Aufgabensammlung

Rotationsvolumen

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

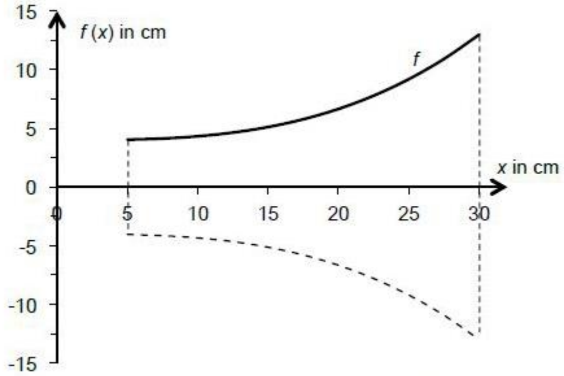
Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Rotationsvolumen

Rookie Level

Der Schall (B_067)

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.



Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Hydraulik (B_287)

b) Für die Modellierung eines speziellen Gehäuses eines Hydraulikzylinders wird die Funktion f verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1 \cdot x + 0{,}35} - 0{,}85$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Längeneinheiten

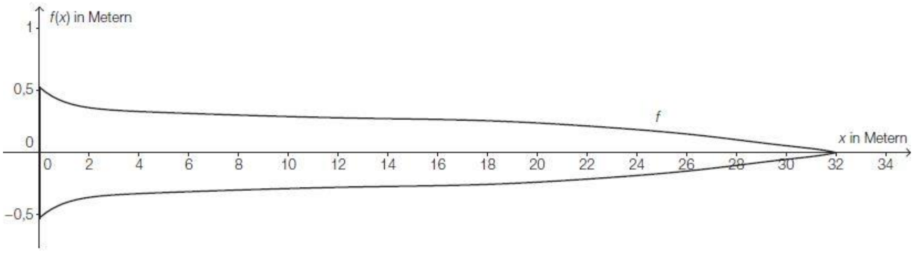
– Zeichnen Sie die Funktion f im Intervall $[-20; 20]$.

Rotiert die Funktion f im Intervall $[0; x_N]$ um die x-Achse, erhält man ein Modell des gewünschten Gehäuses, wobei x_N die Nullstelle der Funktion f ist.

– Berechnen Sie das Volumen des Gehäuses.

Volumen eines Baumes * (B_310)

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



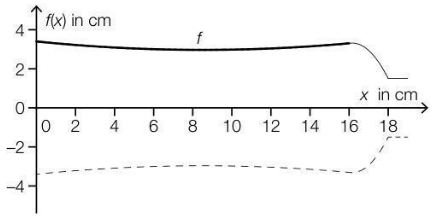
– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen V des Baumstamms berechnet werden kann.

$V =$ ______________________________

Getraenke * (B_565)

c) Ein Getränkehersteller überlegt, Getränke in Glasflaschen anzubieten.

Die Form einer Glasflasche wird im Intervall [0; 16] durch die Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = 0{,}006 \cdot x^2 - 0{,}102 \cdot x + 3{,}4 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 16$

x, $f(x)$ … Koordinaten in cm

Auf der Glasflasche soll eine Markierung für ein Füllvolumen von 450 ml angebracht werden.
Die entsprechende Füllhöhe h soll berechnet werden.

1) Tragen Sie in den dafür vorgesehenen Kästchen die fehlenden Zahlen zur Berechnung von h ein.

$\square \cdot \int_{\square}^{h} (f(x))^2 \, dx = \square$

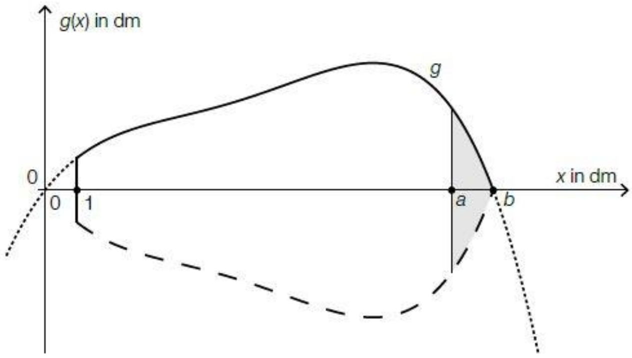
2) Berechnen Sie h.

