T Jahre.
Die nach t Jahren vorhandene Menge der radioaktiven Substanz wird mit $m(t)$ bezeichnet.
Es gilt: $m(0) > 0$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☐
$m(2 \cdot T) = 0$	☐
$m(3 \cdot T) = \frac{7}{8} \cdot m(0)$	☐
$m(4 \cdot T) = \frac{1}{4} \cdot m(T)$	☐
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☐

Bevölkerungszahl* - 1_889, FA5.6, 2 aus 5

Es wurde erhoben, wie sich die Bevölkerungszahl in verschiedenen Städten in den vergangenen fünf Jahren verändert hat.
Zwei der unten angeführten Situationen können als exponentielles Wachstum der jeweiligen Bevölkerungszahl beschrieben werden.

Kreuzen Sie die beiden Situationen an, die jeweils mithilfe einer Exponentialfunktion angemessen beschrieben werden können. *[2 aus 5]*

Die Bevölkerungszahl nahm jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ der Bevölkerungszahl des jeweiligen Vorjahres zu.	☐
Die Bevölkerungszahl hat im ersten Jahr um 10 000, im zweiten um 20 000, im dritten um 30 000, im vierten um 40 000 und im letzten Jahr um 50 000 zugenommen.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 20 000 größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war in den ersten zwei Jahren jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr, dann jedes Jahr um 15 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐

Körperliche Leistungsfähigkeit* - 1_888, FA5.2, Offenes Antwortformat

Im Rahmen einer Studie wird jährlich die körperliche Leistungsfähigkeit bestimmter Personen untersucht. Das Ergebnis wird in Punkten angegeben. Modellhaft wird angenommen, dass diese Punktzahl mit zunehmendem Alter exponentiell abnimmt.

Lena ist eine dieser Personen. Von ihr sind folgende Daten bekannt:

Alter in Jahren	55	60
Punktzahl	1800	1650

Ermitteln Sie unter Verwendung eines exponentiellen Modells, ab welchem Alter Lena voraussichtlich höchstens 1200 Punkte erreichen wird.

Grippeerkrankungen* - 1_1230, FA5.1, Offenes Antwortformat

Am Abend des 10. Februar 2019 waren in einem bestimmten Land 2000 Personen an Grippe erkrankt, am Abend des 21. Februar 2019 waren es 4000 Personen. Modellhaft wird angenommen, dass in diesem Land im Februar 2019 die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen von Tag zu Tag um den gleichen Prozentsatz gestiegen ist.

Berechnen Sie diesen Prozentsatz.

Baumhöhe* - 1_1254, FA5.1, Offenes Antwortformat

Die Höhe eines bestimmten Baumes kann in den ersten 15 Jahren nach dem Einpflanzen durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

Dieser Baum hat 10 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,2 m und 15 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,7 m.

Berechnen Sie die Höhe dieses Baumes zum Zeitpunkt des Einpflanzens.

Jahreszinssatz* (1_1278) - FA5.2 - Offenes Antwortformat

Das Kapital K_0 wächst exponentiell mit dem gleichbleibenden Jahreszinssatz i.
Nach n Jahren erreicht das Kapital den Wert K_n, der mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Nach 6 Jahren hat das Kapital K_0 um insgesamt 8,62 % zugenommen.

Ermitteln Sie den Jahreszinssatz i.

Exponentialfunktionen* (1_1298) - FA1.5 - 2 aus 5

Gegeben ist eine Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jede Exponentialfunktion der oben angeführten Form zutreffen. *[2 aus 5]*

f hat keine Nullstellen.	☐
f ist streng monoton steigend.	☐
f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐
Der Graph von f ist positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☐
Der Graph von f nähert sich für $x \to \infty$ der positiven x-Achse.	☐

Verdoppelungszeit* (1_1302) - FA5.5 - Zuordnungsformat

Die jeweilige Anzahl der Bakterien von sechs Bakterienkulturen wächst exponentiell. Dabei ist die jeweilige Verdoppelungszeit unterschiedlich.

Die Anzahl der Bakterien der jeweiligen Bakterienkultur wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch $N_i\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+, t \mapsto N_i(t)$ mit $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ modelliert (t in Stunden).

Ordnen Sie den vier Aussagen über die Verdoppelungszeiten jeweils die zugehörige Funktionsgleichung aus A bis F zu.

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 1-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 2-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 3-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 4-mal pro Stunde.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$

Aufrufe eines Videos* (1_1326) - FA5.2 - Offenes Antwortformat

Ein Video wurde auf eine Internetplattform hochgeladen. Zu Beginn der Beobachtung waren 500 Aufrufe zu verzeichnen. Im Zeitintervall $[0; t_1]$ wird die Anzahl der bisher erfolgten Aufrufe durch eine Exponentialfunktion beschrieben.

In der nachstehenden Tabelle sind Wertepaare dieser Exponentialfunktion angegeben.

Zeit nach Beginn der Beobachtung in h	Anzahl der Aufrufe
0	500
1	700
2	980
3	1372
t_1	10330

Berechnen Sie t_1.

Rookie Level

Medikamentenabbau (1) * (A_251)

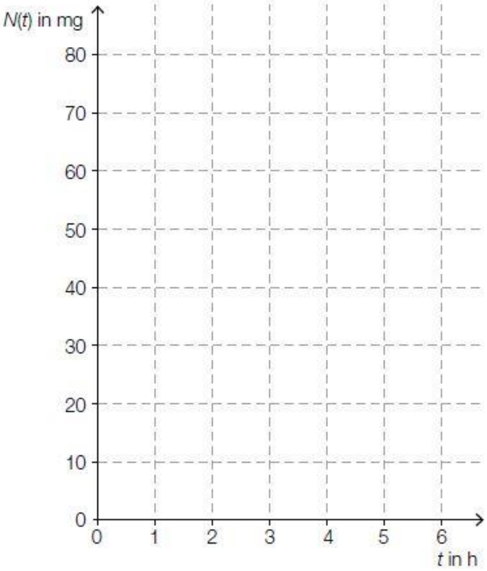
a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

– Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen.
– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die diesen Medikamentenabbau beschreibt.
– Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist.

b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang ($t = 0$ h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.
Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall [0 h; 6 h] ein.



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

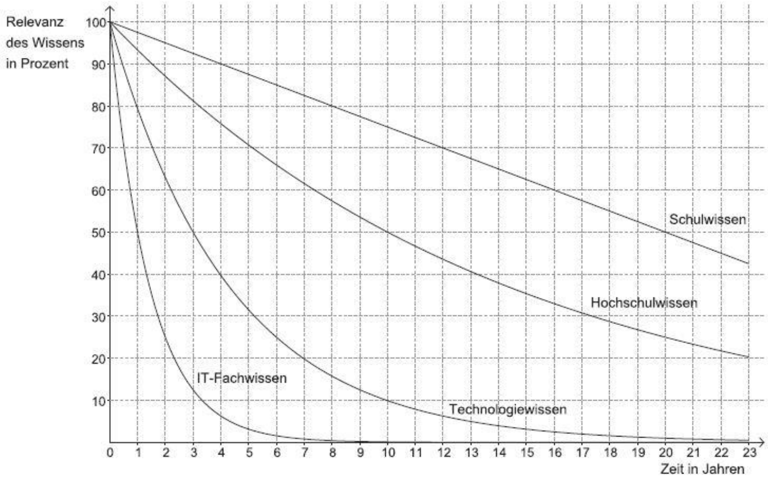
t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Halbwertszeit des Wissens * (A_159)

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

– Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

– Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

Impfen und Auffrischen * (A_269)

Mithilfe der Konzentration von Antikörpern im Blut wird bestimmt, ob nach einer Impfung ausreichender Impfschutz besteht. Diese Konzentration wird oft als Antikörperwert bezeichnet und in „Internationalen Einheiten pro Liter" (IE/L) angegeben.

a) Bei Anna wurde unmittelbar nach einer Impfung ein Antikörperwert von 110 IE/L gemessen. Der Antikörperwert sinkt kontinuierlich und nimmt bei Anna pro Jahr um 20 % in Bezug auf das jeweils vorhergehende Jahr ab.

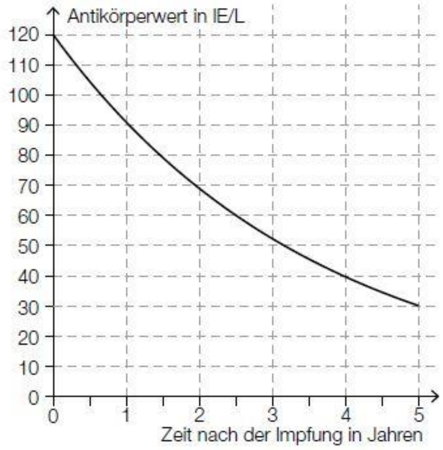
Der Antikörperwert in Annas Blut (in IE/L) soll in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine Funktion A beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion A. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Messung.

Ab einem Antikörperwert von 10 IE/L ist der Impfschutz nicht mehr gegeben.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Impfschutz bei Anna nicht mehr gegeben ist.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Antikörperwerts von Bernhard nach einer Impfung.



1) Lesen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab.

$T_{1/2}$ = ______________ Jahre

Bei Sandra beträgt der Antikörperwert unmittelbar nach der Impfung 80 IE/L. Ihr Antikörperwert sinkt exponentiell mit derselben Halbwertszeit wie jener von Bernhard.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den zeitlichen Verlauf von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] ein.

Bevoellkerungsentwicklung * (A_218)

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Sonnenaufgang* (A_284)

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

Luftverschmutzung * (A_075)

c) Kohlenstoffmonoxid entsteht bei Verbrennungsprozessen und ist für Menschen giftig.

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in einer Region kann näherungsweise folgendermaßen beschrieben werden:

$c(t) = 1{,}29 \cdot 0{,}9659^t$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990
$c(t)$ ... Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in Tonnen

1) Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 29 % pro Jahr zu.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt im Laufe der Zeit immer schneller ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt linear ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 96,59 % pro Jahr ab.	☐

Kfz-Bestand (2) * (B_302)

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6,3}{4,5}} = 1,0169...$

$1,0169... - 1 = 0,0169... \approx 1,7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1,0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,0169...)} = 41,20... \approx 41,2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

Flüssigkeitsbehälter * (A_063)

c) Ein Flüssigkeitsbehälter wird befüllt. Dabei kann die Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter in Abhängigkeit von der Füllzeit näherungsweise durch die Funktion F beschrieben werden.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$

t ... Füllzeit in min
$F(t)$ ... Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter zur Füllzeit t in L

Die Gleichung $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ wird nach t gelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang.

