Aufgabensammlung

Kosten- & Preistheorie

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Kosten- & Preistheorie

Grundkompetenzen

Kosten und Erlös* - 1_669, FA1.6, Offenes Antwortformat

Für ein Produkt sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = 2 \cdot x + 4000$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 10 \cdot x$ bekannt, wobei x die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten ist und alle produzierten Mengeneinheiten verkauft werden. Kosten und Erlös werden jeweils in Euro angegeben.
Der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ist $S = (500|5000)$.

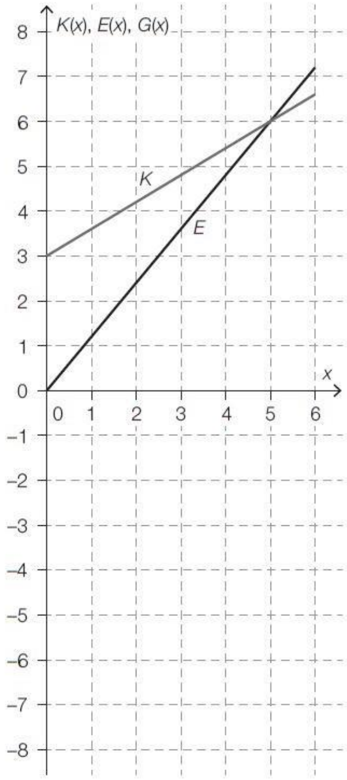
Interpretieren Sie die Koordinaten 500 und 5000 des Schnittpunkts S im gegebenen Kontext!

Gewinnfunktion* - 1_740, FA1.5, Konstruktionsformat

Die unten stehende Abbildung zeigt eine lineare Kostenfunktion $K: x \mapsto K(x)$ und eine lineare Erlösfunktion $E: x \mapsto E(x)$ mit $x \in [0; 6]$.

Für die Gewinnfunktion $G: x \mapsto G(x)$ gilt für alle $x \in [0; 6]$: $G(x) = E(x) - K(x)$.

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen von G ein.



Produktionskosten* - 1_412, FA2.2, Offenes Antwortformat

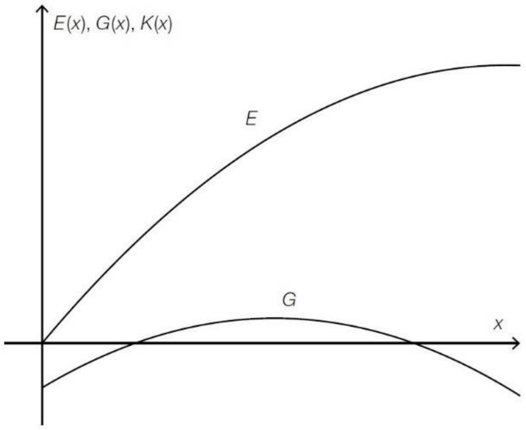
Ein Betrieb gibt für die Abschätzung der Gesamtkosten $K(x)$ für x produzierte Stück einer Ware folgende Gleichung an: $K(x) = 25x + 12000$.

Interpretieren Sie die beiden Zahlenwerte 25 und 12 000 in diesem Kontext!

Kosten, Erlös und Gewinn* - 1_486, FA1.7, Konstruktionsformat

Die Funktion E beschreibt den Erlös (in €) beim Absatz von x Mengeneinheiten eines Produkts. Die Funktion G beschreibt den dabei erzielten Gewinn in €. Dieser ist definiert als Differenz „Erlös – Kosten".

Ergänzen Sie die nachstehende Abbildung durch den Graphen der zugehörigen Kostenfunktion K!
Nehmen Sie dabei K als linear an! (Die Lösung der Aufgabe beruht auf der Annahme, dass alle produzierten Mengeneinheiten des Produkts verkauft werden.)



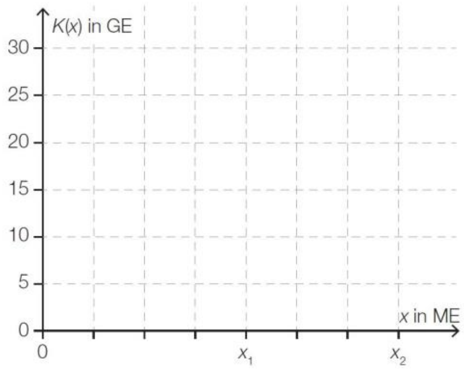
Kostenfunktion* - 1_764, FA1.5, Konstruktionsformat

Die Gesamtkosten, die bei der Herstellung eines Produkts anfallen, können mithilfe einer differenzierbaren Kostenfunktion K modelliert werden. Dabei ordnet K der Produktionsmenge x die Kosten $K(x)$ zu (x in Mengeneinheiten (ME), $K(x)$ in Geldeinheiten (GE)).

Für eine Kostenfunktion $K: [0; x_2] \to \mathbb{R}$ und x_1 mit $0 < x_1 < x_2$ gelten nachstehende Bedingungen:

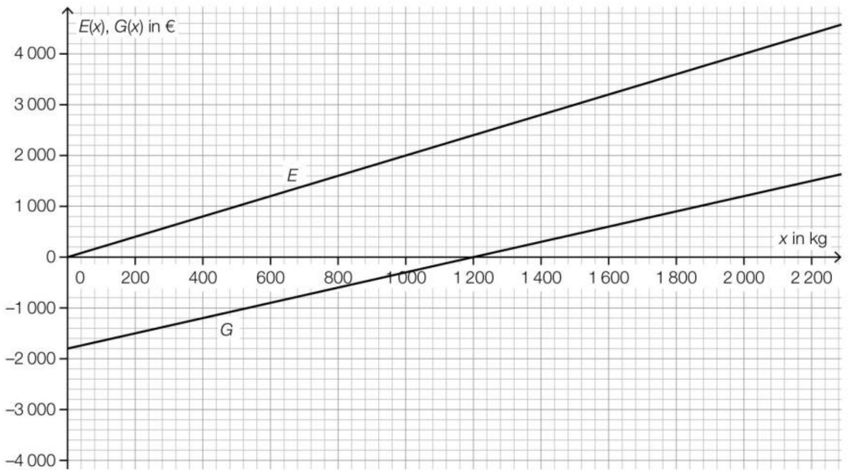
- K ist im Intervall $[0; x_2]$ streng monoton steigend.
- Die Fixkosten betragen 10 GE.
- Die Kostenfunktion hat im Intervall $[0; x_1)$ einen degressiven Verlauf, d. h., die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.
- Bei der Produktionsmenge x_1 liegt die Kostenkehre. Die Kostenkehre von K ist diejenige Stelle, ab der die Kosten immer stärker steigen.

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Verlauf des Graphen einer solchen Kostenfunktion K.



Erlös und Gewinn* - 1_1228, FA2.2, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der linearen Erlösfunktion $E: x \mapsto E(x)$ und den Graphen der linearen Gewinnfunktion $G: x \mapsto G(x)$ (x in kg, $E(x)$ und $G(x)$ in €).



Geben Sie den Verkaufspreis und die Fixkosten an.

Verkaufspreis: ____________________ €/kg

Fixkosten: ____________________ €

Kosten eines Betriebs* - 1_1253, FA4.3, Offenes Antwortformat

Die Funktion K mit $K(x) = 100 \cdot x^3 - 1\,800 \cdot x^2 + 11\,200 \cdot x + 20\,000$ gibt die Gesamtkosten in Euro an, die für einen Betrieb bei der Erzeugung von x (in Tonnen) eines bestimmten Produkts entstehen.

Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge (in Tonnen), bei der die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten sind.

Produktionskosten* (1_1282) - AN3.1 - Halboffenes Antwortformat

Die monatlichen Fixkosten eines Betriebs für die Produktion von Erfrischungsgetränken betragen € 200.000.
Die Funktion K beschreibt modellhaft die monatlichen Gesamtkosten für diese Produktion (in Euro) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x.
Die Grenzkosten für diese Produktion werden durch die Funktion K' beschrieben.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3500$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Mengeneinheit

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ____

Grenzkosten und Gesamtkosten* (1_1333) - AN4.3 - Offenes Antwortformat

Die Grenzkosten für die Produktion eines bestimmten Produkts werden durch die Funktion K' modelliert. Es gilt:

$$K'(x) = \frac{1}{100} \cdot \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + 4\right)$$

x ... Produktionsmenge in Stück
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Stück

Die Gesamtkosten werden in Euro angegeben.

Berechnen Sie denjenigen Betrag, um den die Gesamtkosten steigen, wenn man von diesem Produkt 110 Stück statt 100 Stück produziert.

Rookie Level

Computerspiele_2 (B_151)

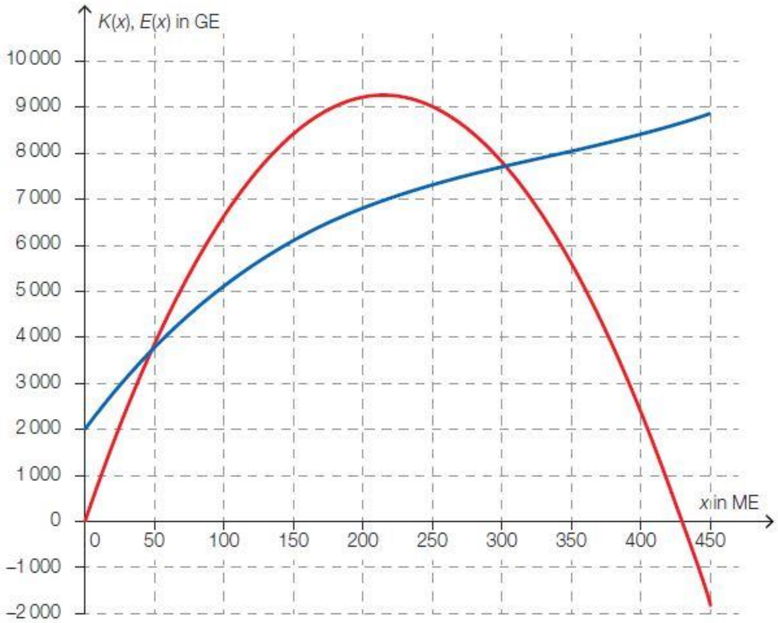
a) Für ein bestimmtes Verkaufsgebiet kann die Abhängigkeit des Verkaufspreises p in GE/ME und der nachgefragten Menge x in ME durch die Funktion p mit $p(x) = -0{,}2x + 86$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
– Berechnen Sie diejenige Verkaufsmenge, bei der der erzielbare Erlös maximal ist.
– Bestimmen Sie die Höhe des maximalen Erlöses.

b) Für die Produktion des Spiels *Super Maxi* wird der Verlauf der Grenzkosten durch die Funktion K' mit $K'(x) = 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 40$ beschrieben.

– Stellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K auf, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen.
– Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre in Bezug auf die Zunahme der Kosten pro zusätzlich produzierter ME.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion des Spiels *Super Mizzi* dargestellt.



– Beschriften Sie die Graphen.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion möglichst genau in die Grafik ein.
– Lesen Sie die Grenzen der Gewinnzone ab.
– Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

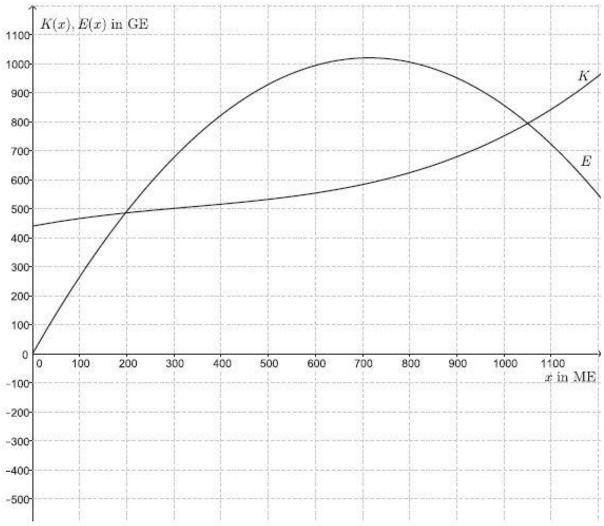
Erweiterung der Produktpalette (B_142)

a) Die Gesamtkosten lassen sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschreiben. Die Kostenkehre liegt bei 100 Stück. Die Grenzkosten an der Kostenkehre betragen € 0,30/Stück. Die Fixkosten betragen € 5.000. Eine Produktion von 250 Stück verursacht Kosten in Höhe von € 10.000.

– Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten dieser Kostenfunktion ermitteln kann.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Kostenfunktion.

Jungunternehmerin * (B_207)

b) In der nachstehenden Grafik sind Funktionsgraphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines Produktes dargestellt:



– Lesen Sie aus der Grafik den Gewinnbereich ab.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion in die vorgegebene Grafik ein.

c) Die Grenzkostenfunktion eines weiteren Produktes ist gegeben: $K'(x) = 6 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 64$.
Die Kosten für die Produktion von 2 ME betragen 72 GE.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion K auf.

Kreativ-Workshop * (B_383)

a) In den kommenden Sommerferien möchte der Kulturverband einer Großstadt eine Kombination aus Ausstellungsbesuch, Malkurs und Mittagessen für Kinder anbieten.

Laut einer Umfrage würde dieses Angebot bei einem Preis von € 23 pro Kind für 1050 Kinder gebucht werden. Bei einem Preis von € 27 pro Kind würde dieses Angebot für 990 Kinder gebucht werden.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage auf.

b) Die Preisfunktion der Nachfrage p für einen 2-tägigen Kreativ-Workshop ist erhoben worden:

$p(x) = -0{,}5 \cdot x + 220$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$p(x)$ ... Preis bei x Personen in € pro Person

– Berechnen Sie denjenigen Preis pro Person, bei dem 200 Personen zu erwarten sind.
– Geben Sie den Höchstpreis an.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

c) Bei einem Kreativ-Workshop fallen für den Veranstalter Kosten an, die sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben lassen:

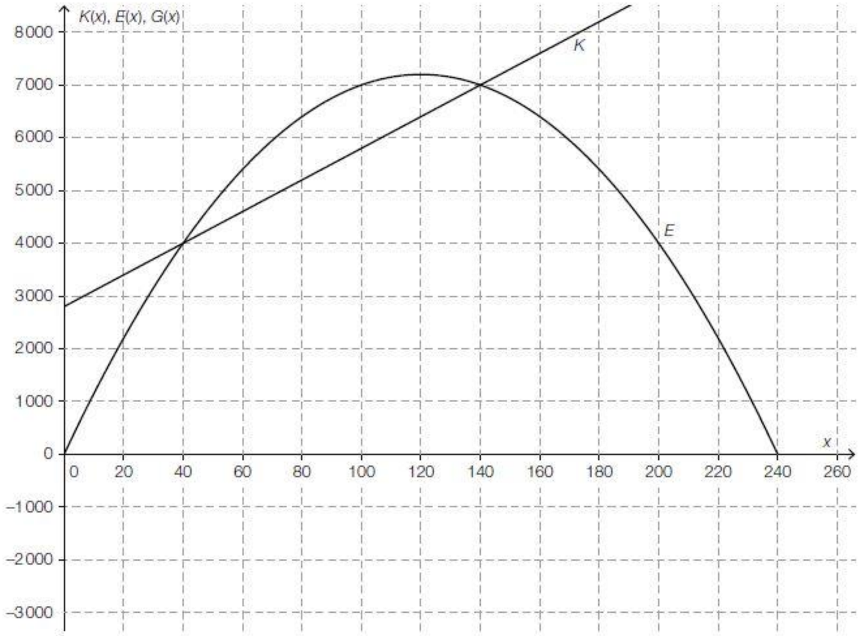
$K(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4800$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei x Personen in €

Der Preis für den Kreativ-Workshop beträgt € 129 pro Person.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei welcher Anzahl an teilnehmenden Personen für diesen Workshop der Break-even-Point erreicht wird.

d) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion E und einer linearen Kostenfunktion K.



– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.
– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall von 0 bis zur oberen Gewinngrenze in der obigen Abbildung ein.
– Beschreiben Sie, wie sich die beiden Gewinngrenzen verändern, wenn die Fixkosten steigen.

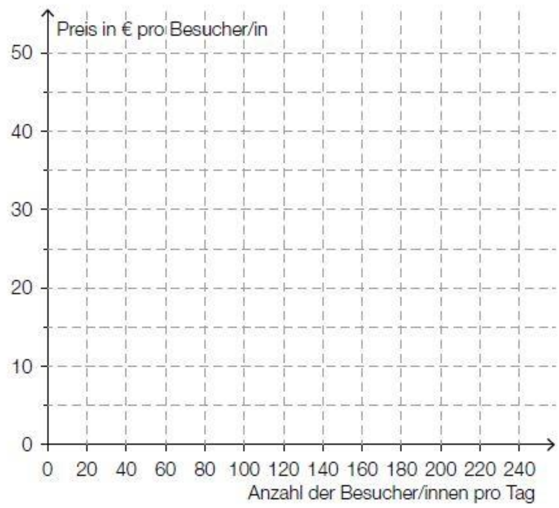
Kunst und Kaffee * (B_401)

Das Café-Restaurant in einer Kunsthalle bietet für die neue Ausstellung als zusätzliche Attraktion die Veranstaltung *Kunst und Kaffee* an. Nach einem gemütlichen Frühstück im Café-Restaurant kann man die Ausstellung besuchen und bezahlt für Frühstück und Ausstellungsbesuch nur einen Gesamtpreis.
Aus diesem Grund wird durch eine Befragung der Besucher/innen festgestellt, welcher Preis dafür verlangt werden kann.
Das Ergebnis dieser Befragung führt zu folgender linearer Preisfunktion der Nachfrage p:

$p(x) = -0{,}25 \cdot x + 45$

x … Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$p(x)$ … Preis bei x Besucher/innen in € pro Besucher/in

a) – Zeichnen Sie den Graphen dieser linearen Preisfunktion der Nachfrage in der nachstehenden Abbildung ein.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung die Sättigungsmenge.

b) – Ermitteln Sie, um welchen Betrag der Preis reduziert werden muss, wenn man 10 Besucher/innen pro Tag mehr für dieses Angebot gewinnen möchte.

c) – Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts der Erlösfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Die täglichen Kosten, die dem Café-Restaurant für dieses Angebot entstehen, lassen sich durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 500$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$K(x)$ ... tägliche Kosten bei x Besucherinnen und Besuchern in €

– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
– Erklären Sie, warum die Stelle, an der der Gewinn maximal ist, nicht von den Fixkosten abhängt.

Produktion * (B_220)

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten eines Unternehmens $K(x)$ in GE für die Produktionsmenge x in ME angegeben. Die Fixkosten betragen 40 GE.

x in ME	2	5	9
$K(x)$ in GE	105	152	369

– Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K.
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Kostenfunktion K im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
– Lesen Sie aus dem Graphen denjenigen Bereich ab, in dem ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.

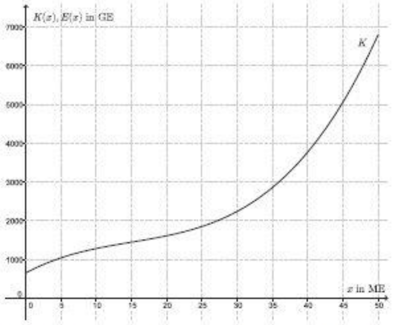
c) Zur Gewinnermittlung für ein anderes Produkt verwendet das Unternehmen die folgende Kostenfunktion K sowie die folgende Erlösfunktion E:

$K(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 55 \cdot x + 190$
$E(x) = 90 \cdot x$

x in ME
$K(x)$, $E(x)$ in GE

– Stellen Sie Funktionsgleichung der Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K eines weiteren Produktes dargestellt.



– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E bei einem Marktpreis von 100 GE/ME ein.
– Lesen Sie die beiden Gewinngrenzen ab.

Maschinenring (B_182)

c) Die Landwirte des Maschinenrings diskutieren über die Begriffe *Betriebsoptimum* und *Betriebsminimum*.

– Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die korrekte Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Betriebsoptimum	
Betriebsminimum	

A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Traktoren-Steuerung (B_183)

a) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}03 \cdot x^2 + x + 70\,000$

$E(x) = -5 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$

x … Anzahl produzierter bzw. verkaufter Stück
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x produzierten Stück in Euro
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stück in Euro

– Berechnen Sie diejenige Anzahl von Ersatzteilen, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Preis-Absatz-Funktion p.

– Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung der gegebenen Kosten- und Erlösfunktion den Cournot'schen Punkt ermitteln kann.

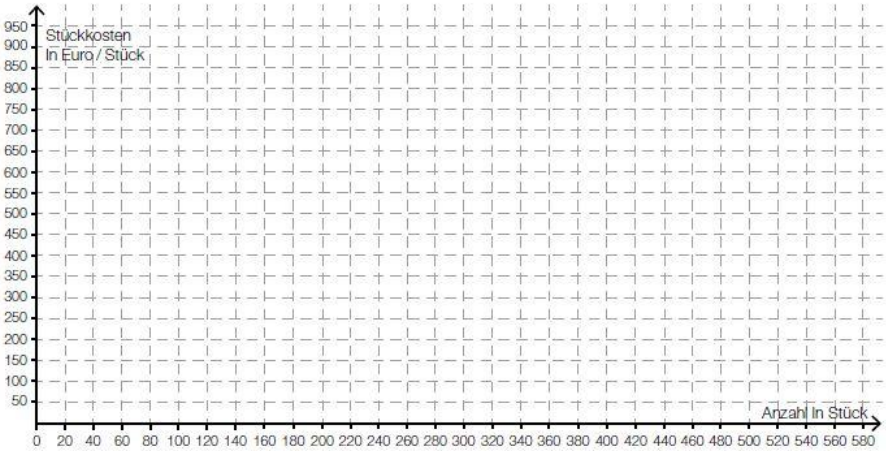
Der Cournot'sche Punkt befindet sich bei $(x_C|1610)$.

– Interpretieren Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung werden die Stückkosten durch die folgende Funktion $\overline{K}$ beschrieben:

$\overline{K}(x) = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}03 \cdot x + 1 + \frac{70\,000}{x}$

x … Anzahl produzierter Stück
$\overline{K}(x)$ … Stückkosten bei x produzierten Stück in Euro/Stück



– Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion in das obige Koordinatensystem ein.

– Markieren Sie in der obigen Abbildung das Betriebsoptimum.

Produktion von Golfschlaegern (B_303)

a) Durch Marktforschung konnten folgende Verkaufsdaten ermittelt werden:

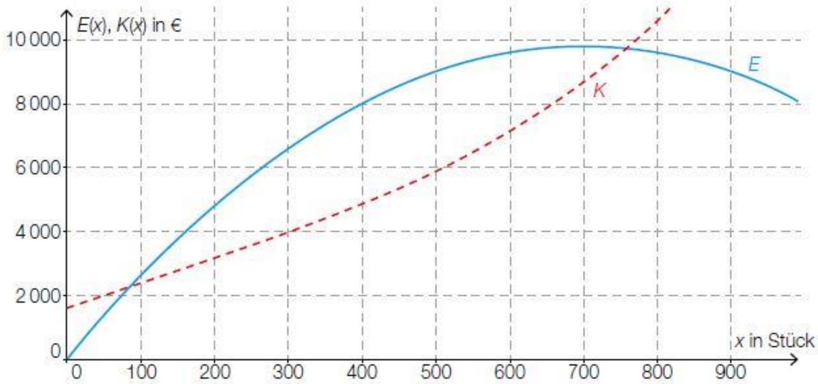
Nachfrage in Stück	240	310	400	500
Preis in €/Stk.	230	217	203	182

Auf Grundlage dieser Daten soll eine Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = a \cdot x + b$ ermittelt werden.

x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$p_N(x)$ … Preis bei einer Nachfrage von x Stück in Euro pro Stück (€/Stk.)

– Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung der Funktion p_N.
– Interpretieren Sie die Parameter a und b der Preisfunktion der Nachfrage p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für einen speziellen Golfschläger sind die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K dargestellt:



– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik die Gewinngrenzen ermitteln können.
– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik diejenige Stückzahl ermitteln können, für die der Gewinn maximal ist.

c) Von einer Golfschlägerproduktion sind die Gewinnfunktion G und die Preisfunktion der Nachfrage p_N bekannt.