Pro Level

Abrissbirnen (1) * (B_012)

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$g(x) = -0{,}00157 \cdot x^4 + 0{,}03688 \cdot x^3 - 0{,}29882 \cdot x^2 + 1{,}26325 \cdot x$



– Berechnen Sie die Nullstelle b.

Das Volumen dieser Abrissbirne soll verkleinert werden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; a]$ um die x-Achse entsteht die Form einer Abrissbirne mit einem um 10 dm³ kleineren Volumen.

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a.

Statuen und Skulpturen (1) * (B_378)

c) Das Abschlusselement einer Säule soll aus Marmor hergestellt werden. Dieses kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse beschrieben werden:

$f(x) = 4 - \frac{x}{2} - \sin(x)$ mit $0 \leq x \leq 5$

$x, f(x)$ … Koordinaten in Dezimetern (dm)

– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f.
– Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung den kleinsten und den größten Radius dieses Abschlusselements.

Die Dichte des verwendeten Marmors beträgt 2,7 kg/dm³.

– Berechnen Sie die Masse des Abschlusselements.

Wassergefaesse * (B_313)

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

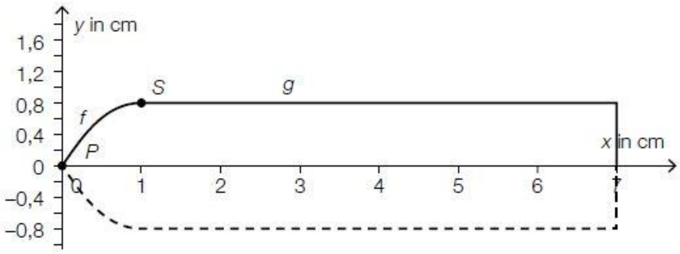
x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Blut (B_372)

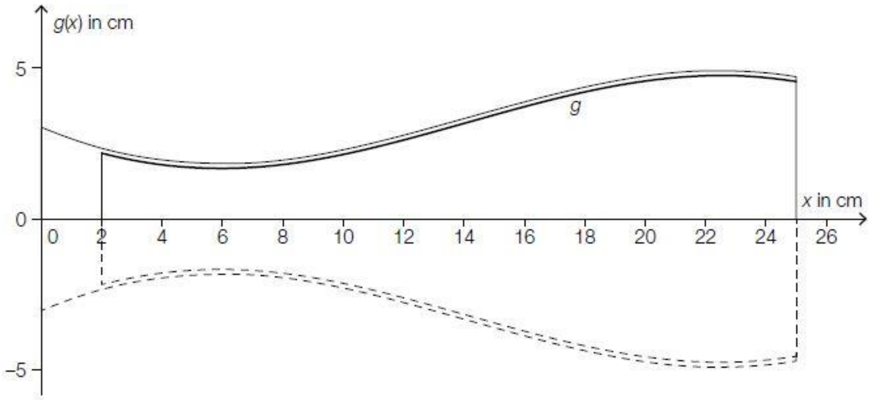
a) Zur Verabreichung von Medikamenten werden spezielle Dosiervorrichtungen verwendet. Die Form des Flüssigkeitsbehälters einer solchen Vorrichtung entsteht durch Rotation der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Kurve setzt sich aus einem Parabel- und einem Geradenstück zusammen. S ist der Scheitel der Parabel.



– Stellen Sie für die dargestellten Funktionen f und g je eine Funktionsgleichung auf.
– Berechnen Sie das Volumen des Flüssigkeitsbehälters in Millilitern.

Gastwirtschaft* (B_443)

b) Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

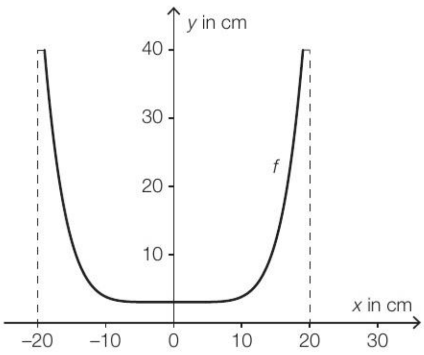
x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