Pflanzenwachstum * (A_292)

c) Die Höhe einer bestimmten Pflanze wird täglich zu Mittag gemessen. Zu Beobachtungsbeginn hat die Pflanze die Höhe H_0. Sie wächst um 0,5 % pro Tag bezogen auf die Höhe des jeweils vorangegangenen Tages.

1) Erstellen Sie mithilfe von H_0 eine Formel zur Berechnung der Höhe H dieser Pflanze 10 Tage nach Beobachtungsbeginn.

$H =$ ____

Sozialausgaben (2) * (B_482)

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87{,}8}{71{,}2}} - 1 \approx 0{,}043$$

Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

Sicherheit auf dem Schulweg * (A_293)

c) Der relative Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, kann für einen bestimmten Zeitabschnitt modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^t$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung
$f(t)$ ... relativer Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, zur Zeit t
b ... Parameter ($b > 0$, $b \neq 1$)

1) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters b auf das Monotonieverhalten der Funktion f.

Folgende Berechnung wurde durchgeführt:

$f(0) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^0 = 0{,}1 + 0 = 0{,}1$

2) Beschreiben Sie, welcher Fehler bei dieser Berechnung gemacht wurde.

Streaming * (B_501)

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.

Leuchtdioden * (A_305)

c) Ein Maß für die Helligkeit einer Lichtquelle ist der sogenannte *Lichtstrom*. Dieser wird in der Einheit Lumen angegeben.
Man geht davon aus, dass der maximale Lichtstrom von LEDs durch technische Weiterentwicklung exponentiell ansteigen wird.
Dabei gilt: Alle 10 Jahre steigt der maximale Lichtstrom von LEDs auf das 20-Fache.

Diese Entwicklung kann durch eine Exponentialfunktion L modelliert werden.

$L(t) = L_0 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren
$L(t)$ … maximaler Lichtstrom zur Zeit t in Lumen
L_0 ... maximaler Lichtstrom zur Zeit $t = 0$ in Lumen
a ... positiver Parameter

1) Berechnen Sie den Parameter a.

2) Interpretieren Sie den Wert des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

Obst * (A_320)

c) Die Obstanbaufläche in Österreich ist in den letzten Jahrzehnten zurückgegangen. Im Jahr 1960 betrug die Obstanbaufläche rund 28000 Hektar (ha). Im Jahr 2005 betrug die Obstanbaufläche rund 15000 ha.
Die Entwicklung der Obstanbaufläche lässt sich für diesen Zeitraum näherungsweise durch die Exponentialfunktion A beschreiben.

$A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1960
$A(t)$ ... Obstanbaufläche zur Zeit t in ha
A_0, k ... Parameter

1) Ermitteln Sie die Parameter A_0 und k.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$1 - \frac{15000}{28000} \approx 0{,}46$

Sonnenblumen * (A_329)

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht.

Käse * (A_341)

a) Bei der Herstellung von Käse werden verschiedene Enzyme verwendet.

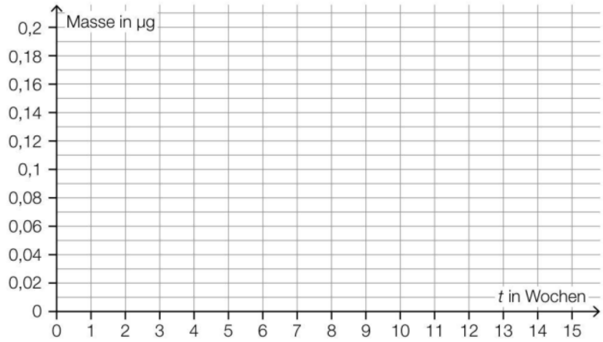
Die Masse eines bestimmten Enzyms nimmt mit der Zeit exponentiell ab.

Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) betrug die Masse 0,19 µg, nach 15 Wochen betrug die Masse 0,06 µg.

Die Masse des Enzyms in µg soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Exponentialfunktion f im Intervall [0; 15] ein.



Zum Volumen eines anderen Enzyms wurden die nachstehenden Daten ermittelt.

Zeit in Wochen	0	2	15
Volumen in ml	0,040	0,033	0,034

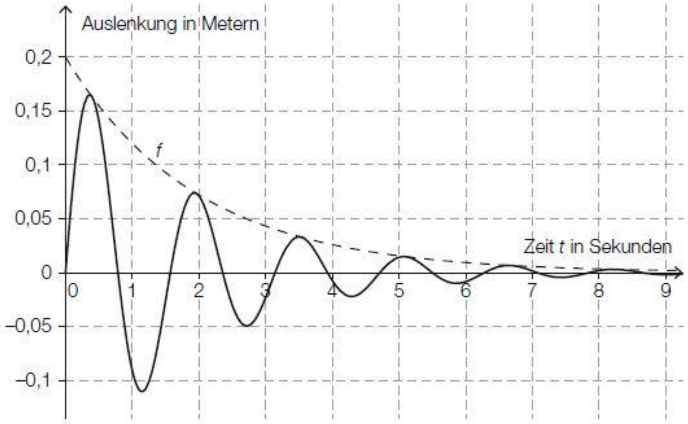
3) Begründen Sie anhand der Daten aus der obigen Tabelle, warum das Volumen in Abhängigkeit von der Zeit <u>nicht</u> durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.

Pro Level

Baumkronenpfad * (A_230)

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.
– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

Epidemie * (A_255)

a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.
Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N, die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
– Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

Die Genussformel * (A_263)

a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

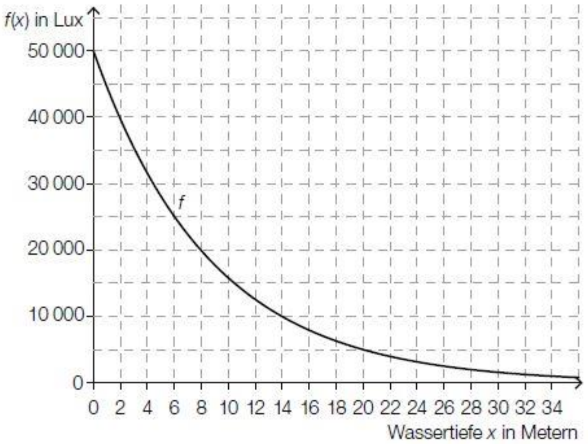
$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller
$G(n)$ ... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

– Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

Unter Wasser * (A_178)

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

Medikamentenabbau (2) (A_231)

a) Der Medikamentenabbau im Blut erfolgt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
N_0 … Ausgangsmenge des Wirkstoffs im Blut in mg

– Beschreiben Sie, was mit der Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}231 \cdot t}$ im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt werden kann.

Ein Passagier nimmt um 18:00 Uhr und um 22:00 Uhr je eine Tablette mit 50 mg Wirkstoffmenge zu sich.

– Ermitteln Sie, wie viel Milligramm Wirkstoffmenge der Passagier am nächsten Tag um 4:00 Uhr noch im Körper hat.

b) Ein neuartiges Medikament steht in zwei Formen A und B zur Verfügung. Der Abbau des Wirkstoffs wurde für beide Formen in regelmäßigen Zeitabständen gemessen.

Die beiden Wertetabellen zeigen die Wirkstoffmenge $W(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t:

Versuchsreihe für A	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,0
1	27,0
2	24,3
3	21,87

Versuchsreihe für B	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,00
1	29,25
2	28,50
3	27,75

– Begründen Sie anhand der obigen Tabellen, warum die Versuchsreihe für A durch ein exponentielles und die Versuchsreihe für B hingegen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zeitlichen Abbau der Wirkstoffmenge des Medikaments in der Form B.

Cobalt-60 (B_076)

a) Beim Durchdringen von Aluminium wird die Strahlungsintensität von Cobalt-60 pro 5,3 cm Dicke der Aluminiumschicht jeweils um die Hälfte abgeschwächt. Die Funktion I beschreibt die Strahlungsintensität von Cobalt-60 in Abhängigkeit von der Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht.

x … Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht in cm
$I(x)$ … Strahlungsintensität beim Austritt aus der Aluminiumschicht mit der Dicke x in % der Ausgangsintensität

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.
– Ermitteln Sie, wie viele 2 cm dicke Aluminiumplatten man benötigt, wenn man die Intensität der Strahlung auf höchstens 5 % der Ausgangsintensität reduzieren will.

Allergie (B_289)

b) Einem Kind wurde ein Antiallergikum verschrieben. 48 Stunden nach der Einnahme dieses Antiallergikums sind noch 0,1 % des Wirkstoffs der verabreichten Dosis vorhanden.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion auf, die die Abnahme der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden nach der Einnahme beschreibt. Es wird von einer Anfangsmenge N_0 ausgegangen.
– Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums.