$G(x) = -0{,}0001 \cdot x^3 - 0{,}17 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 16000$
$p_N(x) = -0{,}2 \cdot x + 280$

x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$G(x)$ … Gewinn bei x Stück in €
$p_N(x)$ … Preis bei x Stück in €/Stk.

– Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt.

Verkehrsbetriebe * (B_294)

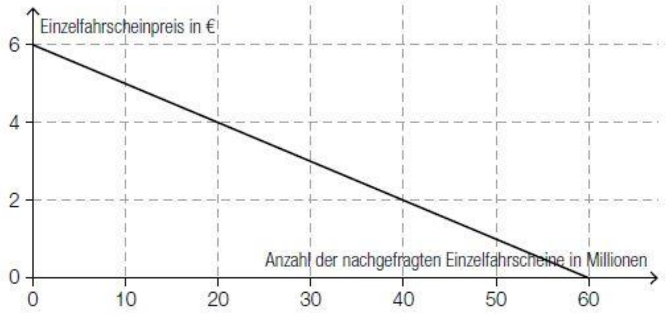
a) In der Stadt A können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion E beschrieben werden:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro.
2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro.

b) In der Stadt *B* wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der Stadt *C* wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion *p* beschrieben werden kann.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen
$p(x)$ ... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

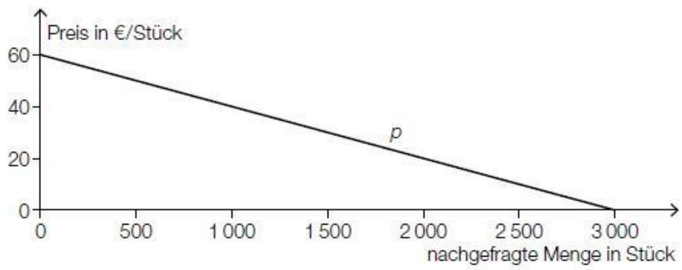
Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion *p*.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von *p*.

Betonrohre* (B_452)

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage *p* für Betonrohre des Modells *A* dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage *p*.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von *p* im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells *A* werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells *A*.

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c) Für Betonrohre des Modells C geht man von einer kubischen Kostenfunktion K aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

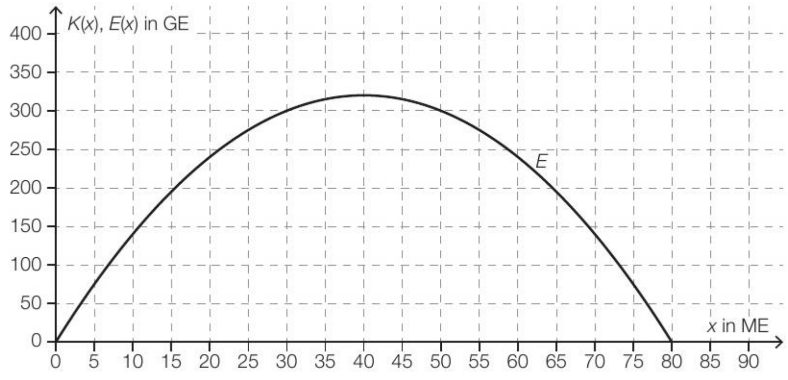
Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Wagenheber * (B_299)

b) Ein Unternehmen verkauft Wagenheber eines bestimmten Modells. Der Erlös kann in Abhängigkeit von der verkauften Menge x näherungsweise durch die quadratische Erlösfunktion E beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Die Fixkosten dieser Produktion betragen 100 GE.
Die obere Gewinngrenze beträgt 50 ME.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der linearen Kostenfunktion K ein.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn ab.

Rasenmaehroboter * (B_542)

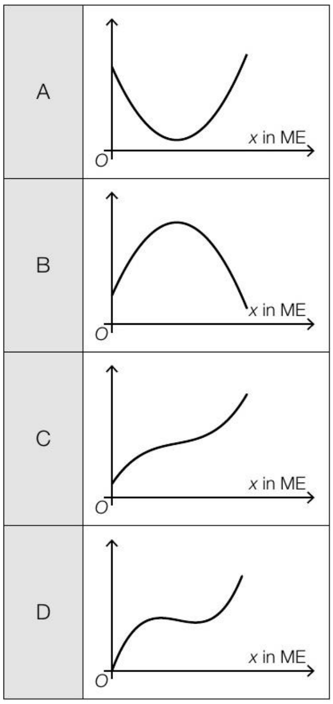
c) Die Kosten für die Herstellung von Rasenmährobotern werden modellhaft durch die streng monoton steigende Kostenfunktion K beschrieben.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad$ mit $\quad a > 0,\ d > 0$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden angegebenen Funktionen jeweils den passenden Funktionsgraphen aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Kostenfunktion K	
Grenzkostenfunktion K'	



Getraenke * (B_565)

a) Bei einem Preis von 2,80 Euro pro Stück werden von einem bestimmten Dosengetränk 2 000 Stück verkauft.

Laut den Ergebnissen einer Umfrage würde ein Verringern des Preises um 0,20 Euro pro Stück zu einer Erhöhung der verkauften Menge um 200 Stück führen.
Der Zusammenhang zwischen der Verkaufsmenge und dem Preis soll durch die lineare Preisfunktion der Nachfrage p_N beschrieben werden.

x ... Verkaufsmenge in Stück
$p_N(x)$ ... Preis bei der Verkaufsmenge x in Euro pro Stück

1) Stellen Sie eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

Der Erlös aus dem Verkauf des Dosengetränks kann durch die quadratische Funktion E beschrieben werden.

2) Berechnen Sie den maximalen Erlös.

b) Die Kosten für die monatliche Produktion von bestimmten Dosengetränken können durch die Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 0{,}001 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2000 \quad \text{mit} \quad x \geq 0$

x … Produktionsmenge in Stück
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in Euro

1) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils die zutreffende Eigenschaft aus A bis D zu.

Kostenfunktion K	
Stückkostenfunktion $\overline{K}$	

A	Die Funktion ist konstant.
B	Die y-Achse ist eine Asymptote des Funktionsgraphen.
C	Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.
D	Der Funktionsgraph ist im gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).

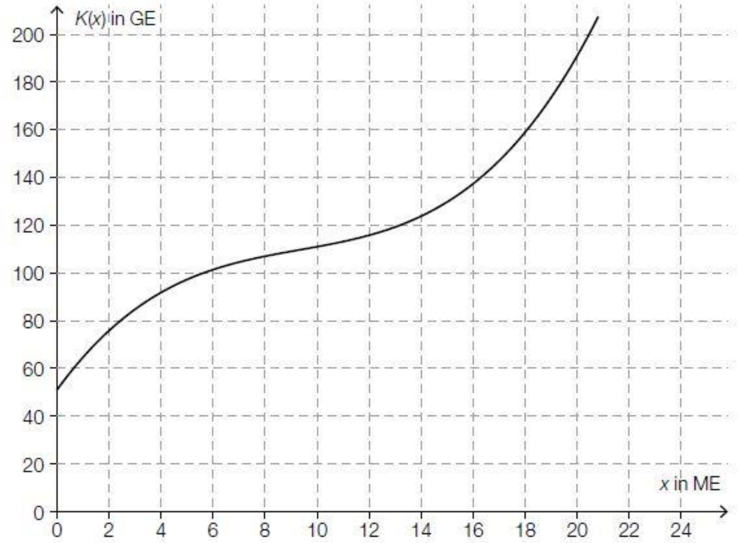
Pro Level

Lackproduktion * (B_433)

a) Die Kosten für die Herstellung des Acryllacks *Ferrocolor* sollen durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Das Unternehmen hat dabei Fixkosten von 450 GE. Bei der Produktion von 8 ME liegt die Kostenkehre. Bei der Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 522 GE und die Grenzkosten 5 GE/ME.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten a, b, c und d ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x-Koordinate des Berührpunkts ist das Betriebsoptimum.

– Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
– Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

c) Für die Holzschutzgrundierung *Pullex* wird der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge erhoben:

Absatzmenge x in ME	Preis $p_N(x)$ in GE/ME
10	16
12	13
15	12
17	9
19	8

– Ermitteln Sie mithilfe linearer Regression eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
– Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

d) Die Gewinnfunktion G für den Lack *Soloplast* ist gegeben durch:

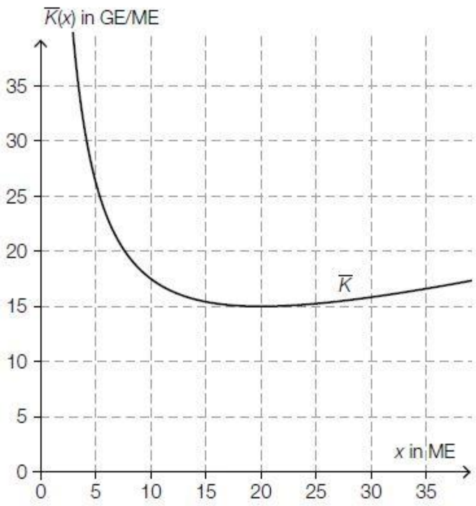
$G(x) = -0{,}025 \cdot x^3 - 0{,}1 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 65$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

– Lesen Sie aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Lacks ab.
– Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Gewinnfunktion ändert, wenn die Fixkosten steigen.

Lampenproduktion (1) * (B_419)

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

– Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
– Berechnen Sie die Fixkosten.

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

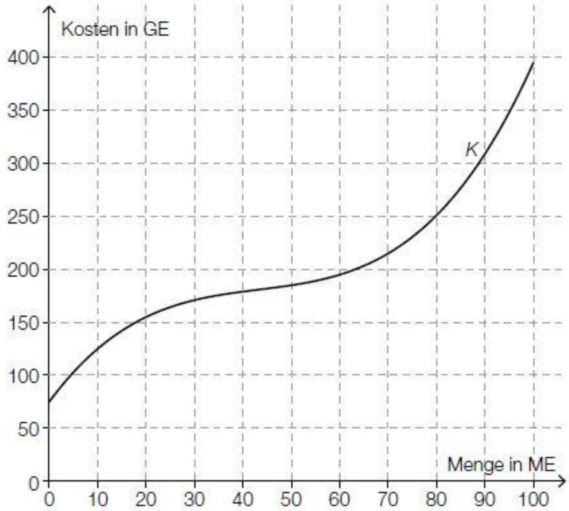
Buegeleisen * (B_217)

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.

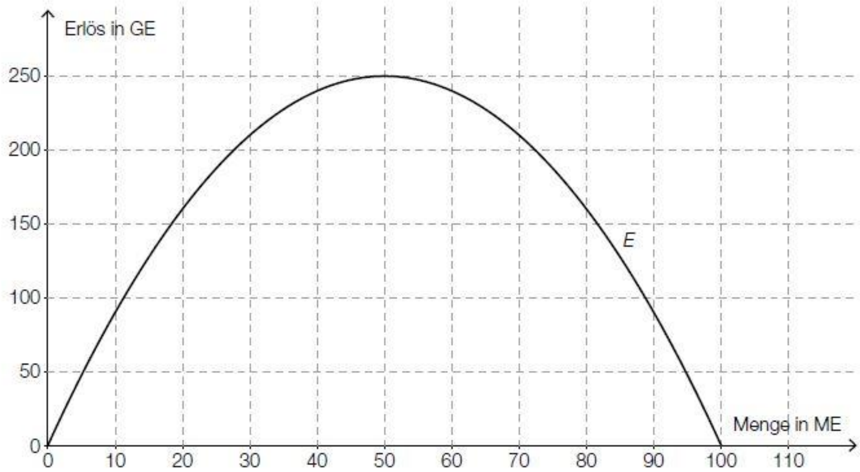


Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

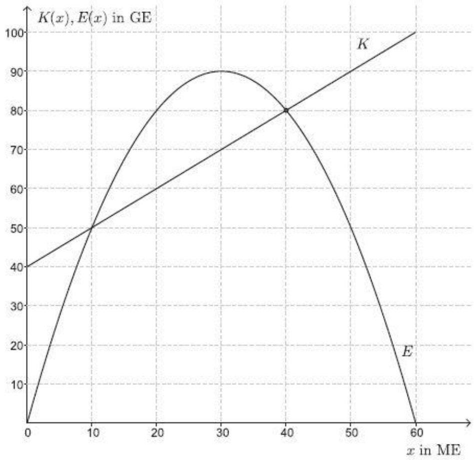
c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Papierproduzent (2) * (B_281)

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



a) – Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a dieser Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ haben muss.

b) Das Verhalten der Erlösfunktion soll für die nachgefragte Menge 40 ME untersucht werden.