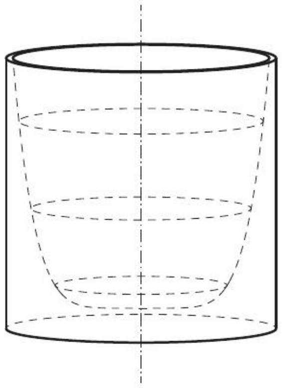
1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

Blumentopf * (B_474)

a) Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe.
Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3$ mit $-19 \leq x \leq 19$

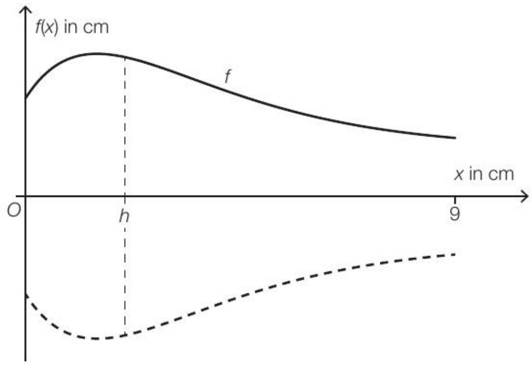
1) Begründen Sie, warum f eine gerade Funktion ist.

Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

Obstfliegenfalle * (B_486)

a) Die Obstfliegenfalle kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 1 + 2{,}7 \cdot (x + 0{,}5) \cdot e^{-\frac{2 \cdot x + 1}{4}}$ für $0 \leq x \leq 9$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Obstfliegenfalle wird mit 50 cm³ Flüssigkeit befüllt.

In einem Abstand h vom Boden der Obstfliegenfalle soll eine Markierung für diese Flüssigkeitsmenge angebracht werden (siehe obige Abbildung).
Mit der nachstehenden Gleichung soll dieser Abstand h berechnet werden.

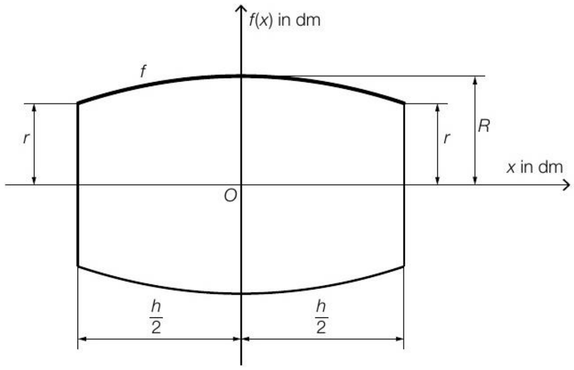
$\pi \cdot \int_0^{\boxed{}} (f(x))^2 \, dx = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie die obige Gleichung durch Eintragen in die dafür vorgesehenen Kästchen.

2) Berechnen Sie h.

Faesser * (B_541)

Fässer können modellhaft durch Rotation des Graphen einer quadratischen Funktion f im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse beschrieben werden.



r, R, h ... Abmessungen in dm

b) Für das Fass B mit den Abmessungen r_B, R_B und h_B wird die obere Begrenzungslinie durch die Funktion f_B beschrieben.

$f_B(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 3$ mit $-4 \leq x \leq 4$
x, $f_B(x)$ ... Koordinaten in dm

Es gilt: $h_B = 8$ dm.

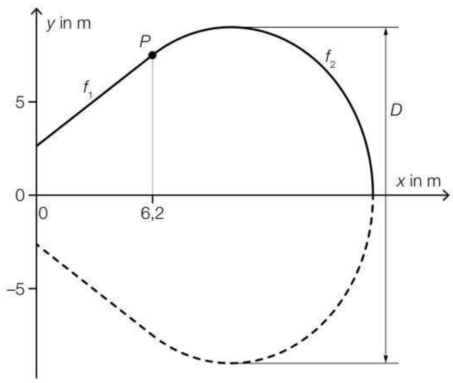
1) Berechnen Sie das Volumen des Fasses B. *[0/1 P.]*

Jemand behauptet: „Das Volumen des Fasses B lässt sich auch als Volumen eines Zylinders mit der Höhe h_B, dessen Radius das arithmetische Mittel aus r_B und R_B ist, berechnen."