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152)

a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$N(t) = 82{,}5 \cdot e^{-0{,}00043347 \cdot t}$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005
$N(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

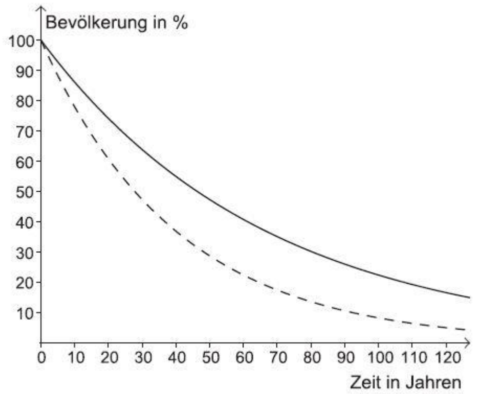
– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.
– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



Koffein (A_199)

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

– Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit" zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

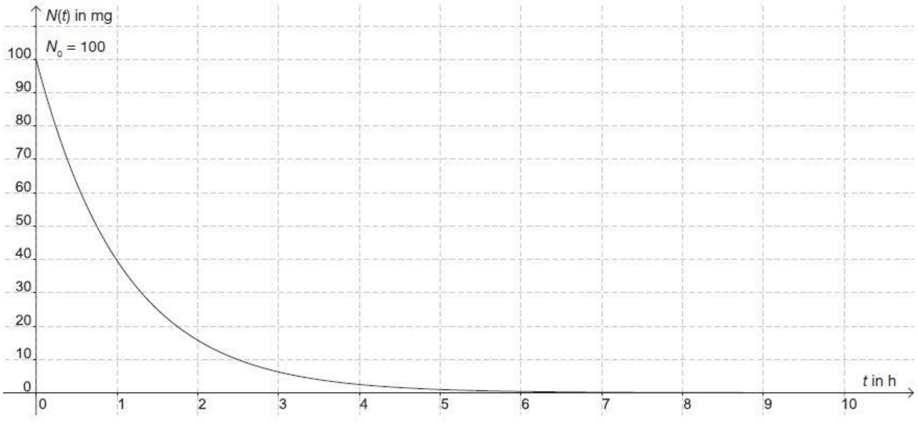
$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden (h)

– Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

– Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

– Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Vernetzte Welt * (A_245)

a) Zu Beginn des Jahres 2005 gab es weltweit 5,5 Millionen Personen, die im Internet ein bestimmtes soziales Netzwerk verwendeten. Die Anzahl der Nutzer/innen nahm exponentiell zu. Zu Beginn des Jahres 2011 verwendeten bereits 820 Millionen Personen dieses soziale Netzwerk. Die Anzahl der Personen, die dieses soziale Netzwerk verwenden, soll durch eine Funktion F beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion F.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2005
$F(t)$ ... Anzahl der Personen, die das soziale Netzwerk zur Zeit t verwenden, in Millionen

b) Nach einer Faustregel der Technologiebranche verdoppelt sich die Geschwindigkeit von Computerprozessoren alle 18 Monate. In einem Buch wird behauptet, dass demnach die Computerprozessoren im Jahr 2025 etwa 64-mal so schnell sein werden wie im Jahr 2013.*

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

WhatsApp * (B_356)

a) Zu Beginn des Jahres 2012 verzeichnete WhatsApp in einem Land 9,3 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2013 waren es 20 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 32 Millionen Nutzer/innen.

Jemand behauptet, dass für diesen Zeitraum ein exponentielles Wachstum vorliegt.

– Modellieren Sie mithilfe der Werte für 2012 und 2014 eine Exponentialfunktion A, die die Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen beschreibt.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2012
$A(t)$ ... Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen zur Zeit t in Millionen

– Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeitspanne sich die Anzahl der Nutzer/innen in diesem Modell jeweils verdoppelt.
– Beurteilen Sie, ob dieses Modell den Wert für 2013 gut wiedergibt, wenn Abweichungen bis zu 1 Million Nutzerinnen/Nutzern toleriert werden.

Lebensversicherung (B_119)

a) Die Sterbewahrscheinlichkeit ist unter anderem vom Lebensalter der versicherten Person exponentiell abhängig und verdoppelt sich bei jüngeren Personen schätzungsweise alle 9 Jahre. Laut Statistik Austria verstirbt in Österreich ein 30-jähriger Mann innerhalb eines Versicherungsjahres mit einer Wahrscheinlichkeit von nur ungefähr 0,088 %.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p, die diese Abhängigkeit beschreibt. Runden Sie die Parameter auf 4 Nachkommastellen.

$p(t) = p_0 \cdot a^t$

t ... Alter in Jahren
$p(t)$ ... Sterbewahrscheinlichkeit in Prozent im Alter t

Vitamin C* (A_281)

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab.
Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte.

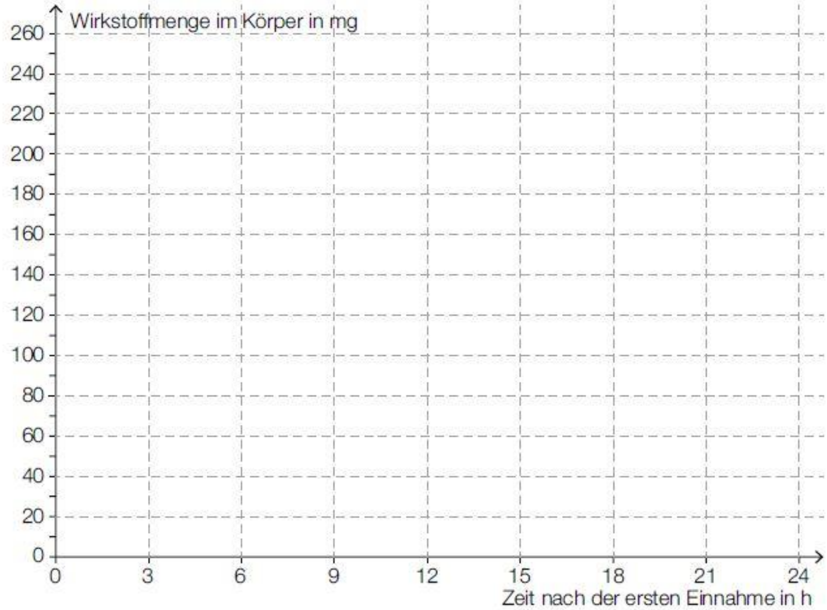
2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte.

Medikamentenabbau (3) * (A_278)

Eine Ärztin verschreibt einem Patienten zur Behandlung seines Bluthochdrucks ein Medikament mit einer Wirkstoffmenge von 240 mg pro Tablette, welches im Körper exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden abgebaut wird. Man nimmt an, dass der Wirkstoff nach Einnahme einer Tablette sofort in das Blut übergeht.

a) Ein Patient nimmt um 7 Uhr und um 19 Uhr jeweils eine Tablette ein.

1) Stellen Sie die Wirkstoffmenge des Medikaments im Körper des Patienten als Funktion der Zeit für die ersten 24 Stunden nach der ersten Einnahme in der unten stehenden Abbildung grafisch dar.



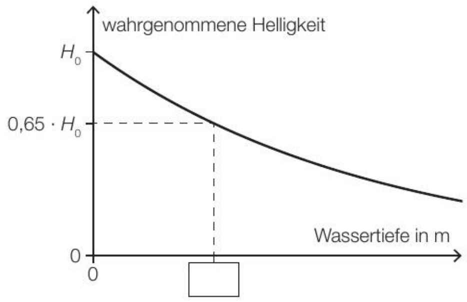
b) 1) Argumentieren Sie, weshalb der Wirkstoff bei einmaliger Einnahme nach diesem Modell nach 24 Stunden nicht vollständig aus dem Körper verschwunden sein kann.

c) Ein anderer Patient nimmt einmalig nur um 7 Uhr Früh 2 Tabletten ein. Das Medikament wirkt bei einer Mindestmenge von 50 mg, darunter ist seine Wirkung vernachlässigbar.

1) Bestimmen Sie, wie lange das Medikament wirkt.

Helligkeit (A_125)

c) Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro Meter Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nachstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.



– Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Flugzeuge (A_126)

c) Der Kerosinverbrauch von Flugzeugen kann ab dem Jahr 1960 näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9$

t … Zeit nach 1960 in Jahren
$f(t)$ … Kerosinverbrauch in Litern pro Passagier pro 100 km

– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f, in welchem Jahr der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km beträgt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 2,9 in der Funktionsgleichung von f im gegebenen Sachzusammenhang.

Lichtverhältnisse (A_118)

b) Im Zusammenhang mit Beleuchtung können manche Sachverhalte durch exponentielle Modelle beschrieben werden: beim Durchdringen von Glas nimmt die Lichtintensität exponentiell ab; die Menge an künstlichen Lichtquellen hat in der Vergangenheit annähernd exponentiell zugenommen; …

– Ordnen Sie den beiden exponentiellen Modellen jeweils die passende Funktionsgleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

exponentielles Wachstum	
exponentielle Abnahme	

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

W-LAN * (B_475)

b) Eine Technikerin modelliert die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung von einem Access-Point mit einer Exponentialfunktion d.

$d(x) = c \cdot a^x$

x … Entfernung in m
$d(x)$ … Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in Mbit/s

Sie ermittelt folgende Messwerte:

Entfernung in m	5	50
Datenübertragungsrate in Mbit/s	500	10

1) Berechnen Sie die Parameter a und c der Exponentialfunktion d.

2) Kreuzen Sie die auf diese Exponentialfunktion d nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktionswerte der 1. Ableitung der Funktion d sind negativ.	☐
Die x-Achse ist für den Graphen der Funktion d eine Asymptote.	☐
Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☐
Die Funktion d hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert c.	☐
Die Funktionswerte der 2. Ableitung der Funktion d sind positiv.	☐

Rund um die Heizung * (A_140)

b) Eine Heizung beginnt um 15 Uhr, einen Wohnraum zu erwärmen. Ab diesem Zeitpunkt kann die Raumtemperatur durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Heizdauer in h mit $t = 0$ für 15 Uhr
$T(t)$ ... Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Bestimmen Sie die Raumtemperatur um 15 Uhr.

Um 16 Uhr beträgt die Raumtemperatur 21 °C.

2) Berechnen Sie den Parameter λ.

Sonnenlicht und Vitamin D * (A_300)

b) Die Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut sinkt ab Herbstbeginn und lässt sich durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot t}$

t ... Zeit ab Herbstbeginn in Tagen
$N(t)$ ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml)
N_0 ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zu Herbstbeginn in ng/ml

Der Körper ist ausreichend mit Vitamin D versorgt, wenn dessen Konzentration im Blut mindestens 30 ng/ml beträgt.

Claudia möchte wissen, wie hoch die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn mindestens sein muss, damit ihr Körper nach 60 Tagen noch ausreichend mit Vitamin D versorgt ist.

1) Berechnen Sie die dafür notwendige Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.