– Zeichnen Sie in der obigen Grafik die Tangente an den Graphen der Erlösfunktion E an der Stelle $x = 40$ ein.
– Lesen Sie die Steigung dieser Tangente ab.
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

c) Für die Stelle des Gewinnmaximums gilt, dass die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind.

– Begründen Sie diese Aussage.

Sportartikel * (B_348)

a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$K(x) = 25 \cdot x + 300$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.
Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

– Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE.
Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

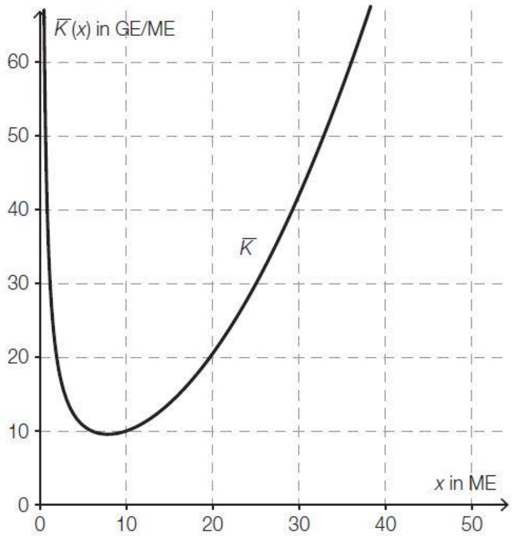
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 0{,}6 \cdot x + 5$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

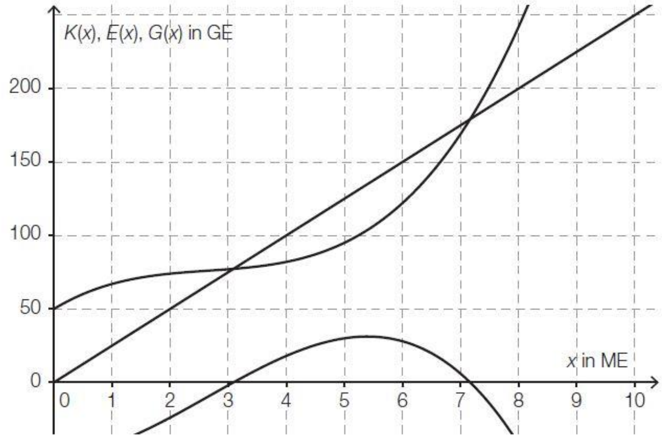
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K, einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
– Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Tischlereibetrieb (B_269)

a) Die Kosten für die Produktion eines bestimmten Tischgruppenmodells lassen sich durch die Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000$$

Folgende Preis-Absatz-Funktion p beschreibt den Zusammenhang zwischen Absatz und Preis für dieses Tischgruppenmodell:

$$p(x) = -\frac{10}{3} \cdot x + 875$$

x … Tischgruppenmodelle in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Kosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)
$p(x)$ … Preis bei x ME in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie, bei welcher Menge der maximale Gewinn erreicht wird.
– Ermitteln Sie die Durchschnittskosten für die gewinnmaximierende Menge.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man die langfristige Preisuntergrenze berechnen kann.

b) Für ein anderes Produkt wurde eine fehlerhafte Kostenfunktion erstellt:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 96 \cdot x + 9000$$

– Erklären Sie mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion K', warum diese Kostenfunktion keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ist.

USB-Sticks (B_191)

a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	–1,4	6,4	1,4

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
– Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
– Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

b) Die Erlösfunktion E beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$$

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von x ME

– Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
– Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall [9; 15].
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für ein lokales Maximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x an, die diese Kriterien erfüllt. *[1 aus 5]*

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) bei einem Absatz von x in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	☐

Zahnpasta (2) * (B_307)

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

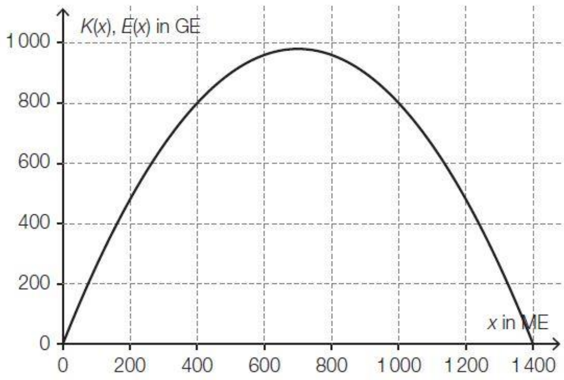
– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Kosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



– Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

– Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Mixer * (B_282)

a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Anzahl der verkauften Stabmixer
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss.
2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.
4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1.

c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist.
2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. *[1 aus 5]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐

Handyverkauf (B_218)

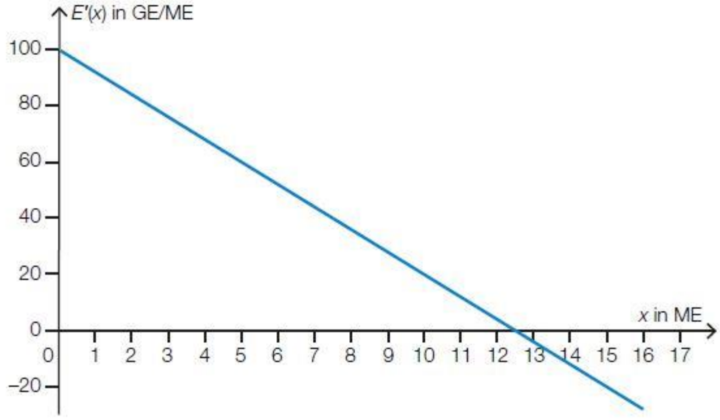
b) Der erzielbare Gewinn für ein Handymodell kann mithilfe der Funktion G beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 175 \cdot x - 1750$

x … verkaufte Menge in ME
$G(x)$ … erzielter Gewinn in GE beim Verkauf von x ME

– Berechnen Sie, ab welcher Verkaufsmenge Gewinn erzielt wird.
– Berechnen Sie den maximal erzielbaren Gewinn.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Grenzerlösfunktion E' für den Verkauf eines anderen Handymodells dargestellt.



– Lesen Sie aus der Abbildung diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der maximale Erlös erwirtschaftet wird.
– Erklären Sie, wie man ohne Integration mithilfe der Abbildung den maximalen Erlös berechnen kann.
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.

Zeitschriften (1) * (B_461)

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

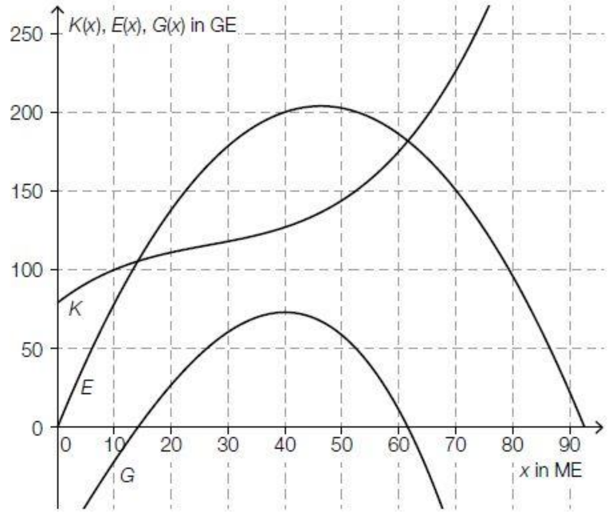
1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K.

3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K.

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge.

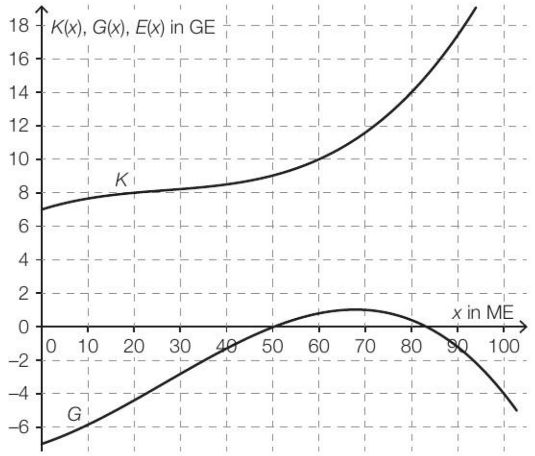
c) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen * (B_490)

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein.

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{max} ab.

$G_{max} \approx$ ______________________ GE

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$p_N(x) = a \cdot x + b$

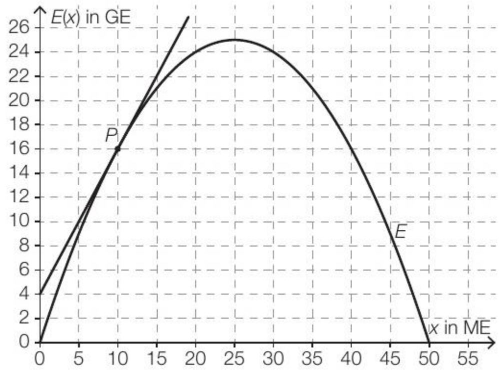
x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. *[1 aus 5]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b-a$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.



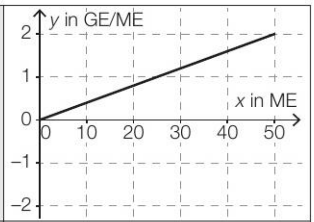
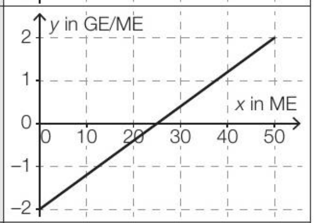
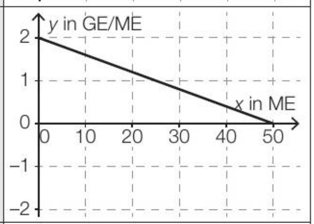
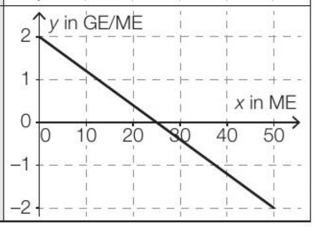
1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

k = ______________________ GE/ME

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.

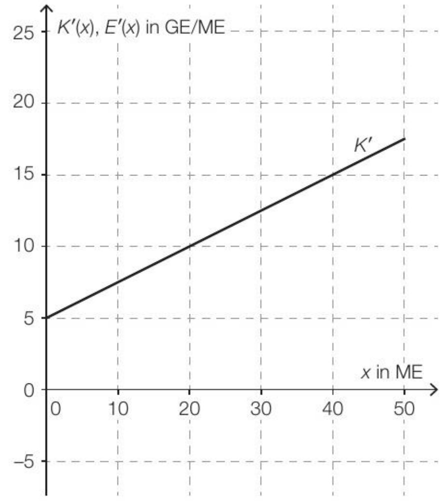
3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	

A	
B	
C	
D	

Scharniere * (B_503)

a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K'.

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

x ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall [0; 50] ein.

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös.

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$

x ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$

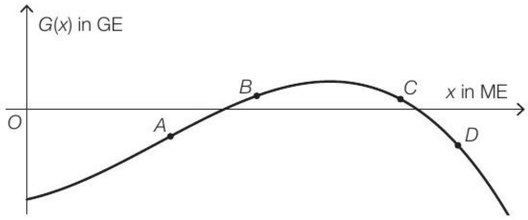
$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$

$x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A, B, C und D eingezeichnet.