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Ballonfahren * (B_553)

b) Die Form eines bestimmten Heißluftballons entsteht durch Rotation der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 um die x-Achse (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f_2 gilt:

$f_2(x) = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}$

1) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser D des Heißluftballons.

Der Graph der Funktion f_1 ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P.

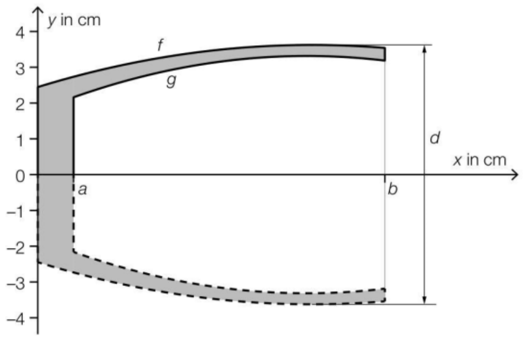
2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_1 auf.

3) Berechnen Sie das Volumen des Heißluftballons.

Kaffeegetränke * (B_577)

d) Kaffee wird oft aus sogenannten *Cappuccino-Gläsern* getrunken.
Die Form eines Cappuccino-Glases kann durch Rotation der Graphen der Funktionen f und g um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).

Bildquelle: bloomix GmbH, https://www.bloomix.at/media/catalog/product/cache/1/image/650x/040ec09b1e35df139433887a97daa66f/c/-/c-112-200_p2_1.jpg [03.11.2021].



$f(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}31 \cdot x + 2{,}44 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq b$

1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion f den maximalen Außendurchmesser d des Glases.

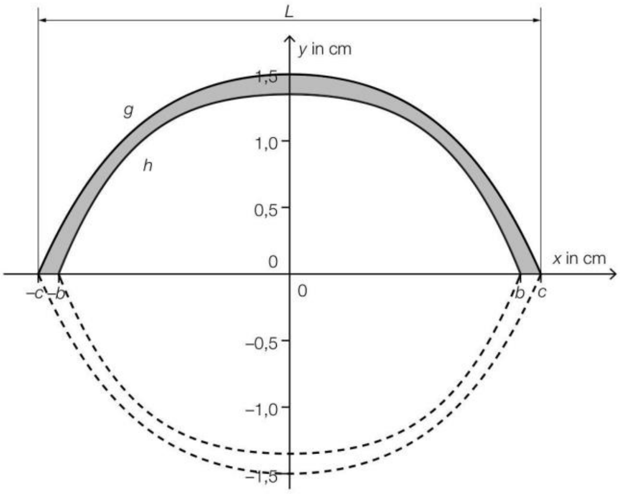
Die innere Form des Cappuccino-Glases entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Innenvolumens V auf.

$V =$ ______________________________________

Walnüsse * (B_600)

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Walnuss modellhaft dargestellt. Die Schale der Walnuss entsteht durch Rotation der grau markierten Fläche um die x-Achse.



$g(x) = -0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5$
$h(x) = -0{,}057 \cdot x^4 - 0{,}14 \cdot x^2 + a$

x, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in cm
a ... Parameter

1) Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Walnuss mehr als 4 cm beträgt.

An der Stelle $x = 0$ beträgt die Dicke der Walnussschale 1,7 mm.

2) Geben Sie den Parameter a der Funktion h an.

$a =$ ____________________ cm

3) Ordnen Sie den beiden Volumen jeweils die zutreffende Formel aus A bis D zu.

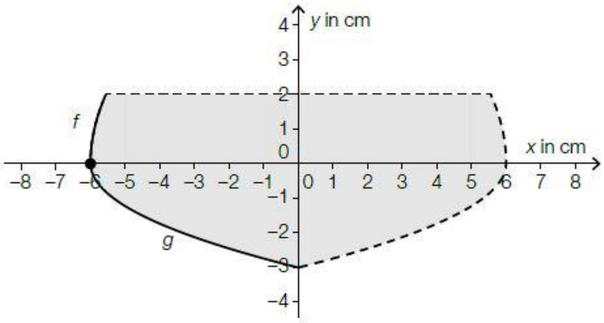
Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	
Volumen der Walnuss-schale	

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2 \,\mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2 \,\mathrm{d}x$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2 \,\mathrm{d}x$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{b} h(x)^2 \,\mathrm{d}x$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2) \,\mathrm{d}x$

