Aufgabensammlung

Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und Geraden

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

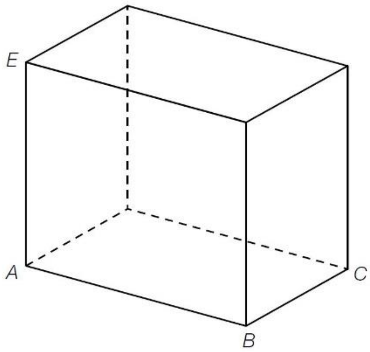
Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Vektoren in R3

Grundkompetenzen

Eckpunkte eines Quaders* - 1_689, AG3.2, Konstruktionsformat

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte A, B, C und E sind beschriftet.



Für weitere Eckpunkte R, S und T des Quaders gilt:

$R = E + \overrightarrow{AB}$

$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$

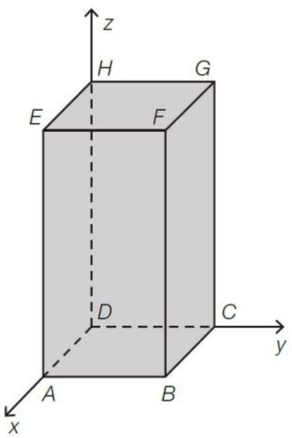
$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte R, S und T!

Quader mit quadratischer Grundfläche* - 1_562, AG3.2, Offenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der xy-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 5 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 10 Längeneinheiten. Der Eckpunkt D liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt C liegt auf der positiven y-Achse.

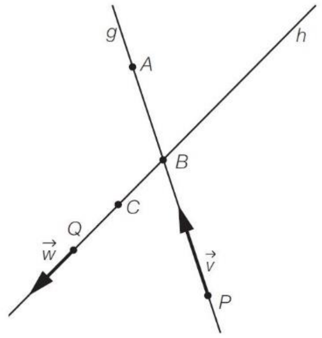
Der Eckpunkt E hat somit die Koordinaten $E = (5|0|10)$.



Geben Sie die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\overrightarrow{HB}$ an!

Parameterdarstellung von Geraden* - 1_833, AG3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt die beiden Geraden g und h. Auf jeder der Geraden sind drei Punkte gekennzeichnet: $A, B, P \in g$ bzw. $B, C, Q \in h$.
Zusätzlich ist von jeder Geraden ein Richtungsvektor dargestellt.



Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, bei denen $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \neq 0$ und $t \neq 0$ so gewählt werden können, dass die jeweilige Aussage wahr ist. *[2 aus 5]*

$A = C + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☐
$B = C + s \cdot \vec{v}$	☐
$B = Q + t \cdot \vec{w}$	☐
$A = P + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☐
$C = P + t \cdot \vec{w}$	☐

Normalvektoren* - 1_393, AG3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die auf $\vec{a}$ normal stehen.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

Normalvektoren* - 1_466, AG3.3, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

z_b = ______________________________

Parameterdarstellung* - 1_810, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g\colon\ X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie t so, dass $X = B$ gilt.

Geraden in R2* - 1_786, AG3.4, 2 aus 5

Für die zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^2$ gilt:

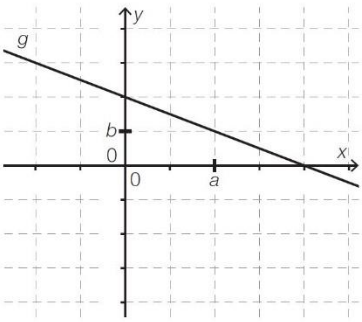
- Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{g}$ hat den Normalvektor $\vec{n}_g$.
- Die Gerade h mit dem Richtungsvektor $\vec{h}$ hat den Normalvektor $\vec{n}_h$.
- Die Geraden g und h stehen normal aufeinander.

Kreuzen Sie die beiden Bedingungen an, die auf jeden Fall gelten.

$\vec{n}_g \cdot \vec{h} = 0$	☐
$\vec{n}_g \cdot \vec{n}_h = 0$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{h}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{n}_h$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} \cdot \vec{n}_h = 0$	☐

Skalierung der Koordinatenachsen* - 1_762, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem, dessen Achsen unterschiedlich skaliert sind, ist eine Gerade g dargestellt. Auf der x-Achse ist a und auf der y-Achse ist b markiert. Dabei sind a und b ganzzahlig.
Die Gerade g wird durch $y = -2 \cdot x + 4$ beschrieben.



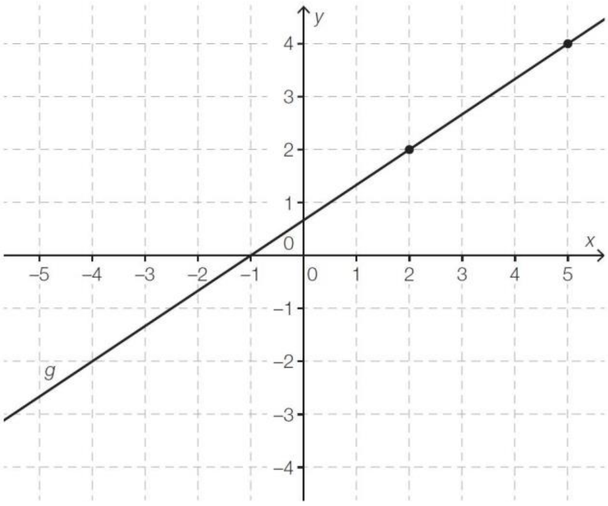
Geben Sie a und b an.

a = ______________________________

b = ______________________________

Parallele Gerade durch einen Punkt* - 1_738, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem ist eine Gerade g abgebildet. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden g haben ganzzahlige Koordinaten.