1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$

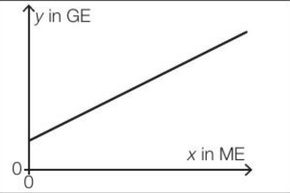
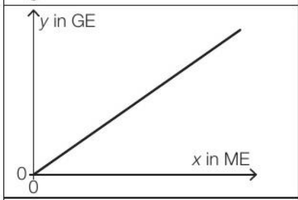
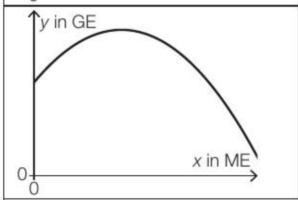
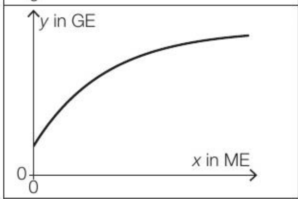
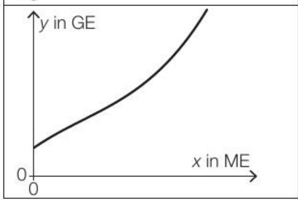
x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.
2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

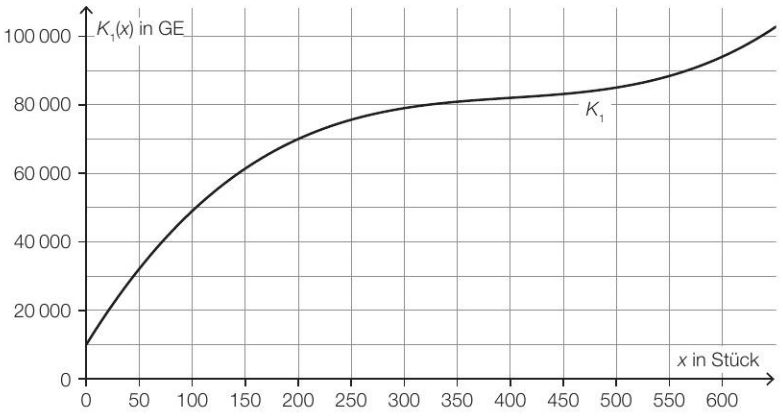
Moebel * (B_513)

a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.
2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$K_2(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$
x ... Produktionsmenge in Stück
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35000 GE.

1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2.
2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

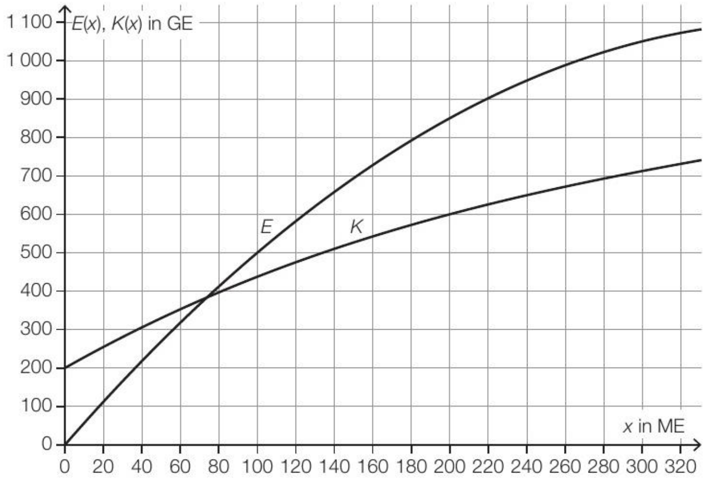
3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Martiniglaeser * (B_523)

c) Beim Verkauf von Martinigläsern geht man von einem linearen Zusammenhang zwischen dem Preis in GE/ME und der Verkaufsmenge in ME aus.
Bei einem Preis von 5,00 GE/ME können 100 ME verkauft werden. Sinkt der Preis um 1,50 GE/ME, können um 200 ME mehr verkauft werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



2) Lesen Sie diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der Gewinn 250 GE beträgt.

______________________ ME

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Erlös bei einer Verkaufsmenge von 100 ME beträgt 500 GE.	☐
Die Fixkosten betragen 200 GE.	☐
Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend.	☐
Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☐
Für die zugehörige Stückkostenfunktion $\overline{K}$ gilt: $\overline{K}(200) = 3$.	☐

Farben und Lacke * (B_539)

a) Die Gesamtkosten für die Produktion von Acrylfarbe werden durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

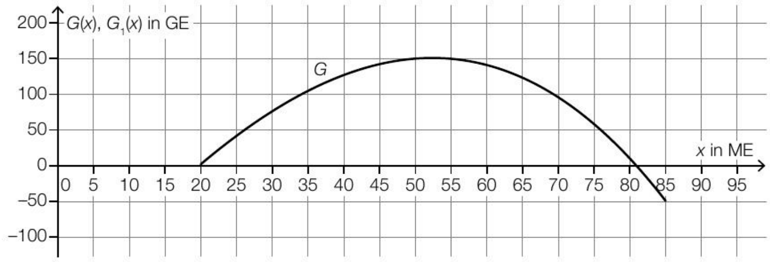
1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn ______①______ ist, dann kann K keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, weil in diesem Fall ______②______.

①	
$b < 0$	☐
$c < 0$	☐
$b < c$	☐

②	
die Fixkosten negativ sind	☐
keine Kostenkehre existiert	☐
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☐

b) Der Graph der Gewinnfunktion G für Acrylfarbe ist in der nachstehenden Abbildung im Intervall [20; 85] dargestellt.



x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten steigen um 50 GE. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben unverändert. Der Gewinn unter diesen veränderten Bedingungen wird durch die Gewinnfunktion G_1 beschrieben.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der neuen Gewinnfunktion G_1 im Intervall [20; 85] ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die untere Gewinngrenze ab, die sich unter diesen veränderten Bedingungen ergibt. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x … Absatzmenge in L
$p(x)$ … Preis bei der Absatzmenge x in €/L

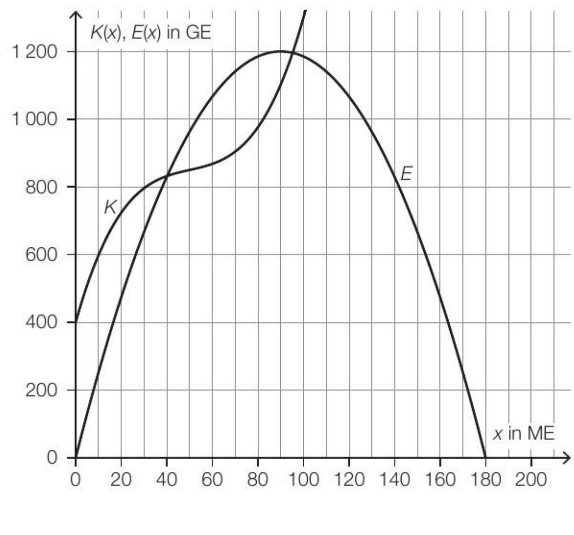
1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

Scheiben fuer PKWs * (B_527)

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf.

2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[________ ; ________]

b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

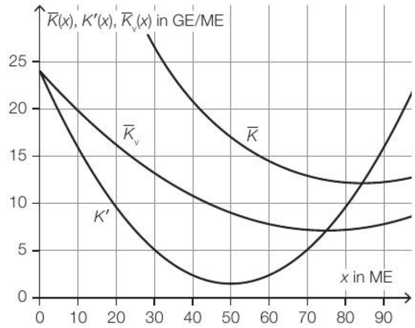
x ... produzierte Menge in ME

$K_v(x)$ ... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$, der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die nicht aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. *[1 aus 5]*

Kostenkehre	☐
Fixkosten	☐
Betriebsminimum	☐
Betriebsoptimum	☐
kurzfristige Preisuntergrenze	☐

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... nachgefragte Menge in ME

$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

3) Geben Sie den Höchstpreis an.

4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis.

Suesswarenproduktion * (B_545)

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x … Produktionsmenge in ME
$K_A(x)$ … Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE
$K_B(x)$ … Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

Für K_A gilt:
$K_A(x) = 0{,}0001 \cdot x^2 + 0{,}17 \cdot x + 200$

Für K_B gilt:
K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x + b$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.

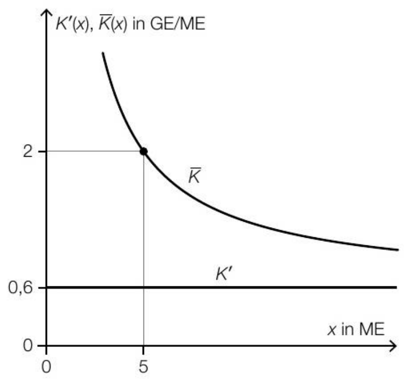


Abbildung 1

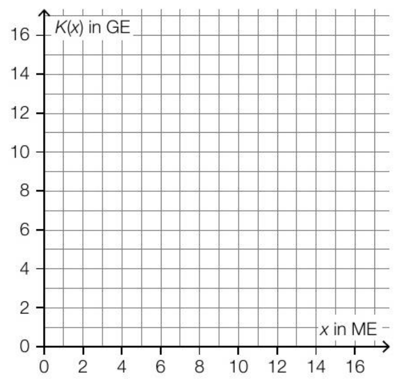


Abbildung 2

1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

$a =$ __________ GE/ME *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein. *[0/1 P.]*

Werkzeugproduktion * (B_569)

a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

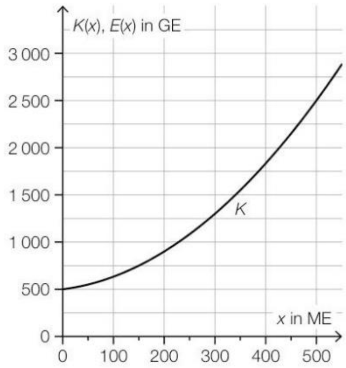
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann.

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein.



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: ____________________ ME

obere Gewinngrenze: ____________________ ME

4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht.

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang ______①______ gilt, dann ist ______②______.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	☐
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☐
$E(x_0) > K(x_0)$	☐

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	☐
$x_0 = 0$	☐
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☐

Parfumherstellung * (B_556)

a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME
c ... Parameter

1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

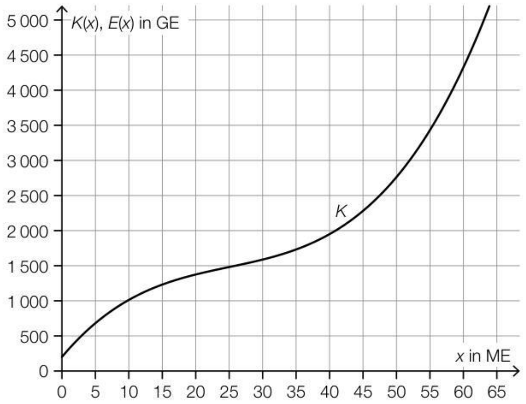
Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:
Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist.

Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.
Es gilt: $c = 80$

3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein.
2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_______ ; _______] (in ME)

c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$G(x) = -0{,}05 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird.
2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}0003 \cdot x^3 - 0{,}017 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 40$
$E(x) = 1{,}5 \cdot x$

x … produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0003 \cdot x^2 - 0{,}017 \cdot x + 0{,}4 + \frac{40}{x}$$

$$0{,}0006 \cdot x - 0{,}017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52{,}5$$

3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Muesli * (B_570)

d) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach einer bestimmten Müslisorte untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Packungen.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Packung beträgt die Nachfrage 80 Packungen.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

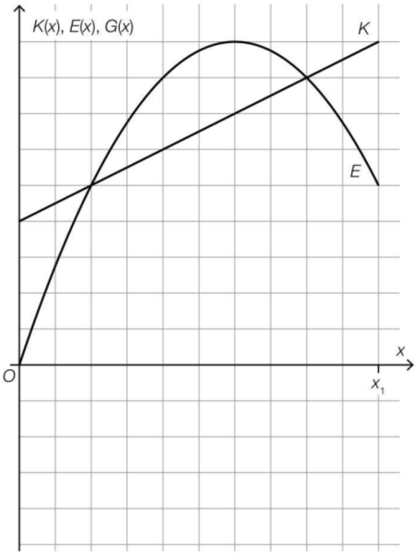
$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$
x ... Anzahl der nachgefragten Packungen
$p_N(x)$ ... Preis bei der Nachfrage x in Euro pro Packung

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Packung.

Heizungstechnik * (B_579)

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Erlösfunktion E für einen bestimmten Typ von Wärmepumpen dargestellt.