All Star Level

Champagner * (B_215)

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für f gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für g gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

Schachfigur (B_057)

a) Eine Alternative zu obiger Polynomfunktion ist eine Funktion mit $f(x) = -0{,}5\ \sin(x) + 1$ mit $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

– Stellen Sie die Funktion in diesem Intervall grafisch dar.
– Berechnen Sie das Volumen der so entstehenden Schachfigur mithilfe der Integralrechnung.

b) Zur Berechnung des Volumens V eines Rotationskörpers kann die zweite Guldin'sche Regel verwendet werden:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot R$$

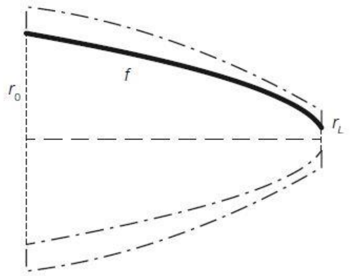
A … Flächeninhalt der erzeugenden Fläche
R … Normalabstand des Schwerpunkts dieser Fläche von der Rotationsachse

Für die Rotation von f um die x-Achse gilt: $R = \frac{1}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

– Zeigen Sie, wie man die zweite Guldin'sche Regel aus dieser Formel erhält.

Der Venturi Effekt (B_111)

b) Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von r_L = 0,5 mm. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben: $f(x) = \sqrt{a - b \cdot x}$, 0 mm ≤ x ≤ 25 mm.



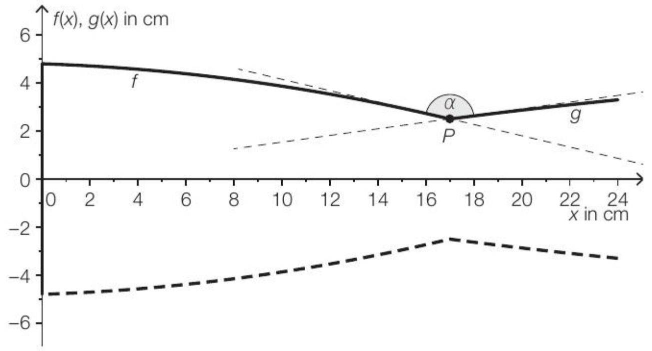
– Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.
– Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

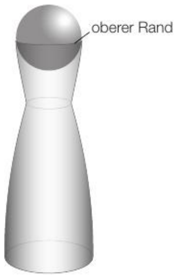
Zirbenkugel-Wassergefaesse * (B_504)

a) Das (liegende) Wassergefäß kann modellhaft durch die Rotation der Graphen der Funktionen f und g um die x-Achse beschrieben werden. Die Glasdicke wird dabei vernachlässigt.

$f(x) = -\frac{1}{170} \cdot x^2 - \frac{3}{85} \cdot x + \frac{24}{5}$ mit $0 \le x \le 17$

$g(x) = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{x - 8}$ mit $17 \le x \le 24$





Im Schnittpunkt P schließen die Tangente an den Graphen von f und die Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein.

1) Berechnen Sie diesen stumpfen Winkel α.

Das Wassergefäß ist 18 cm hoch mit Wasser gefüllt.

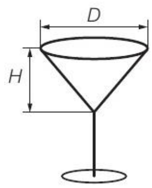
2) Ermitteln Sie die im Wassergefäß enthaltene Wassermenge in Litern.

Das Wassergefäß soll mit einer Markierung für eine Füllmenge von 1 L versehen werden.

3) Berechnen Sie die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes.

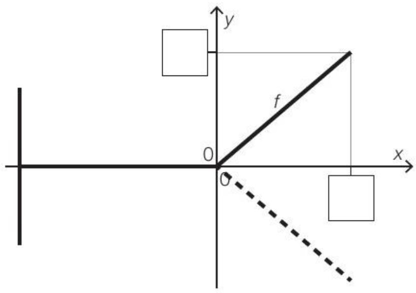
Martiniglaeser * (B_523)

a) In der nebenstehenden Abbildung ist ein Martiniglas dargestellt. Der obere Teil des Martiniglases kann modellhaft als Drehkegel mit dem Durchmesser D und der Höhe H betrachtet werden.