Geben Sie eine Parameterdarstellung einer zu g parallelen Geraden h durch den Punkt $(3|-1)$ an.

$h: X =$ ______________________________

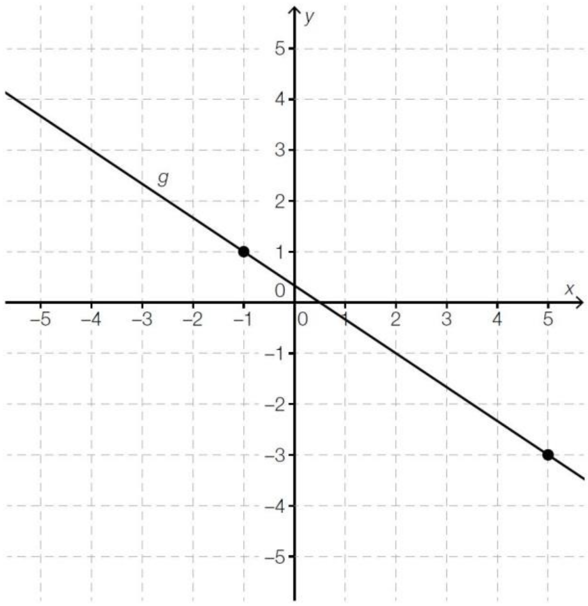
Gleichung einer Geraden aufstellen* - 1_713, AG3.4, Offenes Antwortformat

Die Punkte $A = (7|6)$, $M = (-1|7)$ und $N = (8|1)$ sind gegeben.
Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A und steht normal auf die Verbindungsgerade durch die Punkte M und N.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_690, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist eine Gerade g dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden g haben ganzzahlige Koordinaten.



Vervollständigen Sie folgende Parameterdarstellung der Geraden g durch Angabe der Werte für a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$!

$g: X = \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$a =$ ______________________________

$b =$ ______________________________

Parallele Geraden* - 1_665, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden $g\colon X = P + t \cdot \vec{u}$ und $h\colon X = Q + s \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Welche der nachstehend angeführten Aussagen sind unter der Voraussetzung, dass die beiden Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind, stets zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P = Q$	☐
$P \in h$	☐
$Q \notin g$	☐
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	☐
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	☐

Zur x-Achse parallele Gerade* - 1_642, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Geben Sie einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ so an, dass die Gerade g parallel zur x-Achse verläuft!

$\vec{a}$ = ______________________________

Parallelität von Geraden* - 1_561, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden h so, dass die Gerade h zur Geraden g parallel ist!

Parallele Gerade* - 1_537, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Koordinatenursprung.

Geben Sie die Gleichung der Geraden h in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ an!

h: ______________________________

Geradengleichung* - 1_514, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben.

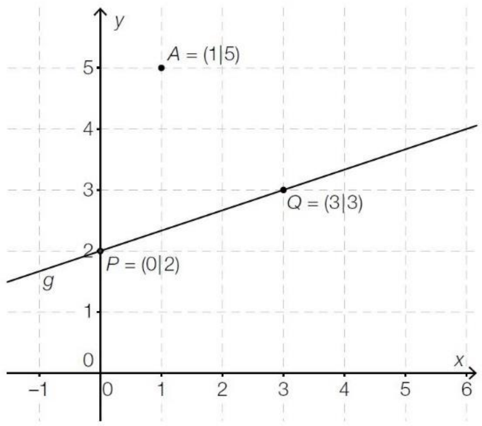
Geben Sie mögliche Werte der Parameter a und b so an, dass die durch die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ gegebene Gerade h normal zur Geraden g ist!

a = ______________________________

b = ______________________________

Gleichung einer Geraden* - 1_465, AG3.4, Offenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung sind eine Gerade g durch die Punkte P und Q sowie der Punkt A dargestellt.



Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die durch A verläuft und normal zu g ist!

Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse* - 1_442, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x-Achse an!

$S =$ ______________________________

Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_418, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.

Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g\colon X =$ ____

Geradengleichung* - 1_392, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung $2 \cdot x - 5 \cdot y = -6$.

Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die durch den Punkt $(0|0)$ geht und zur Geraden g parallel ist!

Parallele Geraden* - 1_345, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben sind Gleichungen der Geraden g und h. Die beiden Geraden sind nicht identisch.

$$g\colon y = -\frac{x}{4} + 8$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Begründen Sie, warum diese beiden Geraden parallel zueinander liegen!

Parameterdarstellung von Geraden* - 1_369, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben ist eine Gerade g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Geraden h_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) mit $t_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) sind parallel zu g?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

$h_1\colon X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_2\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_3\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$h_4\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$h_5\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐

Punkt einer Geraden* - 1_1181, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben sind die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ mit $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,
und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

Berechnen Sie a.