Im obigen Modell beträgt die Halbwertszeit beim Abbau von Vitamin D in Claudias Körper 40 Tage.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 80 Tagen ist noch die Hälfte von N_0 vorhanden.	☐
Nach 100 Tagen ist noch ein Drittel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 120 Tagen ist noch ein Viertel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 140 Tagen ist noch ein Achtel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☐

Desinfektion * (B_530)

a) Eine gängige Methode, bestimmte Krankheitserreger abzutöten, ist der Einsatz von heißem Wasser. Die benötigte Einwirkzeit hängt von der Temperatur des Wassers ab.

Temperatur in °C	70	80	90
benötigte Einwirkzeit in Sekunden	30000	3000	300

In einem bestimmten Temperaturbereich kann die benötigte Einwirkzeit $f(x)$ in Abhängigkeit von der Temperatur x näherungsweise durch die Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ beschrieben werden. f soll dabei für die Temperaturen 70 °C und 80 °C die obigen Werte annehmen.

1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Funktionswert dieser Exponentialfunktion f bei 90 °C dem in der obigen Tabelle angegebenen Wert entspricht. *[0/1 P.]*

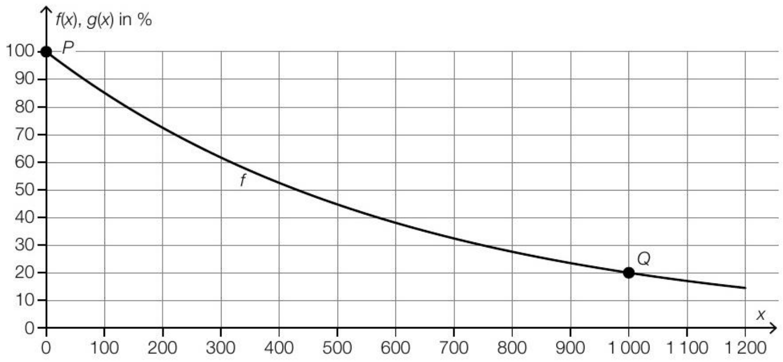
3) Berechnen Sie mithilfe der Exponentialfunktion f diejenige Temperatur, bei der die benötigte Einwirkzeit 10 Minuten beträgt. *[0/1 P.]*

Winterdienst * (A_315)

c) Auf einer Straße wird Auftausalz gestreut. Durch den nachfolgenden Verkehr nimmt die Salzmenge auf der Straße allerdings wieder ab.

Die Salzmenge auf der Straße in Prozent der gestreuten Salzmenge hängt von der Anzahl der Fahrzeuge, die die Straße befahren, ab. Sie kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

x ... Anzahl der Fahrzeuge
$f(x)$ ... Salzmenge auf der Straße nach x Fahrzeugen in %



1) Stellen Sie mithilfe der Punkte P und Q eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, nach wie vielen Fahrzeugen die Salzmenge auf der Straße auf 10 % der gestreuten Salzmenge gesunken ist. *[0/1 P.]*

Bei einem anderen Auftausalz sinkt die Salzmenge auf der Straße nach 600 Fahrzeugen auf die Hälfte der gestreuten Salzmenge. Dieser Zusammenhang kann durch die Exponentialfunktion g beschrieben werden.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion g im Intervall [0; 1 200] ein. *[0/1 P.]*

Koffein* (b) - 2_101, FA5.2 FA5.5, Offenes Antwortformat

b) Die Löslichkeit von Koffein in Wasser gibt an, wie viel Gramm Koffein pro Liter (g/L) maximal gelöst werden können. Die Löslichkeit ist temperaturabhängig. Sie lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$f(T) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$ mit $0 \leq T \leq 90$

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Löslichkeit von Koffein in Wasser bei der Temperatur T in g/L

Jemand behauptet:
„Bei einem Anstieg der Temperatur um 10 °C nimmt die Löslichkeit von Koffein in Wasser etwa auf das 1,65-Fache zu."

1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Behauptung richtig ist.

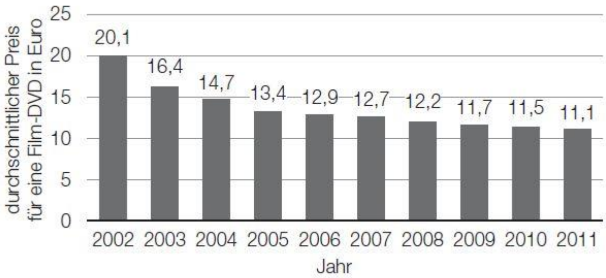
Folgende Gleichung wird aufgestellt:
$2 \cdot 6{,}42 = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$

2) Interpretieren Sie die Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Speichermedien* (c) - 2_108, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

c) Ein beliebtes Speichermedium für Filme ist die DVD.

Seit Anfang des 21. Jahrhunderts hat der durchschnittliche Preis für Film-DVDs abgenommen, wie das nachstehende Diagramm zeigt.



Datenquelle: https://www.mkdiscpress.de/ratgeber/chronik-der-speichermedien/ [20.11.2019].

Der durchschnittliche Preis für eine Film-DVD wird durch die Funktion P in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert.

$P(t) = a \cdot b^t + 11$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2002
$P(t)$ … durchschnittlicher Preis für eine Film-DVD zur Zeit t in Euro

1) Ermitteln Sie a und b so, dass P für die Jahre 2002 und 2011 den durchschnittlichen Preis für eine Film-DVD im jeweiligen Jahr laut obigem Diagramm ergibt.

a = ________________________________

b = ________________________________

Fahrradtour* (b) - 2_113, FA5.2 FA1.4, Offenes Antwortformat Offenes Antwortformat

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.
$p(30) - p(20) \approx -2{,}8$

Flächenverbauung * (A_331)

b) Die Fläche, die für landwirtschaftliche Nutzung verwendet wird, wird als Agrarfläche bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung der Agrarfläche Österreichs kann modellhaft durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2017
$N(t)$ ... Agrarfläche Österreichs zur Zeit t in Hektar
N_0 ... Agrarfläche Österreichs zu Beginn des Jahres 2017 in Hektar

1) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell die Agrarfläche Österreichs um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein wird.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die relative Änderung der Agrarfläche Österreichs für jedes Zeitintervall [0; T] berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$-0{,}005 \cdot T$	☐
$1 - 0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T$	☐
$0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T - 1$	☐

Bienenhaltung in Österreich* (2_131)

c) Niedrige Temperaturen führen zu einer Wintersterblichkeit von Bienenvölkern. Die Anzahl der Bienenvölker würde ohne eine erneute Aufzucht durch die Imker/innen jährlich um durchschnittlich 16 % abnehmen.

Die Anzahl der Bienenvölker in Österreich, die es ohne eine erneute Aufzucht geben würde, wird durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

Es gilt:
t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015
$g(t)$ ... Anzahl der Bienenvölker in Österreich zur Zeit t

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von g auf.

$g(t) =$ ________________________________

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeitdauer sich die Anzahl der Bienenvölker in Österreich gemäß der Exponentialfunktion g halbiert.

Pilzkultur * (B_603)

c) Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Masse einer bestimmten Pilzkultur 1,4 g. Jeden Tag verdoppelt sich die Masse dieser Pilzkultur.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen nach Beginn der Beobachtung die Masse dieser Pilzkultur erstmals mehr als 7 kg beträgt.

Raucherentwöhnung * (A_338)

b) Durch das Rauchen von Zigaretten gelangt Nikotin in den Körper und wird dort abgebaut.

Die zeitliche Entwicklung der Nikotinmenge im Körper kann durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

t ... Zeit seit dem Konsum der letzten Zigarette in h
$N(t)$ ... Nikotinmenge im Körper zur Zeit t in mg
N_0, a ... positive Parameter

Für eine bestimmte Person gilt:
Unmittelbar nach dem Konsum der letzten Zigarette ($t = 0$) befinden sich 20 mg Nikotin im Körper.
2 h später befinden sich noch 9,5 mg Nikotin im Körper.

1) Ermitteln Sie den Parameter a.

2) Berechnen Sie die Halbwertszeit für den Abbau von Nikotin bei dieser Person.

All Star Level

Flugreisen* (2_128)

a) Die jährliche Anzahl aller Fluggäste in Österreich ist von 0,14 Millionen im Jahr 1955 auf 28,95 Millionen im Jahr 2017 gestiegen.

Diese zeitliche Entwicklung der Anzahl der Fluggäste in Österreich kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion $N: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $N(t) = a \cdot b^t$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1955, $N(t)$ in Millionen Fluggästen).

1) Berechnen Sie a und b.

Im Jahr 2018 gab es in Österreich 31,73 Millionen Fluggäste.

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste abweicht.

Kompensationsprüfungsaufgaben

AHS Juni 2022 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a) In einem einfachen Modell wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl Österreichs durch die Exponentialfunktion N beschrieben.

$N(t) = 8{,}35 \cdot 1{,}0064^t$

t ... Zeit ab dem Jahresbeginn 2010 in Jahren
$N(t)$ ... Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t in Millionen

1) Geben Sie das jährliche prozentuelle Wachstum der Bevölkerungszahl gemäß diesem Modell an.

2) Berechnen Sie die Zeit t_1, nach der die Bevölkerung Österreichs gemäß diesem Modell gegenüber dem Jahresbeginn 2010 um ein Viertel zugenommen hat.

AHS Juni 2022 Kompensationsprüfung 5 Aufgabe 2

a) Thomas misst die Höhe des Bierschaums nach dem Einschenken in ein bestimmtes Glas. In der nachstehenden Tabelle sind seine Messergebnisse angegeben.

Zeit nach dem Einschenken in s	0	20	60
Höhe des Bierschaums in cm	4	2,5	2

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe des Bierschaums für die ersten 60 Sekunden nach dem Einschenken. Geben Sie das Ergebnis mit der dazugehörigen Einheit an.

Die Höhe des Bierschaums soll durch eine Exponentialfunktion h der Form $h(t) = a \cdot b^t$ beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Einschenken in s
$h(t)$ ... Höhe des Bierschaums zum Zeitpunkt t in cm

2) Zeigen Sie, dass es keine Exponentialfunktion h dieser Form gibt, auf deren Graphen alle 3 Messergebnisse liegen.

BHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 8 Aufgabe 3

b) Auch ein Hund wurde von Milben befallen.

Ohne Therapie verdoppelt sich die Anzahl der Milben jeweils in einem Zeitraum von T Tagen.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils das zutreffende Satzende aus A bis D zu.