In der unten stehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist ein Modell dieses Martiniglases dargestellt. Der Drehkegel entsteht durch Rotation des Graphen der linearen Funktion f um die x-Achse.

1) Tragen Sie unter Verwendung von H und D die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



2) Stellen Sie mithilfe von H und D eine Gleichung der Funktion f auf.

$f(x) =$ ____________________________________

V_x ist das Volumen des Drehkegels, der bei Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse entsteht.

3) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von V_x auf.

$V_x =$ ____________________________________

Der obere Teil eines bestimmten Martiniglases wird durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall [0; 75] um die x-Achse modelliert.

$g(x) = \frac{13}{17} \cdot x$

$x, g(x)$ … Koordinaten in mm

Dieses Martiniglas wird mit einer Flüssigkeitsmenge von 2 dl befüllt.

4) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe (gemessen von der Spitze des Drehkegels).

Lösungen

Rookie Level

Der Schall (B_067) Lösung

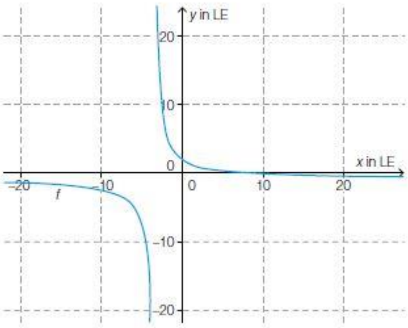
d) $V_x = \pi \cdot \int_5^{30} f^2(x)\mathrm{d}x$

$V_x = \pi \cdot \int_5^{30} \left(\frac{x^3}{3\,000} + 4\right)^2 \mathrm{d}x$

$V_x \approx 4\,042 \text{ cm}^3$

Hydraulik (B_287) Lösung

b)



$x_N \approx 8{,}265$

$V_x = \pi \cdot \int_0^{8{,}265} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = 17{,}0678\ldots \text{ VE}$

$V_x \approx 17{,}07 \text{ VE}$

Volumen eines Baumes * (B_310) Lösung

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

Getraenke * (B_565) Lösung

c1) $\boxed{\pi} \cdot \int_{\boxed{0}}^{h} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \boxed{450}$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$h = 15{,}027\ldots$ cm

Pro Level

Abrissbirnen * (B_012) Lösung

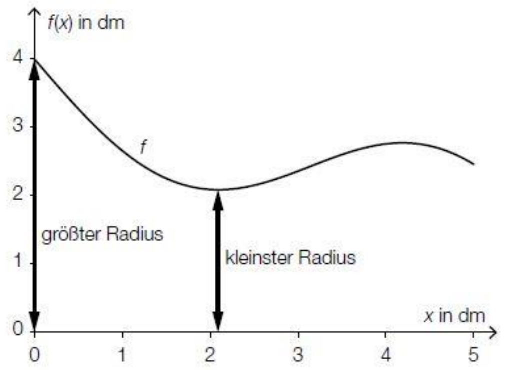
c) Berechnung der Nullstelle b mittels Technologieeinsatz: $b = 14{,}0...$

$\pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 \, dx = 10$

Berechnung der Stelle a mittels Technologieeinsatz: $a = 12{,}7...$

Statuen und Skulpturen (1) * (B_378) Lösung

c)



$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(4 - \frac{x}{2} - \sin(x)\right)^2 dx = 109{,}78\ldots$

Die Masse (in kg) ist das Produkt aus Dichte (in kg/dm³) und Volumen (in dm³):

$2{,}7 \cdot 109{,}78\ldots = 296{,}41\ldots$

Die Masse beträgt rund 296,4 kg.

Wassergefaesse * (B_313) Lösung

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$V = \int_0^H \pi \cdot x^2 \, dy = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}} \, dy = 216960,\ldots$

$V \approx 216960 \text{ cm}^3 \approx 217$ Liter

Blut (B_372) Lösung

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

I: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

II: $f(1) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0{,}8$

III: $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a + b = 0$

$a = -0{,}8$

$b = 1{,}6$

$c = 0$

$f(x) = -0{,}8 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x$

$g(x) = 0{,}8$

$V = \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2 \, dx + 0{,}8^2 \cdot \pi \cdot 6$

$V = 13{,}136\ldots$

Das Volumen des Flüssigkeitsbehälters beträgt rund 13,14 ml.