$K(x) = k \cdot x + d$
$E(x) = m \cdot x - n \cdot x^2$

x ... Anzahl der Wärmepumpen mit $0 \leq x \leq x_1$
$K(x)$ ... Kosten bei der Anzahl x
$E(x)$ ... Erlös bei der Anzahl x
k, d, m, n ... positive Koeffizienten

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall $[0; x_1]$ ein.

Die Gewinnfunktion G ist eine quadratische Funktion mit den Koeffizienten a, b und c.
$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

2) Geben Sie die Koeffizienten a und b der Gewinnfunktion G an. Verwenden Sie dabei k, m und n.

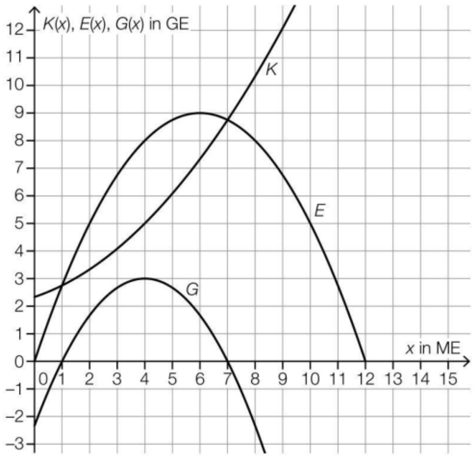
a = ____________________

b = ____________________

3) Zeigen Sie, dass der Scheitelpunkt der Gewinnfunktion G an der Stelle $x_S = \frac{m-k}{2 \cdot n}$ liegt.

Trinkflaschen * (B_580)

a) In der nachstehenden Abbildung sind für die Produktion von Trinkflaschen aus Glas die Graphen der Kostenfunktion K, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G dargestellt.



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung auf der x-Achse den Gewinnbereich.

2) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf.

3) Kreuzen Sie den Cournot'schen Preis an. *[1 aus 5]*

1 GE/ME	☐
2 GE/ME	☐
3 GE/ME	☐
4 GE/ME	☐
6 GE/ME	☐

b) Für Trinkflaschen aus Edelstahl ist die Kostenfunktion K bekannt:

$K(x) = 0{,}035 \cdot x^3 - 0{,}32 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x + 4$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten 2,8 GE/ME betragen.

2) Berechnen Sie die absolute Änderung der Gesamtkosten bei einer Steigerung der Produktion von 8 ME auf 9 ME.

3) Berechnen Sie die Kostenkehre.

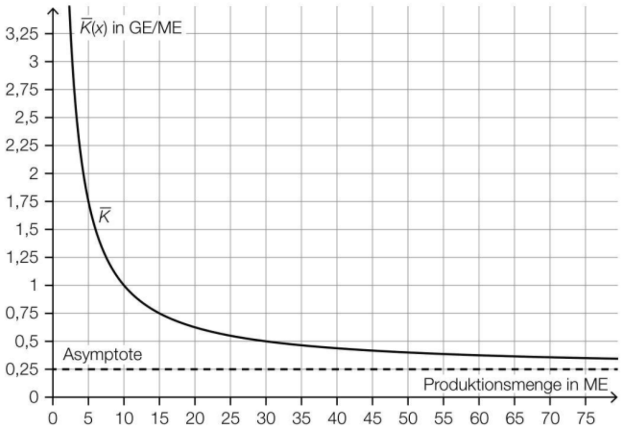
Kaffeegetränke * (B_577)

b) Die Kosten für die Produktion eines bestimmten Kaffeefertiggetränks können durch die Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = F + v \cdot x$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE
v … variable Stückkosten in GE/ME
F … Fixkosten in GE

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und die horizontale Asymptote von $\overline{K}$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die variablen Stückkosten v ab.

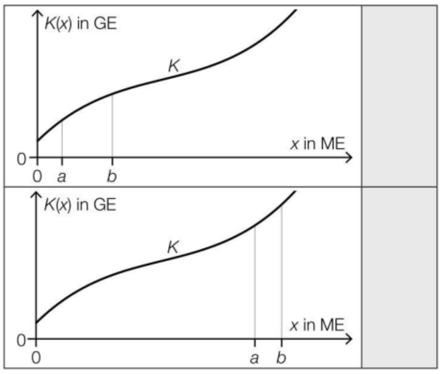
$v =$ __________________ GE/ME

Fahrradhelme * (B_594)

a) In den zwei unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Green Protection* dargestellt.

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.



A	Die Gesamtkosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.
B	Die Grenzkosten sind bei *a* ME geringer als bei *b* ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen *a* ME und *b* ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.

Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 18$

Bei einer Produktion von 40 ME betragen die Gesamtkosten 664 GE.

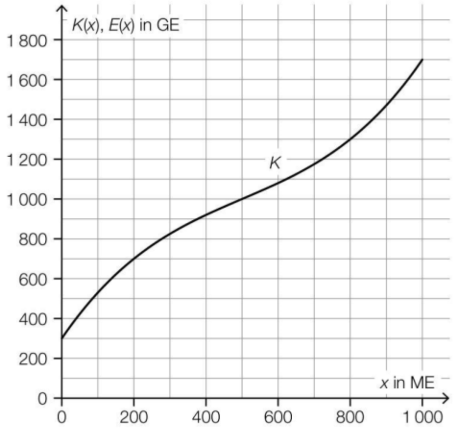
2) Berechnen Sie die Fixkosten.

b) Für die Erlösfunktion E für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* gilt:

$E(x) = -0{,}0045 \cdot x^2 + 5{,}45 \cdot x$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E im Intervall [0; 1 000] ein.

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Gewinn bei einem Absatz von 500 ME.

Es wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$\frac{E(700)}{700} = 2{,}3$

3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Das Ergebnis dieser Berechnung entspricht ______①______ bei einem Absatz von 700 ME in der Einheit ______②______.

①	
dem Grenzerlös	☐

②	
GE	☐

c) Für die quadratische Gewinnfunktion G für Fahrradhelme des Modells *Gold Protection* gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

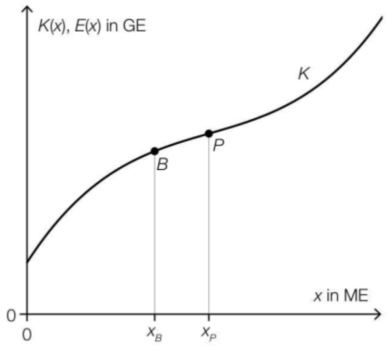
Die Fixkosten betragen 220 GE.
Der Break-even-Point liegt bei einem Absatz von 50 ME.
Der maximale Gewinn wird bei einem Absatz von 300 ME erzielt.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

Schreibtischlampen * (B_588)

c) Ein Betrieb stellt Schreibtischlampen her. Die zugehörige Gesamtkostenfunktion K ist eine Polynomfunktion 3. Grades (siehe nachstehende Abbildung).



x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Stelle x_B ist die Gewinnschwelle, die Stelle x_P ist die Kostenkehre.

1) Ordnen Sie den beiden Stellen x_B und x_P jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.

x_B	
x_P	

A	$K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$
B	$K'(x) > 0$ und $K''(x) = 0$
C	$K'(x) > 0$ und $K''(x) > 0$
D	$K'(x) < 0$ und $K''(x) > 0$

Die Schreibtischlampen werden zu einem fixen Preis pro ME verkauft.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein.

Bauteile * (B_604)

a) Die Kostenfunktion K für das Bauteil A ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

x ... produzierte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu.

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G für das Bauteil B gilt im Intervall [0; 25]:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6000$
$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1200 \cdot x - 6000$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE
$G(x)$ ... Gewinn bei der Menge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall der Produktionsmenge, in dem die Grenzkosten maximal 700 GE/ME betragen.

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsminimum ist. *[1 aus 5]*

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	☐
$12 \cdot x - 120 = 0$	☐
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	☐
$4 \cdot x - 60 = 0$	☐
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	☐

Für die Produktion des Bauteils B gilt:

1 ME = 10000 Stück
1 GE = 100 Euro

Es wird genau diejenige Menge produziert, bei der der Gewinn maximal ist.

3) Berechnen Sie den Gewinn pro Stück bei dieser Menge. Geben Sie das Ergebnis in Euro/Stück an.

Für die zugehörige Erlösfunktion E gilt: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

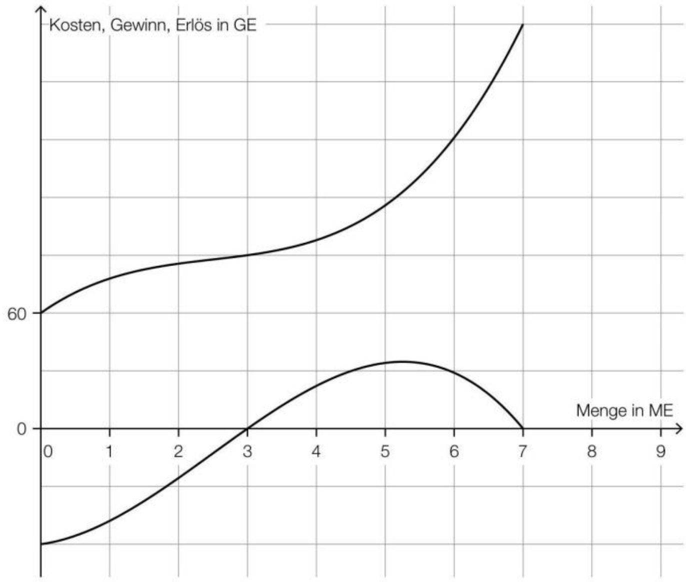
4) Ermitteln Sie die Parameter a, b und c.

a = ____________________

b = ____________________

c = ____________________

c) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion und der Graph der Gewinnfunktion für das Bauteil *C* dargestellt.



Die zugehörige Erlösfunktion ist linear.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion ein.

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem das Bauteil *C* verkauft wird.

d) Für die Preis-Absatz-Funktion für das Bauteil *D* gilt:

$p(x) = p_H - 20 \cdot x$

x ... abgesetzte Menge in ME
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in GE/ME
p_H ... Höchstpreis in GE/ME

Der Preis bei einem Verkauf von 5 ME beträgt 300 GE/ME.

1) Berechnen Sie den Höchstpreis p_H.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Preis-Absatz-Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

All Star Level

Grenzkosten (1) * (B_316)

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1060	7120	10340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1060 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

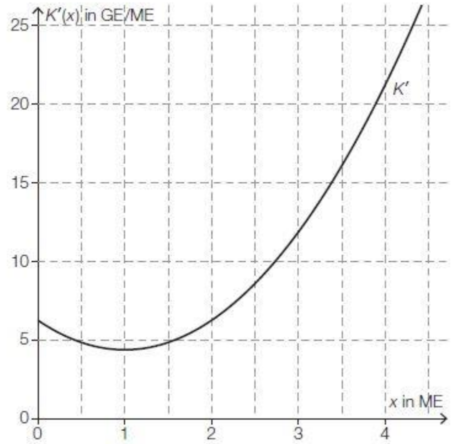
x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

– Berechnen Sie die Kostenkehre.

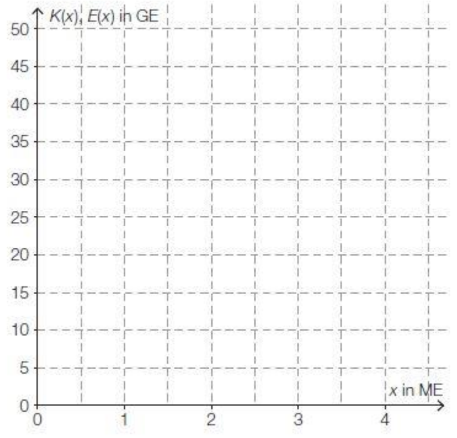
Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2372,50 GE.

– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.