Im Zeitintervall $[0; 2 \cdot T]$	
Im Zeitintervall $\left[0; \frac{T}{2}\right]$	

A	erhöht sich die Anzahl der Milben um 100 %.
B	halbiert sich die Anzahl der Milben.
C	vervierfacht sich die Anzahl der Milben.
D	erhöht sich sich die Anzahl der Milben um etwa 41 %.

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a) Die Funktion N beschreibt modellhaft die Anzahl der Personen, die eine Internetplattform nutzen, in Abhängigkeit von der Zeit t.

$N(t) = 3000 \cdot 1{,}22^t$

t ... Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn
$N(t)$ ... Anzahl der Personen, die diese Internetplattform zum Zeitpunkt t nutzen

1) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit für die Anzahl der Personen, die diese Internetplattform nutzen.
2) Stellen Sie die Funktionsgleichung von N in der Form $N(t) = a \cdot e^{\lambda \cdot t}$ auf.

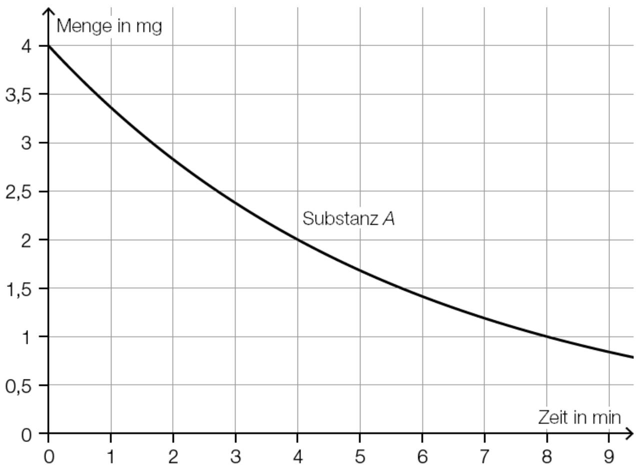
Mit dem nachstehenden Ausdruck soll die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Personen, die diese Internetplattform innerhalb der ersten 6 Jahre nutzen, berechnet werden.

$$\frac{3000 \cdot 1{,}22^{\boxed{}} - \boxed{}}{\boxed{} - 0}$$

3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 3

a) Der in der nachstehenden Abbildung dargestellte Graph beschreibt den exponentiellen Zerfall der Substanz A.



Die Substanz B hat dieselbe Anfangsmenge wie die Substanz A.
Die Halbwertszeit der Substanz B ist halb so groß wie die Halbwertszeit der Substanz A.

1) Zeichnen Sie in die obige Abbildung den Graphen für den exponentiellen Zerfall der Substanz B ein.

b) Der Zerfall der Substanz C lässt sich durch die Funktion f beschreiben.

$f(t) = a \cdot b^t$

t ... Zeit in min
$f(t)$ ... vorhandene Menge der Substanz C zum Zeitpunkt t in mg

Die Substanz C hat eine Halbwertszeit von 30 min.
Zum Zeitpunkt t_1 ist nur mehr 1 % der Anfangsmenge von C vorhanden.

1) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1.

Für den Zerfall der radioaktiven Substanz C im Zeitintervall [0; 5] gilt:

$\frac{f(5) - f(0)}{f(0)} \approx -0{,}11$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungen

Grundkompetenzen

Lösungserwartung: Funktionsterm* - 1_841, FA5.5, Offenes Aantwortformat

$f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$

oder:

$f(x) = 3 \cdot 1{,}5^{x-1}$

Lösungserwartung: Dicke einer Bleiplatte* - 1_672, FA5.5, Offenes Antwortformat

Mögliche Vorgehensweise:
$0{,}1 = 0{,}95^x \quad \Rightarrow \quad x \approx 44{,}9$ mm

Lösungserwartung: Änderungsprozess* - 1_599, FA5.5, Offenes Antwortformat

Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☒

Lösungserwartung: Exponentialfunktion* - 1_575, FA5.5, Offenes Antwortformat

Mögliche Vorgehensweise:
$f(x) = c \cdot a^x \Rightarrow f(0) = c = 12$
$f(4) = 12 \cdot a^4 = 192 \Rightarrow a = 2$
$f(x) = 12 \cdot 2^x$

Lösungserwartung: Ausbreitung eines Ölteppichs* - 1_483, FA5.5, Offenes Antwortformat

$1{,}5 \cdot 1{,}05^d = 2 \Rightarrow d = 5{,}896... \Rightarrow$ Nach 6 Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km^2.

Lösungserwartung: Exponentialfunktion* - 1_435, FA5.5, Offenes Antwortformat

$f(x) = 25 \cdot 0{,}8^x$

oder:

$f(x) = 25 \cdot e^{\ln(0{,}8) \cdot x}$

Lösungserwartung: Wirkstoff* - 1_696, FA5.5, Offenes Antwortformat

mögliche Vorgehensweise:
$0{,}9^4 = 0{,}6561$

65,61 % der Anfangsmenge

Lösungserwartung: Wachstum* - 1_340, FA5.5, Offenes Antwortformat

$f(2) = 900$
$f(3) = 1350$

Lösungserwartung: Exponentialfunktion* - 1_648, FA5.5, Offenes Antwortformat

$\lambda = \ln(2)$

Lösungserwartung: Zellkulturen* - 1_624, FA5.5, Offenes Antwortformat

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	F
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	E
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	A
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	B

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0{,}15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0{,}5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0{,}85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1{,}5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1{,}85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

Lösungserwartung: Wachstum einer Population* - 1_531, FA5.5, Offenes Antwortformat

$p \approx 12{,}6\ \%$

Lösungserwartung: Eigenschaften einer Exponentialfunktion* - 1_459, FA5.5, Offenes Antwortformat

Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] streng monoton steigend.	☒
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	☒

Lösungserwartung: Parameter von Exponentialfunktionen* - 1_482, FA5.5, Offenes Antwortformat

①	
$c > d$	☒

②	
$a < b$	☒

Lösungserwartung: Exponentialfunktion* - 1_387, FA5.5, Offenes Antwortformat

$b = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Lösungserwartung: Funktion mit einer besonderen Eigenschaft* - 1_720, FA5.5, Offenes Antwortformat

mögliche Funktionsgleichung:
$f(x) = 3^x$

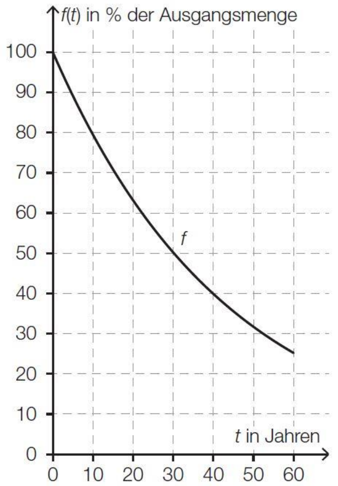
Lösungserwartung: Exponentialfunktion* - 1_339, FA5.5, Offenes Antwortformat

$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	☒
$f(x+1) = a \cdot f(x)$	☒

Lösungserwartung: Halbwertszeiten von Zerfallsprozessen* - 1_840, FA5.5, Offenes Antwortformat

$\tau_3 < \tau_1 < \tau_2$

Lösungserwartung: Halbwertszeit* - 1_816, FA5.5, Offenes Antwortformat



Lösungserwartung: Halbwertszeit* - 1_792, FA5.5, Offenes Antwortformat

10 mg

Lösungserwartung: Anzahl von Tieren* - 1_768, FA5.5, Offenes Antwortformat

mögliche Vorgehensweise:

$1{,}018^n = 2$
$n = 38{,}8... \approx 39$

Zeitdauer: ca. 39 Jahre

Lösungserwartung: Verzinsung* - 1_744, FA5.5, Offenes Antwortformat

mögliche Vorgehensweise:

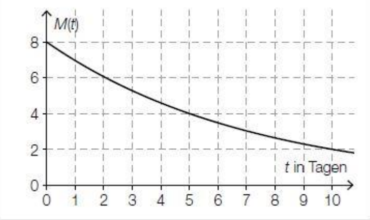
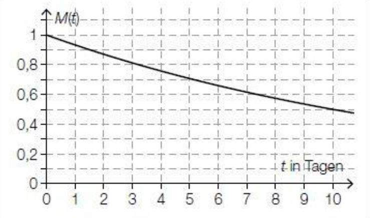
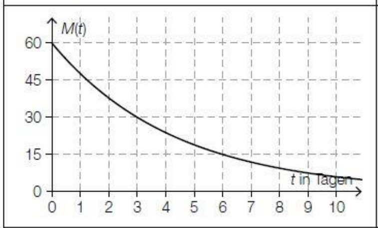
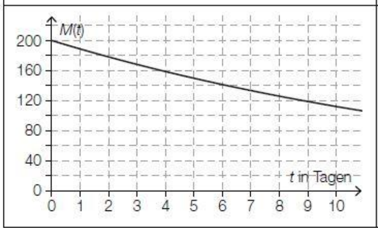
$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}01^n$
$2 = 1{,}01^n$
$\ln(2) = \ln(1{,}01) \cdot n$
$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}01)} = 69{,}66... \approx 69{,}7$

Das Kapital K_0 verdoppelt sich nach ca. 69,7 Jahren.

Lösungserwartung: Halbwertszeit* - 1_649, FA5.5, Offenes Antwortformat

$t_H \approx 9{,}64$ Stunden

Lösungserwartung: Halbwertszeiten* - 1_600, FA5.5, Offenes Antwortformat

	D
	E
	C
	F

A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Lösungserwartung: Dicke einer Bleischicht* - 1_576, FA5.5, Offenes Antwortformat

$d = 1{,}2$ cm

Lösungserwartung: Halbwertszeit von Cobalt-60* - 1_554, FA5.5, Offenes Antwortformat

Mögliche Berechnung:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-0{,}13149 \cdot t} \Rightarrow t \approx 5{,}27$$

Die Halbwertszeit von Cobalt-60 beträgt ca. 5,27 Jahre.