Gastwirtschaft * (B_443) Lösung

b1) $g'(x) = 0$ *oder* $-0{,}00324 \cdot x^2 + 0{,}092 \cdot x - 0{,}4367 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 6{,}025...$
$(x_2 = 22{,}369...)$

Anhand der Grafik ist erkennbar, dass der Tiefpunkt an der Stelle x_1 *ist, ein (rechnerischer) Nachweis, dass* x_1 *eine Minimumstelle ist, ist daher nicht erforderlich.*

Innendurchmesser: $d = 2 \cdot g(x_1) = 3{,}60...$

Der kleinste Innendurchmesser des Weizenbierglases beträgt rund 3,6 cm.

b2) $V = \pi \cdot \int_2^{25} (g(x))^2 \, dx = 678{,}6...$

Das Füllvolumen des Weizenbierglases beträgt rund 0,68 L.

Blumentopf * (B_474) Lösung

a1) Die Funktion f ist gerade, weil der Graph symmetrisch zur y-Achse ist.
oder:
Die Funktion f ist gerade, weil $f(x) = f(-x)$.
oder:
Die Funktion f ist gerade, weil f eine Polynomfunktion ist, in der die einzige auftretende Potenz von x einen geradzahligen Exponenten hat.

a2) Ansatz: $\pi \cdot \int_3^{40} x^2 \, dy$

$$\pi \cdot \int_3^{40} 19^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y-3}{37}} \, dy = 31\,471{,}6...$$

Das Innenvolumen des Blumentopfs beträgt rund 31 472 cm³.

Obstfliegenfalle * (B_486) Lösung

a1) $\pi \cdot \int_0^{\boxed{h}} (f(x))^2 \, dx = \boxed{50}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h = 2{,}04\ldots$

Faesser * (B_541) Lösung

b1) $V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} (f_B(x))^2 \, dx = 180{,}95...$
Das Volumen des Fasses B beträgt rund 181 dm³.

b2) $\left(\frac{f_B(0) + f_B(4)}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 = \left(\frac{3+2}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 = 157{,}07...$
Da das Volumen des Zylinders rund 157 dm³ beträgt, ist die Behauptung falsch.

Ballonfahren * (B_553) Lösung

b1) $f_2'(x) = 0$ *oder* $\frac{5}{8} \cdot \frac{-2 \cdot x + 20{,}8}{\sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}} = 0$
$x = 10{,}4$
$D = 2 \cdot f_2(10{,}4) = 2 \cdot 9{,}5 = 19$

b2) $f_1(x) = k \cdot x + d$
$k = f_2'(6{,}2) = 0{,}8288...$

$f_2(6{,}2) = 7{,}917...$
$d = f_2(6{,}2) - 6{,}2 \cdot k = 2{,}778...$

$f_1(x) = 0{,}8288... \cdot x + 2{,}778...$

b3) $f_2(x) = 0$ *oder* $\frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4} = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = 2{,}8)$ $x_2 = 18$
$V = \pi \cdot \left(\int_0^{6{,}2} (f_1(x))^2 \,dx + \int_{6{,}2}^{18} (f_2(x))^2 \,dx\right) = 3\,106{,}1...$
Das Volumen des Heißluftballons beträgt rund 3 106 m³.

Lösung: Kaffeegetränke * (B_577)

d1) $f'(x) = 0$ *oder* $-0{,}04 \cdot x + 0{,}31 = 0$
$x = 7{,}75$
$d = 2 \cdot f(7{,}75) = 7{,}28...$ cm

d2) $V = \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 \,dx$

Lösung: Walnüsse * (B_600)

b1) $g(x) = 0$ *oder* $-0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = -2{,}1...$ $x_2 = 2{,}1...$
$L = 4{,}2...$ cm
Die Länge der Walnuss ist größer als 4 cm.

b2) $a = 1{,}33$ cm

b3)

Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	C
Volumen der Walnuss-schale	A

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2 \,dx - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2 \,dx$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2 \,dx$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_0^b h(x)^2 \,dx$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2) \,dx$