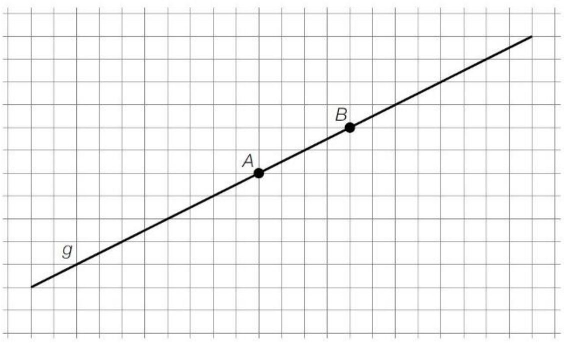
$a =$ ____________________

Punkt auf einer Geraden* - 1_882, AG3.4, Konstruktionsformat

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B und kann durch $g\colon X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Für den Punkt $C \in g$ gilt: $t = -1{,}5$.

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt C ein.



Normale Geraden* - 1_1225, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Parameterdarstellung der Geraden g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Für eine Gerade n gilt:

- n steht normal auf g.
- n schneidet g im Punkt $P = (2|-4|9)$.

Stellen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden n in Parameterdarstellung auf.

$n\colon X =$ ____

Zwei Geraden im Raum* - 1_1248, AG3.4, Lückentext

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

- $g\colon X = A + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$
- $h\colon X = B + s \cdot \vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Falls ______①______ gilt, sind die Geraden g und h auf jeden Fall ______②______.

①	
$A \notin h$ und $\vec{a} = \vec{b}$	☐
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☐
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $B \notin g$	☐

②	
schneidend	☐
identisch	☐
windschief	☐

Geradengleichungen* (1_1272) - AG3.4 - Halboffenes Antwortformat

Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Die Geraden g und h sind identisch.

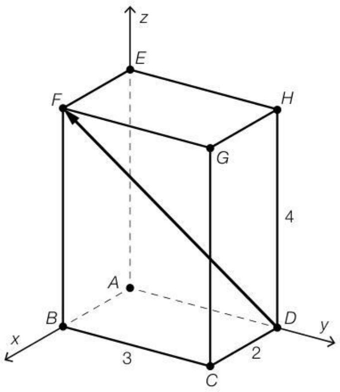
Ermitteln Sie die reellen Zahlen a und b.

$a =$ ____

$b =$ ____

Quader* (1_1295) - AG3.2 - Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader *ABCDEFGH* in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt. Die Längen der Kanten des Quaders können aus der Abbildung entnommen werden (Angaben in Zentimetern).



Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{DF}$ an.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Paralleler Vektor* (1_1320) - AG3.3 - Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor $\vec{b}$ soll zum Vektor $\vec{a}$ parallel sein und eine größere Länge als $\vec{a}$ haben.

Geben Sie die Komponenten eines möglichen Vektors $\vec{b}$ an.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

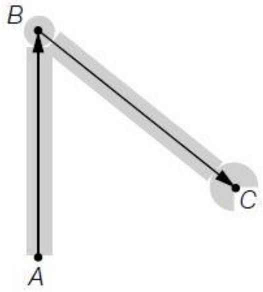
Rookie Level

Drohnen (B_362)

b) Bei der Fertigung von Drohnen werden Roboterarme eingesetzt.

Ein zweiteiliger Arm eines Roboters lässt sich am Computer durch zwei Vektoren beschreiben, die durch die Punkte $A = (1|1|1)$, $B = (3|4|5)$ und $C = (5|2|-1)$ festgelegt sind (Maße in m).

– Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Roboterarmen.



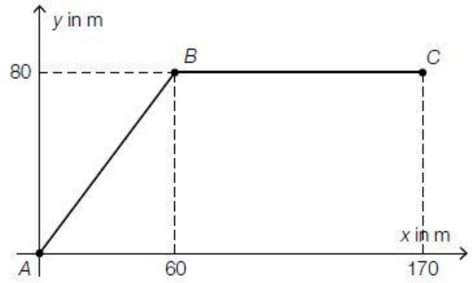
Roboter (2) * (B_345)

c) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1|-2|3)$ zum Punkt $D = (5|-3|2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10|-4|0)$.

– Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

Kraefte * (B_406)

a) Durch eine Kraft $\vec{F}_{\text{Zug}} = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix}$ Newton (N) wird eine Last von A nach B und danach von B nach C gezogen (siehe nachstehende Skizze).



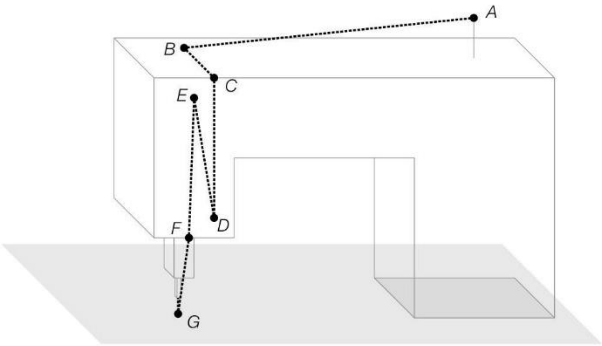
– Berechnen Sie die durch die Kraft $\vec{F}_{\text{Zug}}$ an der Last verrichtete Arbeit.

b) Drei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 700 \end{pmatrix}$ N, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 700 \\ -400 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F}_3$ greifen an einem Körper in einem Punkt an und halten einander das Gleichgewicht, d. h.: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

– Berechnen Sie $\vec{F}_3$.
– Berechnen Sie den Betrag von $\vec{F}_3$.
– Ermitteln Sie denjenigen Winkel, den $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ einschließen.