Lösungserwartung: Bienenbestand* - 1_507, FA5.5, Offenes Antwortformat

Mögliche Berechnung:

$N_0 \cdot 0{,}5 = N_0 \cdot a^{14}$
$0{,}5 = a^{14} \Rightarrow a \approx 0{,}9517$

täglicher relativer Bestandsverlust: 4,83 %

Lösungserwartung: Technetium* - 1_411, FA5.5, Offenes Antwortformat

Es dauert 12,02 Stunden.

Lösungserwartung: Halbwertszeit* - 1_1189, FA1.4, Lückentext

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☒
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☒

Lösungserwartung: Bevölkerungszahl* - 1_889, FA1.4, Lückentext

Die Bevölkerungszahl nahm jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ der Bevölkerungszahl des jeweiligen Vorjahres zu.	☒
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☒

Lösungserwartung: Körperliche Leistungsfähigkeit* - 1_888, FA1.4, Lückentext

t ... Jahre ab dem Alter von 55 Jahren

$1650 = 1800 \cdot a^5$
$a = 0{,}9827...$
$1200 = 1800 \cdot 0{,}9827...^t$
$t = 23{,}29...$

Ab einem Alter von rund 78,3 Jahren wird Lena voraussichtlich höchstens 1200 Punkte erreichen.

Lösungserwartung: Grippeerkrankungen* - 1_1230, AN1.3, 1 aus 6

$\sqrt[11]{2} = 1{,}0650...$

Prozentsatz: rund 6,5 %

Lösungserwartung: Baumhöhe* - 1_1254, FA4.3, Offenes Antwortformat

$f(t) = a \cdot b^t$
$f(10) = 2{,}2$ und $f(15) = 2{,}7$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 1{,}46...$

Der Baum war zum Zeitpunkt des Einpflanzens rund 1,5 m hoch.

Lösung: Jahreszinssatz* (1_1278)

$1{,}0862 = (1 + i)^6$
$i = 0{,}0138...$

Lösung: Exponentialfunktionen* (1_1298)

f hat keine Nullstellen.	☒
Der Graph von f ist positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☒

Lösung: Verdoppelungszeit* (1_1302)

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 1-mal pro Stunde.	C
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 2-mal pro Stunde.	B
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 3-mal pro Stunde.	F
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 4-mal pro Stunde.	D

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$

Lösung: Aufrufe eines Videos* (1_1326)

$t_1 = 8{,}99...$

Rookie Level

Medikamentenabbau (1) * (A_251) Lösung

a) Es liegt nahe, für die Beschreibung des Medikamentenabbaus ein exponentielles Modell zu wählen, weil sich die Menge in gleichen Zeitabständen (von 2 h) jeweils um den gleichen Faktor (0,6) verkleinert.

$N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$
$60 = 100 \cdot e^{k \cdot 2}$

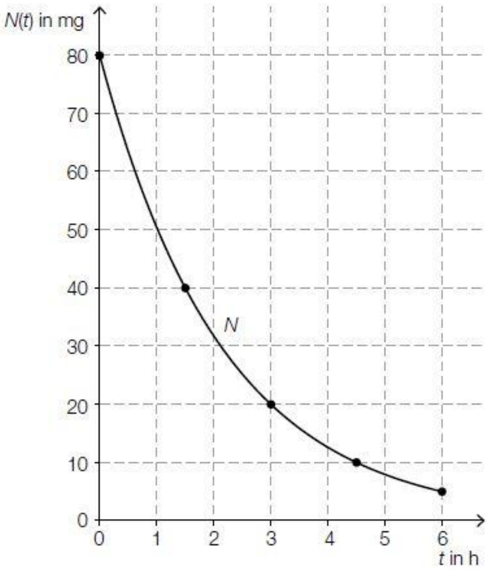
$k = \frac{\ln(0{,}6)}{2} = -0{,}25541... \approx -0{,}2554$

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2554 \cdot t}$

t ... Zeit in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

$N(3) = 46{,}4...$
Zur Zeit $t = 3$ h sind rund 46 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

b)



c)

Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☒

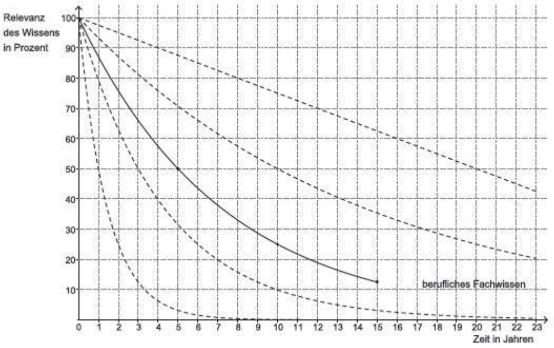
d) $200 \cdot 0{,}15 = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

$t = \frac{\ln(0{,}15)}{-0{,}3} = 6{,}32...$

Nach rund 6,3 Stunden muss das Medikament wieder verabreicht werden.

Halbwertszeit des Wissens * (A_159) Lösung

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow t = 19{,}9... \approx 20$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

Impfen und Auffrischen * (A_269) Lösung

a1) $A(t) = 110 \cdot 0{,}8^t$

t ... Zeit in Jahren
$A(t)$ ... Antikörperwert zur Zeit t in IE/L

a2) $A(t) = 10$

oder:

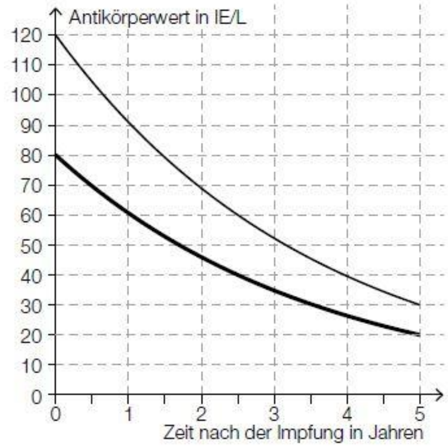
$110 \cdot 0{,}8^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 10{,}745...$

Bei Anna ist der Impfschutz nach etwa 10,75 Jahren nicht mehr gegeben.

b1) $T_{1/2} = 2{,}5$ Jahre
Toleranzbereich: [2,3; 2,7]

b2)



Bevoelkerungsentwicklung * (A_218) Lösung

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$ *oder:* $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4524 = 10068 \cdot a^{33} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}976...$ $\qquad$ $4524 = 10068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}024...$

$N_3(t) = 10068 \cdot 0{,}976...^t$ $\qquad$ $N_3(t) = 10068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Sonnenaufgang* (A_284) Lösung

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

Luftverschmutzung * (A_075) Lösung

c1)

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☒

Kfz-Bestand (2) * (B_302) Lösung

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

Flüssigkeitsbehälter * (A_063) Lösung

c1) Es wird diejenige Füllzeit berechnet, zu der sich 900 L Flüssigkeit im Flüssigkeitsbehälter befinden.

Pflanzenwachstum * (A_292) Lösung

c1) $H = H_0 \cdot 1{,}005^{10}$

oder:

$H = H_0 \cdot 1{,}0511...$

Sozialausgaben (2) * (B_482) Lösung

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

Sicherheit auf dem Schulweg * (A_293) Lösung

c1) Beschreibung des Einflusses des Parameters b auf das Monotonieverhalten:
$b < 1$ ... f ist streng monoton fallend
$b > 1$ ... f ist streng monoton steigend

c2) Es wurde fälschlich $b^0 = 0$ angenommen.

Streaming * (B_501) Lösung

a1) $N(t) = 1\,000 \cdot 1{,}2^t$

a2) $N(7) = 3\,583{,}1...$

Zur Zeit $t = 7$ nutzen rund 3583 Kunden das Angebot.

a3) $N(t) = 8\,000$ *oder* $1\,000 \cdot 1{,}2^t = 8\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 11{,}40...$

Leuchtdioden * (A_305) Lösung

c1) $20 = a^{10} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[10]{20} = 1{,}349...$

c2) Der maximale Lichtstrom von LEDs nimmt laut diesem Modell pro Jahr um rund 35 % (bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahrs) zu.

Obst * (A_320) Lösung

c1) $A_0 = A(0) = 28\,000$

$15\,000 = 28\,000 \cdot e^{-k \cdot 45}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$k = 0{,}01387...$

c2) Die Obstanbaufläche im Jahr 2005 ist um rund 46 % kleiner als jene im Jahr 1960.

Sonnenblumen * (A_329) Lösung

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$
$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$

b2) $4 = 1{,}1135...^t$
$t = \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}1135...)}$
$t = 12{,}88...$
Die Höhe der Sonnenblume vervierfacht sich jeweils in rund 12,9 Tagen.

Lösung: Käse * (A_341)

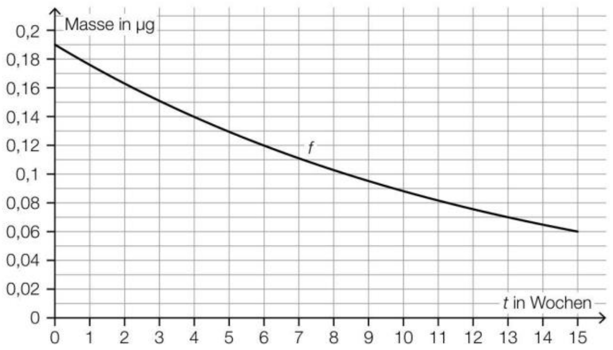
a1) $f(t) = a \cdot b^t$

$a = 0{,}19$

$f(15) = 0{,}06$ *oder* $0{,}19 \cdot b^{15} = 0{,}06$
$b = \sqrt[15]{\frac{0{,}06}{0{,}19}} = 0{,}926...$

$f(t) = 0{,}19 \cdot 0{,}926...^t$
oder:
$f(t) = 0{,}19 \cdot e^{-0{,}0768... \cdot t}$

a2)



a3) Da das Volumen zuerst abnimmt, aber zwischen der 2. und 15. Woche wieder zunimmt, kann der Zusammenhang nicht durch ein lineares Modell beschrieben werden.

Auch eine rechnerische Überprüfung (z. B. mittels Geradengleichung oder Berechnung der Differenzenquotienten) ist als richtig zu werten.