All Star Level

Champagner * (B_215) Lösung

b1) $a = 6$

b2) $V_y = \pi \cdot \left(\int_0^2 \left(\frac{y^2}{9} - 6\right)^2 dy + \int_{-3}^0 \left(\frac{y^2 - 9}{1{,}5}\right)^2 dy\right) = 396{,}2\ldots$

Das Füllvolumen beträgt rund 396 ml.

b3) $\pi \cdot \int_{-3}^{h} \left(\frac{y^2 - 9}{1{,}5}\right)^2 dy = 150$

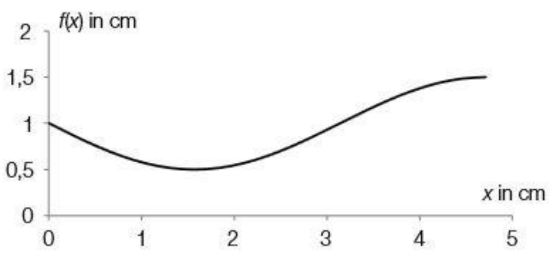
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h = -0{,}275\ldots$
$3 - 0{,}275\ldots = 2{,}724\ldots$

Die Füllhöhe beträgt rund 2,72 cm.

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn nur der Wert für h *richtig ermittelt wurde.*

Schachfigur (B_057) Lösung

a) $f(x) = -0{,}5\ \sin(x) + 1$



Das Volumen wird mithilfe von Technologieeinsatz (z. B. mit Mathcad) berechnet:

$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-0{,}5 \sin(x) + 1)^2 dx = 13{,}513\ldots$

Das Volumen der Schachfigur beträgt ca. 13,5 cm³.

b) $R = \frac{1}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \quad | \cdot 2\pi$

$2\pi \cdot R = \frac{2\pi}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \quad | \cdot A$

$A \cdot 2\pi \cdot R = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx$

$A \cdot 2\pi \cdot R = V_x$

Der Venturi Effekt (B_111) Lösung

b) $f(0) = 5 \Rightarrow \sqrt{a - b \cdot 0} = 5 \Rightarrow a = 25$

$f(25) = 0{,}5 \Rightarrow \sqrt{25 - b \cdot 25} = 0{,}5 \Rightarrow b = 0{,}99$

Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_0^{25} \left(\sqrt{25 - 0{,}99 \cdot x}\right)^2 dx \approx 992\ \text{mm}^3$

Zirbenkugel-Wassergefaesse * (B_504) Lösung

a1) $\alpha = 180° - |\arctan(f'(17))| - \arctan(g'(17)) = 158{,}852...°$

a2) $\pi \cdot \int_0^{17} \left(f(x)\right)^2 dx + \pi \cdot \int_{17}^{18} \left(g(x)\right)^2 dx = 871{,}3...$

$871{,}3...\ \text{cm}^3 = 0{,}8713...\ \text{L}$

Die Wassermenge beträgt rund 0,871 L.

a3) $1\,000 = \pi \cdot \int_0^{17} \left(f(x)\right)^2 dx + \pi \cdot \int_{17}^{24-a} \left(g(x)\right)^2 dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

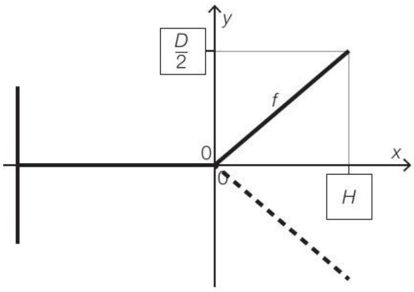
$a_1 = 1{,}238...$

$(a_2 = 30{,}761...)$

Die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes beträgt rund 1,24 cm.

Martiniglaeser * (B_523) Lösung

a1)



a2) $f(x) = \frac{D}{2 \cdot H} \cdot x$

a3) $V_x = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{D}{2 \cdot H}\right)^2 \cdot x^2 dx$ *oder* $V_x = \pi \cdot \int_0^H (f(x))^2 dx$ *oder* $V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H$

a4) $2\ \text{dl} = 200\,000\ \text{mm}^3$

$200\,000 = \pi \cdot \int_0^b (g(x))^2 dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$b = 68{,}8…$

Die Füllhöhe beträgt rund 69 mm.