Nähmaschine * (B_591)

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft eine Nähmaschine. Die gepunktete Linie stellt den Verlauf des Fadens von der Spule im Punkt A bis zur Nadel im Punkt G dar.



Es gilt:
$A = (-4|35|25)$, $B = (x_B|y_B|20)$, $D = (1|3|10)$, $E = (2|1|18)$, $F = (1|0|8)$
(Alle Koordinaten sind in Zentimetern angegeben.)

Der Faden läuft vom Punkt A entlang der Geraden g mit $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Punkt B.

1) Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes B.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

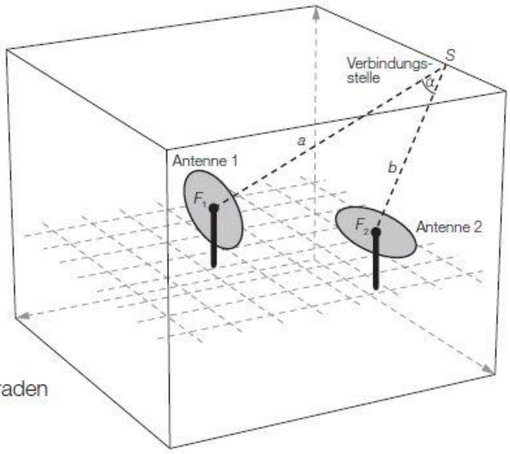
Der Faden läuft geradlinig vom Punkt D zum Punkt E und geradlinig weiter zum Punkt F.

3) Berechnen Sie die Länge des Fadens vom Punkt D bis zum Punkt F.

Pro Level

Richtfunk (B_375)

a) Ein Richtstrahl, der entlang der Geraden a verläuft, wird vom Punkt $F_1 = (-50|-40|0)$ (Angaben in Metern) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ gesendet.



– Stellen Sie eine Gleichung der Geraden a in Parameterform auf.

Ein Richtstrahl, der von F_2 aus gesendet wird, verläuft entlang der Geraden

$b: X = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts S, in dem die beiden Richtstrahlen auf die Verbindungsstelle treffen.

– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die beiden Richtstrahlen miteinander einschließen.

Elektromagnetische Strahlung * (B_487)

c) Der sogenannte *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, der bei Berechnungen mit elektromagnetischen Wellen verwendet wird.

Dabei gilt:

$\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$

$\vec{E}, \vec{B}$ ... Vektoren in $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen

k ... Konstante, $k > 0$

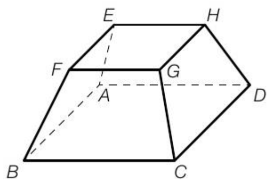
1) Geben Sie an, wie groß der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{B}$ ist.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu $\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ äquivalent ist. *[1 aus 5]*

$k = \dfrac{\vec{S}}{\vec{B} \times \vec{E}}$	☐
$k \cdot \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	☐
$-\vec{S} = k \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$	☐
$\dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{S}} = k$	☐
$\vec{S} = -k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$	☐

Grundstuecke und Gebaeude * (B_537)

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Betonsockel modellhaft dargestellt.



Bei der Darstellung des Modells in einem Koordinatensystem werden folgende Punkte verwendet:

$B = (12|6|2)$, $C = (2|26|2)$, $D = (-10|20|0)$,
$E = (-1{,}5|5{,}5|15{,}5)$, $F = (4{,}5|8{,}5|16{,}5)$, $G = (-0{,}5|18{,}5|16{,}5)$

Die Grundfläche *ABCD* ist rechteckig.

1) Weisen Sie nach, dass die Kante *BC* parallel zur Kante *FG* ist. *[0/1 P.]*

2) Zeigen Sie, dass das Viereck *EFGH* im Punkt *F* einen rechten Winkel hat. *[0/1 P.]*

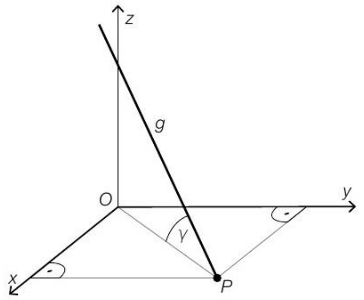
3) Berechnen Sie denjenigen Winkel, den die Kante *BF* mit der Diagonalen *BD* einschließt. *[0/1 P.]*

Landung eines Flugzeugs * (B_544)

a) Ein Flugzeug steuert beim Landeanflug den Punkt $P = (13\,200|23\,100|0)$ an. Die Flugbahn des Flugzeugs wird näherungsweise durch die Gerade g mit dem Parameter λ beschrieben. (Alle Angaben in Metern.)

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,500 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{b}$$

Die nachstehende Abbildung zeigt schematisch den Verlauf dieses Landeanflugs.