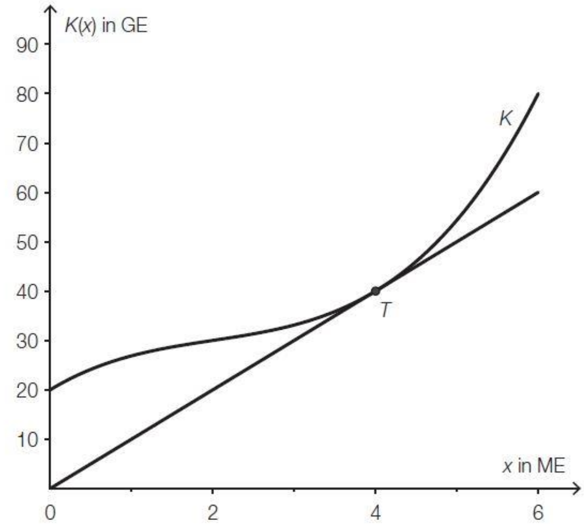
Kosten * (B_319)

a) Von einer kubischen Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Eigenschaften:

(1) Die Fixkosten betragen 4 GE.
(2) Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 2 124 GE.
(3) Das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME.
(4) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung dieser Kostenfunktion auf.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer anderen Kostenfunktion und die Tangente an diesen Graphen durch den Koordinatenursprung.

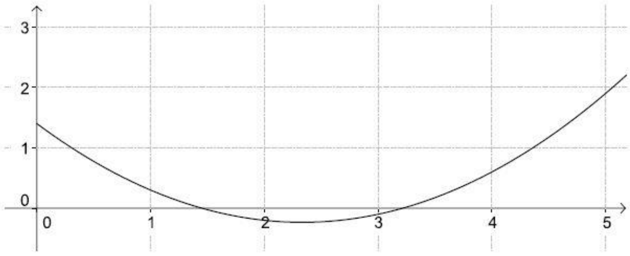


– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Berührpunktes T und der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

c) Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}6x^2 + 5x + 10$ für eine produzierte Menge von $0 \leq x \leq 6$ ME.

– Berechnen Sie die Kostenkehre.
– Geben Sie diejenigen Bereiche an, in denen der Kostenverlauf degressiv bzw. progressiv ist.

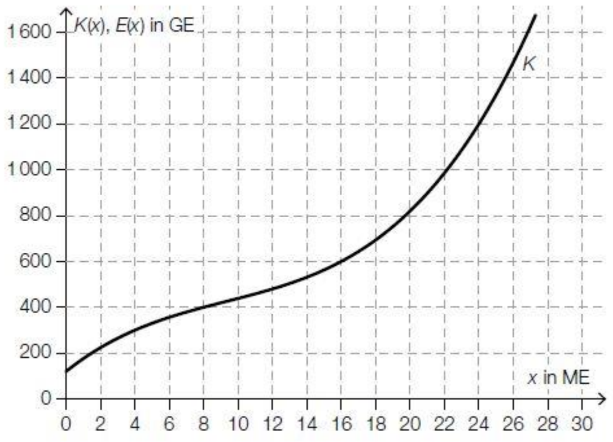
d) – Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in der nachstehenden Abbildung keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben kann.



Rohrproduktion * (B_089)

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G.

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an. *[1 aus 5]*

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
– Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Grenzkosten und Grenzerloes * (B_421)

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}115 \cdot x^2 + 5{,}2 \cdot x + 50$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
– Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

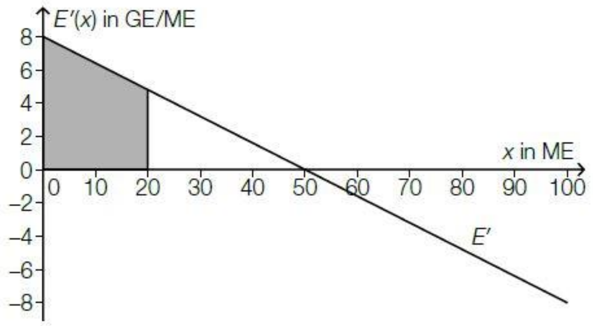
b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$
$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



– Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Fruchtsaftproduktion * (B_483)

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

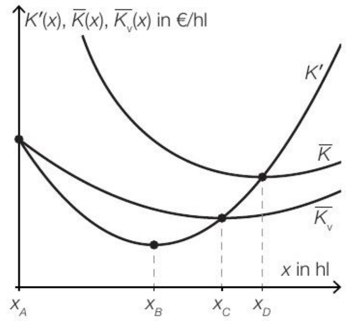
$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$

x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Der Koeffizient a muss ___①___ sein, weil der Graph von E ___②___.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Kuechengeraet * (B_557)

c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird.

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

x ... abgesetzte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf.

3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt.

Kompensationsprüfungsaufgaben

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

a) Die Kosten lassen sich näherungsweise durch die quadratische Funktion K modellieren.

$K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... produzierte Spielgeräte in ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten Spielgeräten in GE

Es gilt:

Die Fixkosten betragen 22 GE.
Bei 20 ME betragen die Kosten 40 GE.
Bei 20 ME beträgt die lokale Änderungsrate der Kosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von K.

b) Der Gewinn lässt sich näherungsweise durch die Funktion G beschreiben.

$G(x) = -\frac{11}{300} \cdot (x^2 - 70 \cdot x + 600)$

x ... verkaufte Spielgeräte in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x verkauften Spielgeräten in GE

1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion G.

c) Für ein bestimmtes x_0 gilt:

$E'(x_0) = 0$
$E''(x_0) < 0$

x ... verkaufte Spielgeräte in ME
$E(x)$ ... Erlös bei x verkauften Spielgeräten in GE

1) Interpretieren Sie die Bedeutung von x_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

BHS Oktober 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a) Für einen bestimmten Sportartikel ist die Ableitungsfunktion K' der Kostenfunktion K gegeben.

$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... 1. Ableitung der Kostenfunktion K bei x ME in GE/ME

Die Fixkosten betragen 4200 GE.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K auf.

b) Für einen anderen Sportartikel sind die Kostenfunktion K_1 und die Erlösfunktion E_1 gegeben.

$K_1(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 200$
$E_1(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 50 \cdot x$

x ... Anzahl der produzierten und verkauften ME
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei x ME in GE
$E_1(x)$ ... Erlös bei x ME in GE

1) Berechnen Sie den Gewinn bei $x = 70$ ME.

Lösungen

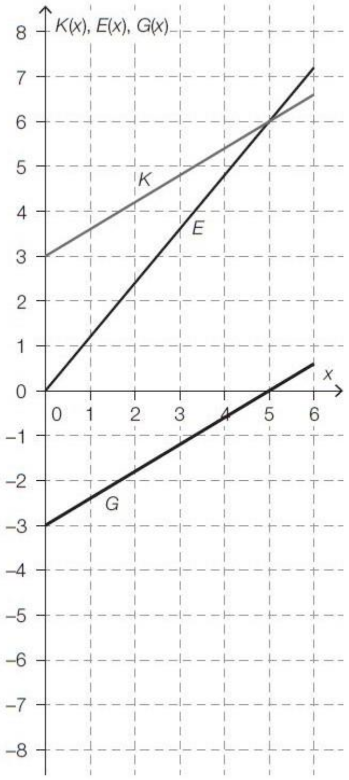
Grundkompetenzen

Lösungserwartung: Kosten und Erlös* - 1_669, FA1.5, Konstruktionsformat

Mögliche Interpretation:

Bei einer Produktionsmenge von 500 Mengeneinheiten sind die Kosten und der Erlös jeweils € 5.000.

Lösungserwartung: Gewinnfunktion* - 1_740, FA1.5, Konstruktionsformat



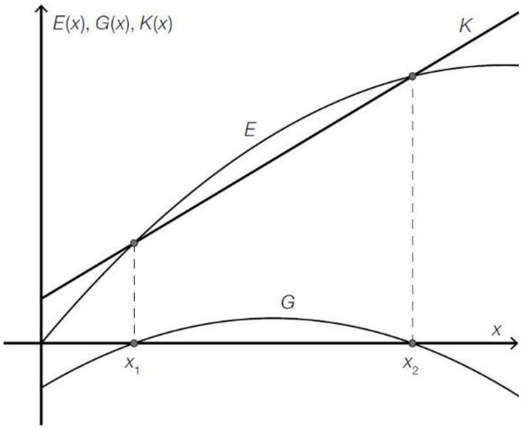
Lösungserwartung: Produktionskosten* - 1_412, FA1.5, Konstruktionsformat

Mögliche Interpretationen:

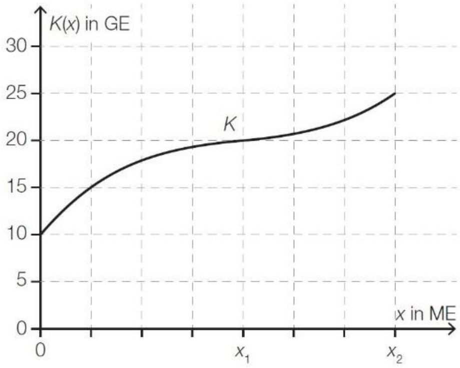
25 ... der Kostenzuwachs für die Produktion eines weiteren Stücks
... zusätzliche (variable) Kosten, die pro Stück für die Produktion anfallen

12000 ... Fixkosten
... jene Kosten, die unabhängig von der produzierten Stückzahl anfallen

Lösungserwartung: Kosten, Erlös und Gewinn* - 1_486, FA1.5, Konstruktionsformat



Lösungserwartung: Kostenfunktion* - 1_764, FA1.5, Konstruktionsformat



Lösungserwartung: Erlös und Gewinn* - 1_1228, AN1.3, 1 aus 6

Verkaufspreis: 2 €/kg

Fixkosten: 1.800 €

Lösungserwartung: Kosten eines Betriebs* - 1_1253, FA4.3, Offenes Antwortformat

$K(x) = 68\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 12$

Bei einer Produktionsmenge von 12 Tonnen sind die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten.

Lösung: Produktionskosten* (1_1282)

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3500 \cdot x + 200\,000$

Lösung: Grenzkosten und Gesamtkosten* (1_1333)

$K(110) - K(100) = \int_{100}^{110} K'(x)\,dx = 115\,505{,}233...$

Die Gesamtkosten steigen um € 115.505,23.

Rookie Level

Computerspiele (2) (B_151) Lösung

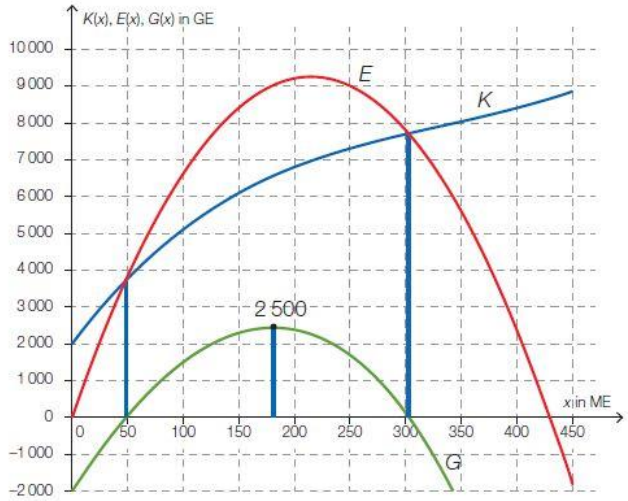
a) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}2x^2 + 86x$
$E'(x) = -0{,}4x + 86 = 0$
$x = 215$

Das Erlösmaximum wird bei 215 ME erzielt. Der Erlös beträgt dort 9245 GE.

b) $\int K'(x)\mathrm{d}x = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + F$ mit $F = 2000$
$K(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + 2000$

Die Zunahme der Kosten wird mit der Grenzfunktion $K'(x)$ beschrieben. In der Kostenkehre ist $K''(x) = 0$. Die Grenzkostenfunktion hat an dieser Stelle ein Minimum. Die Zunahme der Kosten ist an dieser Stelle minimal.

c) Die Gewinnfunktion ergibt sich durch grafische Subtraktion der Kostenfunktion von der Erlösfunktion.