Pro Level

Baumkronenpfad * (A_230) Lösung

b) maximale Auslenkung: 0,17 m
Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$c = f(0) = 0{,}2$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

Epidemie * (A_255) Lösung

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
$N_0 = 1$
$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$
$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ *oder* $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

Die Genussformel * (A_263) Lösung

a) $G(n) = 1$:
$e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}} = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 3$

Unter Wasser * (A_178) Lösung

b) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5 000 Lux.
Toleranzbereich: [19,5; 20,5]
$f(x) = a \cdot b^x$
$a = 50\,000$
$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$
$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

Medikamentenabbau (2) (A_231) Lösung

a) Mithilfe dieser Gleichung wird ermittelt, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Wirkstoffmenge nur noch die Hälfte vorhanden ist (Halbwertszeit).

Mit $N_0 = 50$ und $t = 0$ für 18:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge vor Einnahme der 2. Tablette $= N(4) = 50 \cdot e^{-0{,}231 \cdot 4} = 19{,}846...$
Mit $N_0 = 19{,}846... + 50 = 69{,}846...$ und $t = 0$ für 22:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge um 4:00 Uhr $= N(6) = 69{,}846... \cdot e^{-0{,}231 \cdot 6} = 17{,}466...$

Um 4:00 Uhr hat der Passagier noch rund 17,47 mg des Wirkstoffs im Blut.

b) Bei der Versuchsreihe für A handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben prozentuellen Wert (nämlich um 10 %) abnimmt. Die Versuchsreihe für B kann durch ein lineares Modell beschrieben werden, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben konstanten Wert (nämlich um 0,75 mg/L) abnimmt.

$W(t) = 30 - 0{,}75 \cdot t$

t … Zeit in Stunden (h)
$W(t)$ … Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg/L

Cobalt-60 (B_076) Lösung

a) $I(x) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

$I(5{,}3) = 50 \Rightarrow 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 5{,}3} = 50 \Rightarrow \lambda = 0{,}13078\ldots$

$I(x) = 100 \cdot e^{-0{,}13078\ldots \cdot x}$ (bzw. $I(x) = 100 \cdot 0{,}87740\ldots^{x}$)

$I(x) = 5 \Rightarrow 100 \cdot e^{-0{,}13078\ldots \cdot x} = 5 \Rightarrow x = 22{,}90\ldots$

$\frac{22{,}90\ldots}{2} = 11{,}4\ldots$

Man benötigt 12 jeweils 2 cm dicke Platten.

Allergie (B_289) Lösung

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

t ... Zeit in Stunden nach der Einnahme

$N(t)$ ... Menge des Wirkstoffs zur Zeit t

$0{,}001 = a^{48} \Rightarrow a = \sqrt[48]{0{,}001} = 0{,}8659\ldots$

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8659\ldots^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}1439\ldots \cdot t}$

$0{,}5 = 0{,}8659\ldots^t \Rightarrow t = 4{,}816\ldots$

Die Halbwertszeit beträgt rund 4,82 Stunden.

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152) Lösung

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

b) $A(t) = 8{,}402 \cdot 1{,}003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011

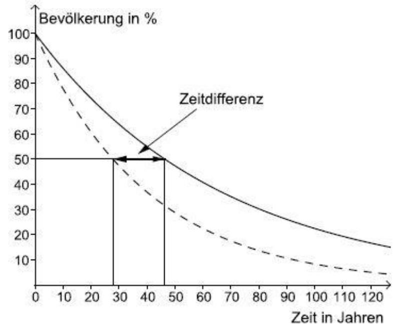
$A(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$8{,}402 \cdot 1{,}003^t = 10$

$t \approx 58{,}13$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



Koffein (A_199) Lösung

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Umformung liefert $\lambda = 0{,}4621$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t}$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a:
$0{,}5 = a^{1{,}5}$
$a = 0{,}62996$

$N(t) = 80 \cdot 0{,}62996^t$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

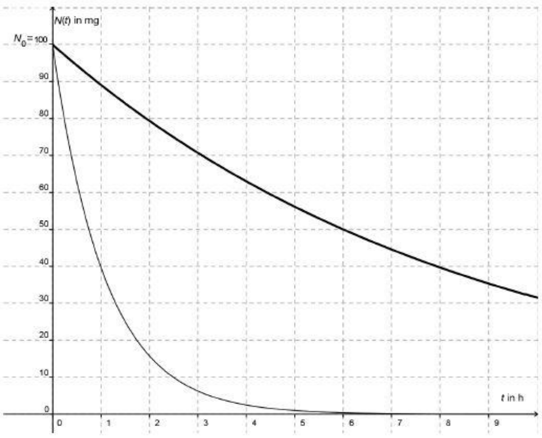
b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:
$t = 4$ h
$N_0 = 80$ mg
$N(4) = 80 \cdot 0{,}39685^4 = 1{,}98424$

90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:
$t = 2{,}5$ h
$N_0 = 90$ mg
$N(2{,}5) = 90 \cdot 0{,}39685^{2{,}5} = 8{,}92911$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: 1,98424 + 8,92911= 10,91335

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0{,}39685^{0{,}5}$

$$N_0 = \frac{500}{0{,}39685^{0{,}5}} = 793{,}7$$

$$\frac{793{,}7}{80} = 9{,}921$$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Vernetzte Welt * (A_245) Lösung

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$F_0 = 5{,}5$
$820 = 5{,}5 \cdot a^6 \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{820}{5{,}5}} = 2{,}30272\ldots \approx 2{,}3027$
$F(t) = 5{,}5 \cdot 2{,}3027^t$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1{,}5} = 8\right)$.

$2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

WhatsApp * (B_356) Lösung

a) $A(t) = A_0 \cdot a^t$

$A_0 = 9{,}3$

$32 = 9{,}3 \cdot a^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{\frac{32}{9{,}3}} = 1{,}85495\ldots$

$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot a^T \;\Rightarrow\; T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = 1{,}121\ldots$

Die Anzahl der Nutzer/innen verdoppelt sich gemäß diesem Modell in jeweils rund 1,12 Jahren.

$A(1) = 17{,}25\ldots \approx 17{,}3$

Diesem Modell zufolge hätte es zu Beginn des Jahres 2013 in diesem Land rund 17,3 Millionen Nutzer/innen gegeben. Die Abweichung vom tatsächlichen Wert (20 Millionen) ist größer als 1 Million, daher eignet sich das Modell hier nicht gut.

Lebensversicherung (B_119) Lösung

a) 1. Gleichung: $0{,}088 = p_0 \cdot a^{30} \;\Rightarrow\; p_0 = \frac{0{,}088}{a^{30}}$

2. Gleichung: $2 \cdot 0{,}088 = p_0 \cdot a^{39} \;\Rightarrow\; p_0 = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}}$

Gleichsetzen: $\frac{0{,}088}{a^{30}} = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}} \;\Rightarrow\; a = \sqrt[9]{2} \approx 1{,}0801$

$p_0 = 0{,}00873\ldots \approx 0{,}0087$

Gleichung der Funktion:

$p(t) = 0{,}0087 \cdot 1{,}0801^t$ (Parameter gerundet)

Vitamin C * (A_281) Lösung

a1) $N(t) = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$0{,}8 \cdot 18 = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}$

$\lambda = \frac{\ln(0{,}8)}{-4} = 0{,}05578\ldots \approx 0{,}0558$

$N(t) = 18 \cdot e^{-0{,}0558 \cdot t}$

oder:

$N(t) = 18 \cdot 0{,}8^{\frac{t}{4}}$

t ... Zeit nach der Ernte in Wochen

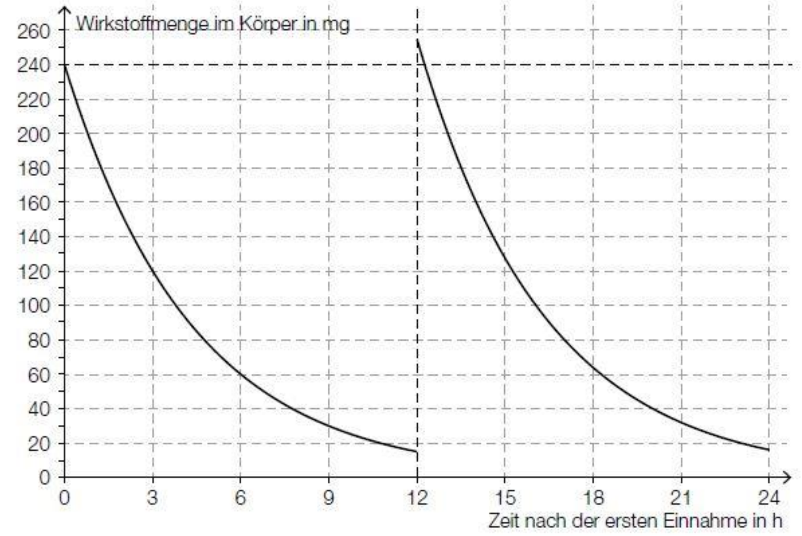
$N(t)$ ... Vitamin-C-Gehalt zur Zeit t in mg

a2) $N(36) = 2{,}41\ldots$

Der Apfel hat 36 Wochen nach der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von rund 2,4 mg.

Medikamentenabbau (3) * (A_278) Lösung

a1)



b1) Bei Verwendung des exponentiellen Modells sinkt die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge theoretisch niemals auf null ab. Nach 24 Stunden sind 8 Halbwertszeiten vergangen, d. h., ein Anteil von $\left(\frac{1}{2}\right)^8 > 0$ befindet sich noch im Blut.

c1) Modellierung durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden und einer Startmenge von 480 mg:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$240 = 480 \cdot a^3$

$a = 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}79370...$

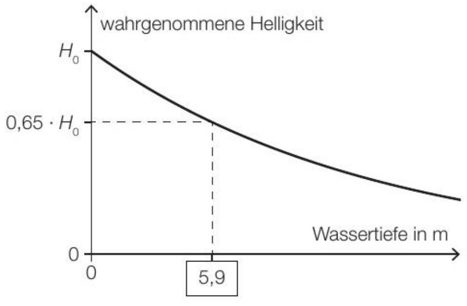
$N(t) = 480 \cdot a^t$

Berechnung des Wirkungszeitraums:

$50 = 480 \cdot a^t$
$t = 9{,}7...$

Helligkeit (A_125) Lösung

c)



(Wert gerundet)

Flugzeuge (A_126) Lösung

c) $f(t) = 3$ bzw. $5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9 = 3$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$t = 59{,}0\ldots$
Im Jahr 2019 beträgt der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km.