1) Berechnen Sie einen Richtungsvektor $\vec{b}$. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den spitzen Winkel γ. *[0/1 P.]*

All Star Level

Flugrouten (B_051)

Zwei Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigem Kurs.
Das erste Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s im Ursprung des gewählten Koordinatensystems, zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s ist es in $P = (7|-4|8)$.
Das zweite Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s in $Q = (1|21|-12)$ und zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s in $R = (4|12|-3)$.
Für alle Koordinatenangaben gilt: 1 Einheit entspricht 10 m.

a) – Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf, die die jeweiligen Positionen der Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit t beschreiben.
– Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden.
(Zu zeigen ist, dass die beiden Kurse einander nicht zum gleichen Zeitpunkt schneiden.)

b) – Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das erste Flugzeug fliegt.
– Erklären Sie, was man über die Modellierung der Geschwindigkeit und der Richtung eines Flugzeugs sagen kann, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Flugzeugs mit einer reellen Zahl $k \neq 0$, $|k| < 1$ multipliziert wird.

Kompensationsprüfungsaufgaben

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 8 Aufgabe 2

Zwei Flugzeuge fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Flugstrecken können in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Das erste Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_1.
Um 10:00 Uhr befindet es sich im Punkt $(-100|100|6)$.
Um 10:30 Uhr befindet es sich im Punkt $(200|-80|6)$.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_1 der Form $g_1: X = P + t \cdot \vec{g}_1, t \in \mathbb{R}$ auf. Dabei gibt $t \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

Leitfrage:

Das zweite Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_2 mit $g_2: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Dabei gibt $s \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden und begründen Sie, warum es zu keinem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 5 Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ und $h: X = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie b so, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden normal aufeinander stehen.

Leitfrage:

Die beiden aufeinander normal stehenden Geraden g und h schneiden einander im Punkt S.

– Ermitteln Sie a.

– Ermitteln Sie die Koordinaten von S.

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Geraden

$$f\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie a und b so, dass die Geraden f und g identisch sind.

Leitfrage:

Der Punkt $F = (-1|2|2)$ liegt auf der Geraden f. Der Punkt $H = (1|c|2)$ liegt auf der Geraden h.

Die Geraden f und h schneiden einander, wenn $\overrightarrow{FH} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $u, v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt.

– Ermitteln Sie c so, dass die Geraden f und h einander schneiden.

AHS Oktober 2020 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 1

Die drei Flugzeuge F_1, F_2 und F_3 fliegen in einem bestimmten Zeitraum in der gleichen Höhe. Ihre Flugbahnen können in diesem Zeitraum mithilfe der drei Geraden f_1, f_2 bzw. f_3 modelliert werden.

Dabei gilt: $f_1\colon X = A + r \cdot \vec{v}_1$ mit $r \in \mathbb{R}^+$
$f_2\colon X = B + s \cdot \vec{v}_2$ mit $s \in \mathbb{R}^+$
$f_3\colon X = C + u \cdot \vec{v}_3$ mit $u \in \mathbb{R}^+$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Flugzeug F_1 im Punkt $A = (a|40)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $B = (-30|20)$. Die Geschwindigkeitsvektoren der Flugzeuge sind gegeben durch $\vec{v}_1 = \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.
Die Parameter r, s und u geben jeweils die Flugdauer in Minuten ab dem Zeitpunkt $t = 0$ an. Die Geschwindigkeit der Flugzeuge wird in km/min angegeben.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie, für welche Werte von a und b die Flugbahnen von F_1 und F_2 identisch sind.

Leitfrage:

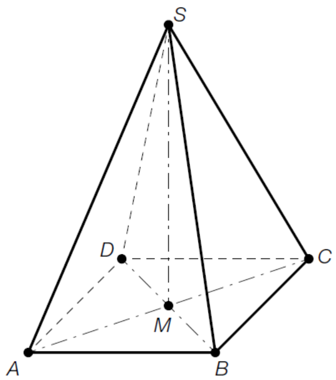
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Flugzeug F_3 im Punkt $C = (-20|40)$.

– Ermitteln Sie in diesem Fall den Wert von b so, dass die Flugbahnen von F_2 und F_3 einander rechtwinkelig schneiden.

– Ermitteln Sie den Schnittpunkt S dieser Flugbahnen und begründen Sie, warum es zwischen den beiden Flugzeugen keine Kollision gibt.

AHS Oktober 2020 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 1

Das Quadrat $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt M bildet die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



Es gilt: $A = (0|0|0)$, $C = (8|4|1)$, $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze S.

Leitfrage:

Es gilt: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ y_1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $y_1 \in \mathbb{Z}$

– Ermitteln Sie y_1.
– Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte B und D an.

AHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 7 Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden Geraden g und h:

$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$h: X = B + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ mit $B = (0|a|b)$ und $u, a, b, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Abhängig von der Wahl von c ergeben sich unterschiedliche Lagebeziehungen von g und h.

– Geben Sie für die möglichen Lagebeziehungen an, welche Werte c jeweils annehmen kann.

Leitfrage:

Die Geraden g und h verlaufen beide durch den Punkt $S = (5|-5|8)$.

– Geben Sie für diesen Fall c in Abhängigkeit von b an.

$c =$ ______________________________

– Geben Sie an, welche Voraussetzung in diesem Fall für b gelten muss, wenn S der einzige gemeinsame Punkt der Geraden g und h sein soll.

AHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 1

Eine Gerade g verläuft durch die beiden Punkte $A = (1|7|3)$ und $B = (6|-7|1)$.

Aufgabenstellung:

Für den Punkt C gilt: $C = (x_C|1|-3)$

– Ermitteln Sie alle Werte für die Koordinate x_C des Punktes C so, dass die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ einen rechten Winkel einschließen.

Leitfrage:

Für den Punkt D gilt: $D = (x_D|y_D|-3)$

– Ermitteln Sie die Koordinaten x_D und y_D des Punktes D so, dass der Punkt D auf der Geraden g liegt.

– Geben Sie an, in welchem Verhältnis der Punkt B die Strecke $\overline{AD}$ teilt, und begründen Sie Ihre Aussage.

AHS Mai 2019 Kompensationsprüfung 4 Aufgabe 1

Gegeben sind Parameterdarstellungen der beiden Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit $r, s, y \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche gegenseitigen Lagebeziehungen (identisch; parallel, aber nicht identisch; schneidend; windschief) zwischen den beiden Geraden g und h möglich sind! Nennen Sie dabei jeweils den passenden Wert für die Koordinate y!

Leitfrage:

Gegeben sind Parameterdarstellungen der beiden Geraden $a: X = A + u \cdot \vec{a}$ und $b: X = B + v \cdot \vec{b}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$.

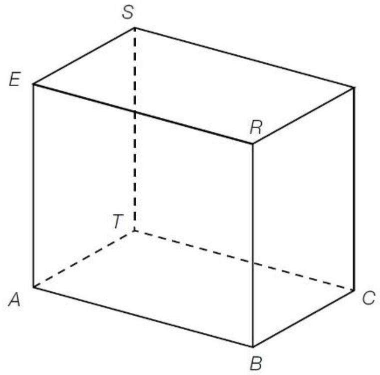
Erläutern Sie für jede der beiden nachstehenden Beziehungen, welche Rückschlüsse jeweils über die Lagebeziehung der beiden Geraden g und h zueinander getroffen werden können!

- Es gilt: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ und $\overrightarrow{AB} = \mu \cdot \vec{a}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Es gilt: $A \in b$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Lösungen

Grundkompetenzen

Lösungserwartung: Eckpunkte eines Quaders* - 1_689, AG3.4, Offenes Antwortformat



Lösungserwartung: Quader mit quadratischer Grundfläche* - 1_562, AG3.4, Offenes Antwortformat

$\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung von Geraden* - 1_833, AG3.4, Offenes Antwortformat

$A = C + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☒
$B = Q + t \cdot \vec{w}$	☒

Lösungserwartung: Normalvektoren* - 1_393, AG3.4, Offenes Antwortformat

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	☒

Lösungserwartung: Normalvektoren* - 1_466, AG3.4, Offenes Antwortformat

$z_b = -9$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung* - 1_810, AG3.4, Offenes Antwortformat

$t = 1$

Lösungserwartung: Geraden in R2* - 1_786, AG3.4, Offenes Antwortformat

$\vec{n}_g \cdot \vec{n}_h = 0$	☒
$\vec{g} = r \cdot \vec{n}_h$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☒

Lösungserwartung: Skalierung der Koordinatenachsen* - 1_762, AG3.4, Offenes Antwortformat

$a = 1$
$b = 2$

Lösungserwartung: Parallele Gerade durch einen Punkt* - 1_738, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Gleichung einer Geraden aufstellen* - 1_713, AG3.4, Offenes Antwortformat

$g: 3 \cdot x - 2 \cdot y = 9$

oder:

$g: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_690, AG3.4, Offenes Antwortformat

$a = -4$
$b = -2$

Lösungserwartung: Parallele Geraden* - 1_665, AG3.4, Offenes Antwortformat

$Q \notin g$	☒
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☒

Lösungserwartung: Zur x-Achse parallele Gerade* - 1_642, AG3.4, Offenes Antwortformat

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungserwartung: Parallelität von Geraden* - 1_561, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h_y = -2$
$h_z = -4$

Lösungserwartung: Parallele Gerade* - 1_537, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h\colon\ 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0$

Lösungserwartung: Geradengleichung* - 1_514, AG3.4, Offenes Antwortformat

Mögliche Werte der Parameter:

$a = 3$
$b = -5$

Lösungserwartung: Gleichung einer Geraden* - 1_465, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h\colon 3x + y = 8$

oder:

$h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse* - 1_442, AG3.4, Offenes Antwortformat

Mögliche Berechnung:

$$\begin{cases} 1 + t = x \\ -5 + 7t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{5}{7},\ x = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow\ S = \left(\frac{12}{7} \middle| 0\right)$$

Lösungserwartung: Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_418, AG3.4, Offenes Antwortformat

$$g\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Lösungserwartung: Geradengleichung* - 1_392, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h\colon 2 \cdot x - 5 \cdot y = 0$

oder:

$h\colon y = \frac{2}{5} \cdot x$

Lösungserwartung: Parallele Geraden* - 1_345, AG3.4, Offenes Antwortformat

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung bzw. parallele Richtungsvektoren.

$k_g = -\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{a_h} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ folgt $k_h = k_g$

oder

$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Somit ist $\overrightarrow{a_g} = \overrightarrow{a_h}$.

Oder:

Auch eine Begründung mit Normalvektoren ist möglich.