Gemäß der Funktion f nähert sich der Kerosinverbrauch mit zunehmender Zeit immer mehr dem Wert 2,9. Dieser Wert wird aber nie erreicht oder unterschritten.

Lichtverhältnisse (A_118) Lösung

b)

exponentielles Wachstum	C
exponentielle Abnahme	B

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

W-LAN * (B_475) Lösung

b1) $a = \sqrt[45]{\frac{10}{500}} = 0{,}9167\ldots$

$500 = c \cdot a^5 \quad \Rightarrow \quad c = 772{,}2\ldots$

b2)

Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☒

Rund um die Heizung * (A_140) Lösung

b1) $T(0) = 18$

Um 15 Uhr beträgt die Raumtemperatur 18 °C.

b2) $T(1) = 21$ *oder* $24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot 1} = 21$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = \ln(2) = 0{,}693\ldots$

Sonnenlicht und Vitamin D * (A_300) Lösung

b1) $30 = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot 60} \quad \Rightarrow \quad N_0 = 84{,}7\ldots$
Die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn muss (mindestens) rund 85 ng/ml betragen.

b2)

Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☒

Desinfektion * (B_530) Lösung

a1) $a = \sqrt[10]{\frac{3000}{30000}} = 0{,}7943...$

$30000 = c \cdot a^{70}$
$c = 3 \cdot 10^{11}$

$f(x) = 3 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}7943...^x$

a2) $f(90) = 300$
Ja, der Funktionswert an der Stelle 90 entspricht dem in der Tabelle angegebenen Wert.

a3) 10 min = 600 s
$f(x) = 600$

oder:

$3 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}7943...^x = 600$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 86{,}9...$
Bei einer Temperatur von rund 87 °C beträgt die benötigte Einwirkzeit 10 Minuten.

Winterdienst * (A_315) Lösung

c1) $f(x) = a \cdot b^x$
$a = 100$
$20 = 100 \cdot b^{1000}$
$b = 0{,}99839...$
$f(x) = 100 \cdot 0{,}99839...^x$

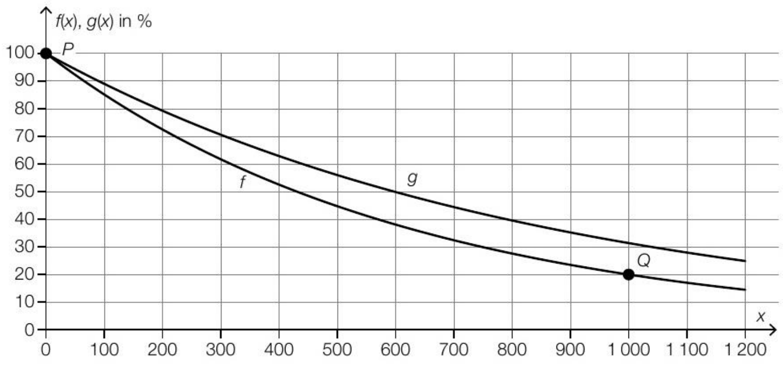
oder:

$f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$a = 100$
$20 = 100 \cdot e^{\lambda \cdot 1000}$
$\lambda = -0{,}001609...$
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}001609... \cdot x}$

c2) $f(x) = 10$ *oder* $100 \cdot 0{,}99839...^x = 10$
$x = 1430{,}6...$
Nach rund 1431 Fahrzeugen befinden sich nur mehr 10 % der gestreuten Salzmenge auf der Straße.

Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, das Ergebnis auf eine ganze Zahl gerundet anzugeben.

c3)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass der Graph der Exponentialfunktion g durch die Punkte (0|100) und (600|50) geht.

Lösungserwartung: Koffein* (c) - 2_101, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

b1) $f(T+10) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot (T+10)} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot 1{,}648... = f(T) \cdot 1{,}648...$

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.

b2) Die Lösung der Gleichung ist die Temperaturerhöhung, bei der sich die Löslichkeit von Koffein in Wasser jeweils verdoppelt („Verdoppelungstemperatur").

oder:

Die Lösung der Gleichung ist diejenige Temperatur, bei der die Löslichkeit von Koffein in Wasser doppelt so hoch ist wie bei einer Temperatur von 0 °C.

Lösungserwartung: Speichermedien* (c) - 2_108, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

c1) $P(0) = 20{,}1 \quad \Rightarrow \quad a + 11 = 20{,}1$

$P(9) = 11{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b^9 + 11 = 11{,}1$

$a = 9{,}1$

$b = \sqrt[9]{\frac{0{,}1}{9{,}1}} = 0{,}60579...$

Lösungserwartung: Fahrradtour* (b) - 2_113, AG2.4 AG2.5, Offenes Antwortformat

b1) $p(x) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}0...$

$p(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60{,}0...$

größtmögliches Intervall: $[20{,}0...; 60{,}0...]$

b2) Der für einen 30 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck ist um rund 2,8 bar geringer als der für einen 20 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck.

Lösung: Flächenverbauung * (A_331)

b1) $0{,}95 = 0{,}995^t$

$\frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}995)} = 10{,}2...$

Nach etwa 10 Jahren wird die Agrarfläche Österreichs gemäß diesem Modell um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein.

b2)

$0{,}995^T - 1$	☒

Lösung: Bienenhaltung in Österreich* (2_131)

c1) $g(t) = 347\,128 \cdot 0{,}84^t$

c2) $0{,}5 = 0{,}84^t$

$t = 3{,}9...$

Die Zeitdauer beträgt rund 4 Jahre.

Lösung: Pilzkultur * (B_603)

c1) $7\,000 = 1{,}4 \cdot 2^t$

$t = 12{,}28...$

Nach rund 12,3 Tagen beträgt die Masse der Pilzkultur erstmals mehr als 7 kg.

Lösung: Raucherentwöhnung * (A_338)

b1) $9{,}5 = 20 \cdot a^2$
$a = 0{,}689...$

b2) $N(t) = \frac{N_0}{2}$ *oder* $20 \cdot 0{,}689...^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 1{,}86...$

Die Halbwertszeit beträgt etwa 1,9 h.

All Star Level

Lösung: Flugreisen* (2_128)

a1) $a = 0{,}14$

$b = \sqrt[62]{\frac{28{,}95}{0{,}14}} = 1{,}089...$

a2) $\frac{31{,}73 - N(63)}{31{,}73} = 0{,}0056... = 0{,}56...\ \%$

Die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 weicht um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste ab.

Kompensationsprüfungsaufgaben

AHS Juni 2022 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a1) 0,64 %

a2) $1{,}25 \cdot 8{,}35 = 8{,}35 \cdot 1{,}0064^{t_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 34{,}97...$

Nach rund 35 Jahren hat die Bevölkerung Österreichs um ein Viertel zugenommen.

AHS Juni 2022 Kompensationsprüfung 5 Aufgabe 2

a1) $\frac{2-4}{60-0} = -0{,}0\dot{3}$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund –0,03 cm/s.

a2) $4 \cdot b^{20} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{\frac{2{,}5}{4}} = 0{,}976...$

$4 \cdot b^{60} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[60]{\frac{2}{4}} = 0{,}988...$

Da die Änderungsfaktoren nicht gleich sind, gibt es keine Exponentialfunktion dieser Form, auf deren Graphen alle 3 Messergebnisse liegen.

BHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 8 Aufgabe 3

b1)

Im Zeitintervall $[0; 2 \cdot T]$	C
Im Zeitintervall $\left[0; \frac{T}{2}\right]$	D

A	erhöht sich die Anzahl der Milben um 100 %.
B	halbiert sich die Anzahl der Milben.
C	vervierfacht sich die Anzahl der Milben.
D	erhöht sich sich die Anzahl der Milben um etwa 41 %.

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a1) $6000 = 3000 \cdot 1{,}22^t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3{,}48...$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 3,5 Jahre.

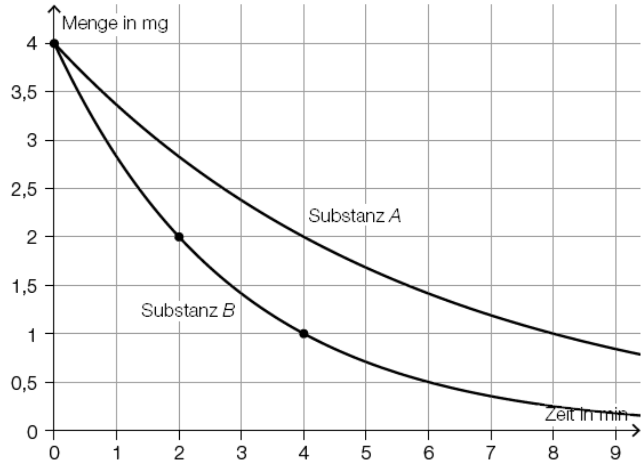
a2) $\ln(1{,}22) = 0{,}1988...$

$N(t) = 3000 \cdot e^{0{,}199 \cdot t}$ *(Koeffizient gerundet)*

a3) $\frac{3000 \cdot 1{,}22^{\boxed{6}} - \boxed{3000}}{\boxed{6} - 0}$

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 3

a1)



Der Graph der Substanz B muss linksgekrümmt (positiv gekrümmt) sein und durch die Punkte (0|4), (2|2) *und* (4|1) *verlaufen.*

b1) $f(30) = 0{,}5 \cdot f(0)$ *oder* $a \cdot b^{30} = 0{,}5 \cdot a \cdot b^0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$b = 0{,}9771...$

$f(t_1) = 0{,}01 \cdot f(0)$ *oder* $a \cdot b^{t_1} = 0{,}01 \cdot a \cdot b^0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 199{,}3...$

Nach rund 199 min ist nur mehr 1 % der Anfangsmenge vorhanden.

b2) Die Menge der radioaktiven Substanz *C* nimmt im Zeitintervall [0; 5] um rund 11 % ab.