$g\colon x + 4y = 32$
$h\colon x + 4y = 16$

Somit ist $\overrightarrow{n_g} \parallel \overrightarrow{n_h}$.

oder

$\overrightarrow{n_g} \cdot \overrightarrow{a_h} = 0$

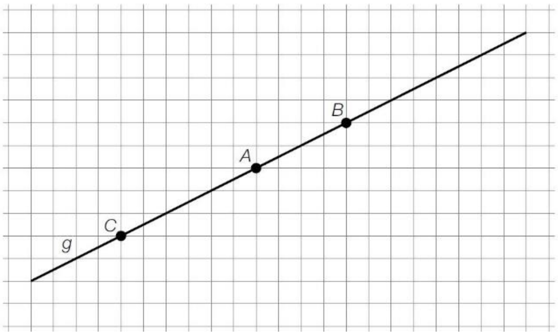
Lösungserwartung: Parameterdarstellung von Geraden* - 1_369, AG3.4, Offenes Antwortformat

$h_2\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒
$h_4\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☒

Lösungserwartung: Punkt einer Geraden* - 1_1181, AG1.1, 2 aus 5

$a = -11$

Lösungserwartung: Punkt auf einer Geraden* - 1_882, AG1.1, 2 aus 5



Lösungserwartung: Normale Geraden* - 1_1225, WS2.2, Halboffenes Antwortformat

z. B. $n: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungserwartung: Zwei Geraden im Raum* - 1_1248, AG3.4, Lückentext

①	
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☒

②	
schneidend	☒

Lösung: Geradengleichungen* (1_1272)

$a = 2$
$b = 1$

Lösung: Quader* (1_1295)

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Paralleler Vektor* (1_1320)

möglicher Vektor:

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{-2} \\ \boxed{6} \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{b}$ muss ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ sein, der Betrag des Proportionalitätsfaktors muss größer als 1 sein. Jeder Vektor $\vec{b}$ der Form $\vec{b} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|k| > 1$ ist daher richtig.

Rookie Level

Drohnen (B_362) Lösung

b) $\cos(\varphi) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}\right)$$

$\varphi = 43{,}292\ldots° \approx 43{,}29°$

Roboter (2) * (B_345) Lösung

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\cos(\boldsymbol{\varphi}) = \dfrac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi} = 8{,}205\ldots° \approx 8{,}21°$

Der Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde, beträgt rund 8,21°.

Kraefte * (B_406) Lösung

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix} = 26\,800 + 28\,600 = 55\,400$

Die Arbeit beträgt 55 400 Nm.

b) $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -700 \\ -900 \\ -300 \end{pmatrix}$ N

$|\vec{F}_3| = 1\,178{,}9\ldots \text{ N} \approx 1\,179 \text{ N}$

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2|}\right) = 104{,}49\ldots° \approx 104{,}5°$

Der Ergänzungswinkel auf 360° ist ebenfalls als richtig zu werten.

Lösung: Nähmaschine * (B_591)

a1) Gleichung der *z*-Koordinate: $20 = 25 + \lambda \cdot 5$
$\lambda = -1$

$x_B = -4 - 2 = -6$; $y_B = 35 - 32 = 3$
$B = (-6|3|20)$

a2) Die beiden Vektoren stehen normal aufeinander.

a3) $|\overrightarrow{DE}| + |\overrightarrow{EF}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = 18{,}40\ldots$

Die Länge des Fadens vom Punkt *D* bis zum Punkt *F* beträgt rund 18,4 cm.

Pro Level

Richtfunk (B_375) Lösung

a) Gerade a: $X = \begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunkts der beiden Richtstrahlen:

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

I: $-50 + 16 \cdot s = 15 + 15{,}5 \cdot t$
II: $-40 + 12 \cdot s = 12 + 10 \cdot t$
III: $15 \cdot s = 45 \cdot t$

I: $16 \cdot s - 15{,}5 \cdot t = 65$
II: $12 \cdot s - 10 \cdot t = 52$
III: $15 \cdot s - 45 \cdot t = 0$

Ermitteln von s und t aus I und II: $s = 6$, $t = 2$
Einsetzen in III: $15 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 0$

$S = (46|32|90)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2} \cdot \sqrt{15{,}5^2 + 10^2 + 45^2}}$$

$\alpha = 30{,}925\ldots°$

Elektromagnetische Strahlung * (B_487) Lösung

c1) Der Winkel zwischen $\vec{S}$ und $\vec{B}$ beträgt 90°.

c2)

$-\vec{S} = k \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$	☒

Grundstuecke und Gebaeude * (B_537) Lösung

a1) $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{FG}$ Die beiden Kanten sind daher parallel.

a2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-5) + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 0 = 0$

Das Viereck $EFGH$ hat daher im Punkt F einen rechten Winkel.

a3) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 2{,}5 \\ 14{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -22 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BF}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}\right) = 66{,}67\ldots°$$

Landung eines Flugzeugs * (B_544) Lösung

a1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ -1\,500 \end{pmatrix}$

Auch ein Richtungsvektor, der ein Vielfaches des angegebenen Richtungsvektors ist, ist als richtig zu werten.

a2) $\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{b}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}\right) = 3{,}22...°$

All Star Level

Flugrouten (B_051) Lösung

a) $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$

$g_1: X = t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$g_2: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$7 \cdot t = 1 + 3 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$

$-4 \cdot t = 21 - 9 \cdot t \Rightarrow t = \frac{21}{5}$

$8 \cdot t = -12 + 9 \cdot t \Rightarrow t = 12$

Anhand der verschiedenen Werte für t sieht man, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden.

Andere richtige Argumentationen sind ebenfalls möglich.

b) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$\Delta s = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 10 \cdot \sqrt{49 + 16 + 64} = 113{,}57\ldots \text{ m}$

$v = \frac{113{,}57\ldots \text{ m}}{3 \text{ s}} = 37{,}85\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 136 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$k \cdot \vec{v}$: $0 < k < 1$ … die Geschwindigkeit ist kleiner
$-1 < k < 0$ … die Geschwindigkeit ist kleiner und das Flugzeug fliegt in die entgegengesetzte Richtung

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 8 Aufgabe 2

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$g_1\colon X = \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameterdarstellung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$s = 5,\ t = 15 \quad \Rightarrow \quad S = (50\,|\,10\,|\,6)$

Das erste Flugzeug ist um 10:15 Uhr im Punkt S, das zweite Flugzeug um 10:05 Uhr.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Schnittpunkts S richtig berechnet werden und eine richtige Begründung angegeben wird.

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 5 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -10 - 2 + 3 \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn b richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-1 - 2 \cdot s = a + 5 \cdot t$
$4 + s = 5 - 2 \cdot t$
$5 + 3 \cdot s = -2 + 4 \cdot t$
$\Rightarrow \quad s = -1;\ t = 1;\ a = -4$

Durch Einsetzen von $s = -1$ in g (bzw. $t = 1$ in h) erhält man $S = (1\,|\,3\,|\,2)$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und S richtig ermittelt werden.

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = 3$

oder:

Damit f und g identisch sind, müssen die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ b-2 \end{pmatrix}$ parallel sein.

$\Rightarrow \quad a = 2,\ b = 3$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\begin{pmatrix} 2 \\ c-2 \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2 = 2 \cdot u + v$
$c - 2 = -u + 2 \cdot v$
$0 = u + v$

$\Rightarrow \quad u = 2,\ v = -2$
$\Rightarrow \quad c = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn c richtig ermittelt wird.

AHS Oktober 2020 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Lösungsweg:

$f_1\colon X = \begin{pmatrix} a \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

$f_2\colon X = \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = -5$

$\begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 2,\ a = -50$

$a = -50$
$b = -5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Werte von a und b richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

$\begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}5; s = 3 \quad \Rightarrow \quad S = (-15|35)$

Es gibt keine Kollision, da die jeweilige Flugdauer bis zum Punkt S (mit $u = 0{,}5$ min bzw. $s = 3$ min) unterschiedlich lang ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Parameters b und der Schnittpunkt S richtig ermittelt werden und eine richtige Begründung erfolgt.

AHS Oktober 2020 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$M = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = (4|2|0{,}5)$

$S = M + \overrightarrow{MS} = (7|-10|24{,}5)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten von S richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$-4 \cdot 8 + 4 \cdot y_1 + 4 = 0$

$y_1 = 7$

$g: X = M + t \cdot \overrightarrow{BD}$

$g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Komponente y_1 richtig ermittelt und eine richtige Gleichung der Geraden g angegeben wird, wobei „$t \in \mathbb{R}$“ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

AHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 7 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für $c = -6$ sind die Geraden g und h identisch oder parallel.
Für $c \neq -6$ sind die Geraden schneidend oder windschief.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die möglichen gegenseitigen Lagen von g und h einschließlich der jeweils richtigen Werte für c angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -2{,}5$$

$b - 2{,}5 \cdot c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}4 \cdot b - 3{,}2$

$b \neq -7$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn c richtig in Abhängigkeit von b angegeben wird und richtig angegeben wird, dass b in diesem Fall den Wert -7 nicht annehmen darf.

AHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 1

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 - x_C \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 - x_C \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_C^2 - 7 \cdot x_C - 18 = 0$$

$\Rightarrow \quad x_C = -2$ bzw. $x_C = 9$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Werte für x_C richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$z_D = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = 3 - 2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 3$

$x_D = 1 + 5 \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_D = 16$

$y_D = 7 - 14 \cdot t \quad \Rightarrow \quad y_D = -35$

Der Punkt B teilt die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis 1 : 2.

mögliche Begründung:

$t = 3 \quad \Rightarrow \quad D = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}$

Der Punkt D ist also dreimal so weit vom Punkt A entfernt wie der Punkt B.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Koordinaten richtig ermittelt werden und ein richtiges Verhältnis mit einer richtigen Begründung angegeben wird.

AHS Mai 2019 Kompensationsprüfung 4 Aufgabe 1

mögliche Lagebeziehungen:

Die Geraden g und h sind identisch, wenn $y = 3$ ist.
Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt $(1|2|3)$, wenn $y \neq 3$ ist.

- Da die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinander sind, müssen die Geraden a und b parallel sein. Da zusätzlich der Vektor zwischen den beiden Punkten A und B ein Vielfaches des Richtungsvektors von a ist, müssen die beiden Geraden a und b identisch sein.
- Da der Punkt A auf beiden Geraden liegt und das Skalarprodukt der Richtungsvektoren der beiden Geraden null ist, schneiden einander die Geraden a und b im Punkt A rechtwinkelig.