Das Gewinnintervall liegt zwischen ca. 50 ME und 300 ME. *Ableseungenauigkeiten ± 20 sind zu tolerieren.*
Der maximale Gewinn beträgt rund. 2 500 GE. *Ableseungenauigkeiten ± 200 sind zu tolerieren.*

Erweiterung der Produktpalette (B_142) Lösung

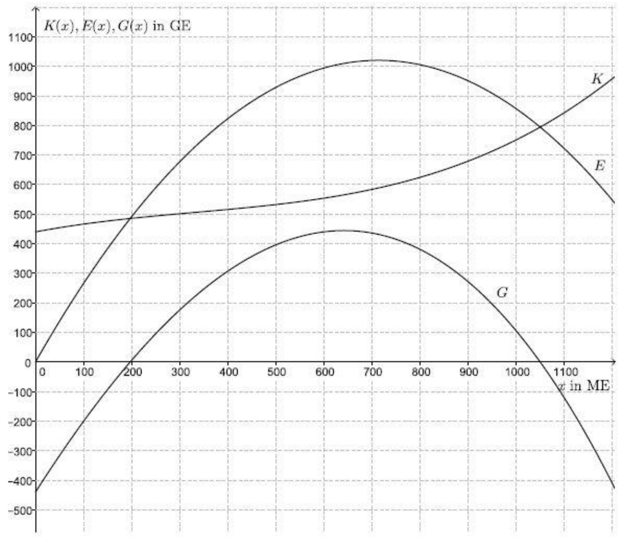
a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Kostenkehre: $600 \cdot a + 2 \cdot b = 0$
Grenzkosten: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = 0{,}3$
Fixkosten: $d = 5000$
Kosten für 250 Stück: $a \cdot 250^3 + b \cdot 250^2 + c \cdot 250 + d = 10000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001125$
$b = -0{,}3377\ldots$
$c = 34{,}0714$
$d = 5000$

Jungunternehmerin * (B_207) Lösung

b) Der Gewinnbereich liegt ca. zwischen 200 ME und 1 050 ME.
Ableseungenauigkeiten ± 50 ME sind zu tolerieren.



c) $K(x) = \int K'(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + c$
$K(2) = 72 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + c = 72$

$c = 4$

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 4$

Kreativ-Workshop * (B_383) Lösung

a) $p(x) = k \cdot x + d$

x … Nachfragemenge
$p(x)$ … Preis bei der Nachfrage x in € pro Kind

$23 = k \cdot 1050 + d$
$27 = k \cdot 990 + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$k = -\frac{1}{15}$, $d = 93$
$p(x) = -\frac{1}{15} \cdot x + 93$

b) $p(200) = -0{,}5 \cdot 200 + 220 = 120$

Der Preis, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind, beträgt € 120 pro Person.

Der Höchstpreis beträgt € 220 pro Person.

$p(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{220}{0{,}5} = 440$

Die Sättigungsmenge liegt bei 440 Personen.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 129 \cdot x - (0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4800) = -0{,}01 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 4800$

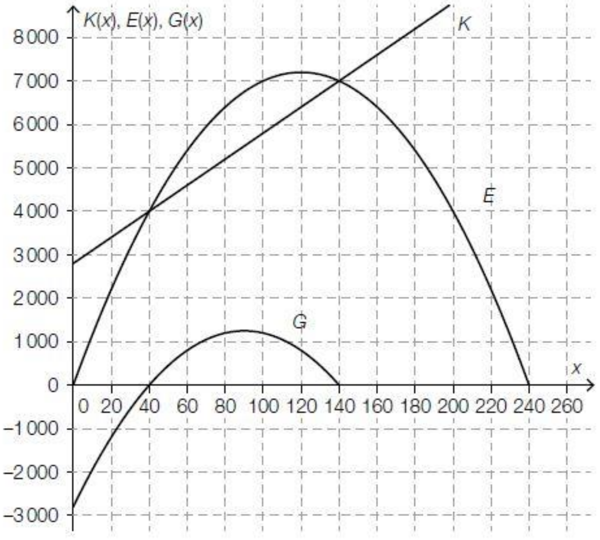
x … Anzahl der teilnehmenden Personen
$G(x)$ … Gewinn bei x Personen in €

$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x = 51{,}3\ldots$

Ab 52 teilnehmenden Personen wird Gewinn erzielt.

d) Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.



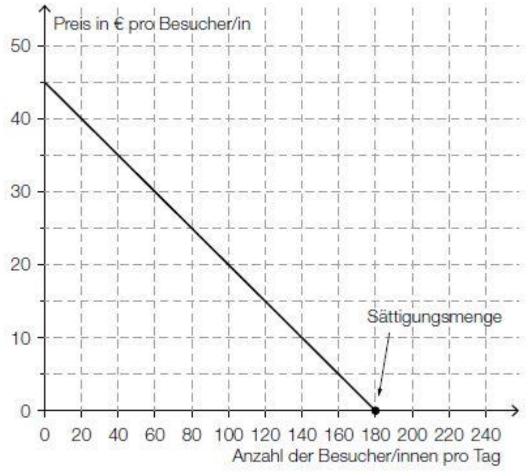
Die untere Gewinngrenze wird höher und die obere Gewinngrenze niedriger.

oder:

Der Gewinnbereich wird schmäler.

Kunst und Kaffee * (B_401) Lösung

a)



b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

c) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$

x … Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$E(x)$ … Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$
Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:
$-0{,}6 \cdot x + 33 = 0 \Rightarrow x = 55$
$G(55) = 407{,}50$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

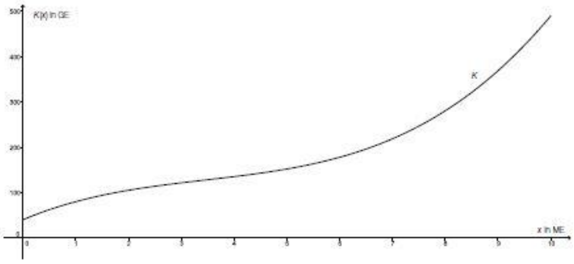
Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Produktion * (B_220) Lösung

a) $K(x) = 0{,}99 \cdot x^3 - 10{,}27 \cdot x^2 + 49{,}1 \cdot x + 40$

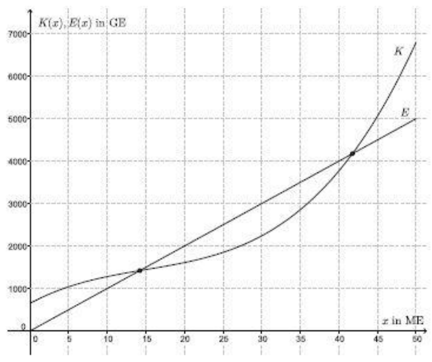


Im Bereich ab rund 3,5 ME liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.
Für die untere Grenze gilt folgender Ablesetoleranzbereich: [3; 4].

b) Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze:
– Bestimmung der variablen Stückkostenfunktion
– Stelle des Minimums der variablen Stückkostenfunktion berechnen (Betriebsminimum)
– Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion einsetzen
→ Ergebnis ist die kurzfristige Preisuntergrenze

c) $G(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 190$
maximaler Gewinn: 156,9 GE

d)



untere Gewinngrenze: ca. 14 ME, Ablesetoleranzbereich [12; 16]
obere Gewinngrenze: ca. 42 ME, Ablesetoleranzbereich [40; 44]

Maschinenring (B_182) Lösung

c)

Betriebsoptimum	C
Betriebsminimum	A

A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Traktoren-Steuerung (B_183) Lösung

a) $G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 - 4{,}97 \cdot x^2 + 2999 \cdot x - 70000$
$G'(x) = -0{,}003 \cdot x^2 - 9{,}94 \cdot x + 2999$
$G'(x) = 0 \Rightarrow x = 278{,}3\ldots$
Das Gewinnmaximum liegt bei 278 Stück.

$p(x) = -5 \cdot x + 3000$

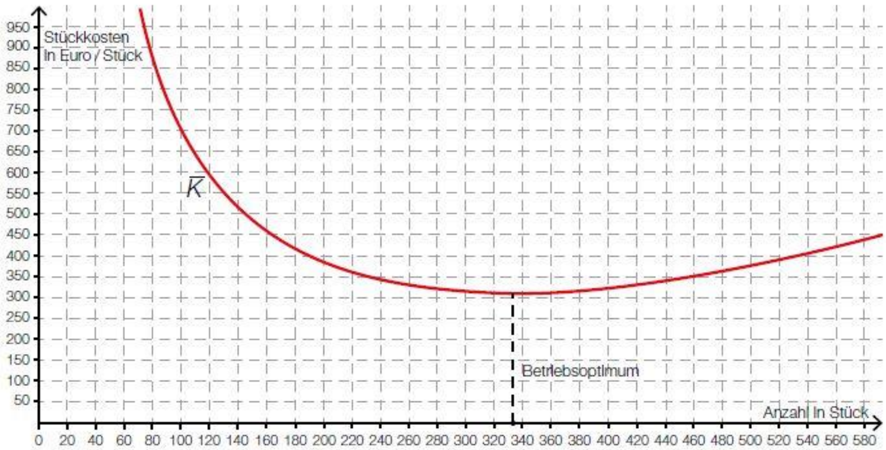
Ermittlung der Gewinnfunktion G als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$

Berechnung der Maximumstelle x_C von G:
Lösen der Gleichung $G(x_C) = 0$ (wobei $G'(x_C) < 0$ gelten muss)

x_C ist die x-Koordinate des Cournot'schen Punktes.
Ermittlung der Preis-Absatz-Funktion p aus der Erlösfunktion: $p(x) = \frac{E(x)}{x}$
Der Funktionswert $p(x_C)$ ist die y-Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Der maximale Gewinn wird bei Produktion und Verkauf von x_C Stück zum Preis von € 1.610 pro Stück erzielt.

b)



Toleranzbereich für das Einzeichnen des Betriebsoptimums: [310; 350]

Produktion von Golfschlaegern (B_303) Lösung

a) Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}18 \cdot x + 273{,}98$ (Parameter gerundet)

Interpretation der Parameter:
$a \approx -0{,}18$: Bei einer Preissenkung um € 0,18 pro Stück steigt die Nachfrage um 1 Stück.
$b \approx 273{,}98$: Der Höchstpreis beträgt € 273,98.

b) Die Gewinngrenzen sind diejenigen Stückzahlen, bei denen die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion einander schneiden.

Man misst, bei welcher Stückzahl der senkrechte Abstand zwischen den Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion innerhalb der Gewinngrenzen am größten ist.

c) denjenigen x-Wert, für den $G'(x) = 0$ ist, in p_N einsetzen
Cournot'scher Punkt: $(427{,}20\ldots \mid 194{,}55\ldots)$ bzw., falls die x-Koordinate auf ganze Stück gerundet wird: $(427 \mid 194{,}6)$

Verkehrsbetriebe * (B_294) Lösung

a1) $E'(x) = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$

$E'(x) = 0$
$0 = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$
$x = 33$
$E(33) = 108{,}9$

Der maximale Erlös beträgt € 108,9 Millionen.
(Der Graph von E ist eine nach unten offene Parabel. Die Nullstelle der Ableitungsfunktion E' ist also eine Maximumstelle.)

a2) $p(x) = -0{,}1 \cdot x + 6{,}6$

a3) $p(33) = 3{,}3$

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 3,30 ist der Erlös maximal.

b1) Höchstpreis: € 6

b2) Die Sättigungsmenge ist diejenige Anzahl an nachgefragten Einzelfahrscheinen in Millionen, wenn der Einzelfahrscheinpreis € 0 beträgt.

c1) $p(0) = 7{,}8$
$p(48) = 1{,}8$
$p(50) = 1{,}6$

oder:

$7{,}8 = c$
$1{,}8 = 2304 \cdot a + 48 \cdot b + c$
$1{,}6 = 2500 \cdot a + 50 \cdot b + c$

c2) Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0005;\ b = -0{,}149;\ c = 7{,}8$

Betonrohre* (B_452) Lösung

a1) $p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60$

x ... nachgefragte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in €/Stück

a2) Die Steigung $-\frac{1}{50}$ gibt an, dass eine Preisreduktion um € 1 pro Stück zu einer Erhöhung der nachgefragten Menge um 50 Stück führt.

oder:

Soll die nachgefragte Menge um 1 Stück gesteigert werden, muss der Preis um € 0,02 pro Stück gesenkt werden.

a3) $p(x) = 32$ *oder* $-\frac{1}{50} \cdot x + 60 = 32 \Rightarrow x = 1400$

Bei einem Preis von € 32 pro Stück ist mit einer nachgefragten Menge von 1 400 Stück zu

b1)

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	B
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	C

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

$K(0) = 150$
$K(20) = 530$
$K'(10) = 17$
$\overline{K}(30) = 22$

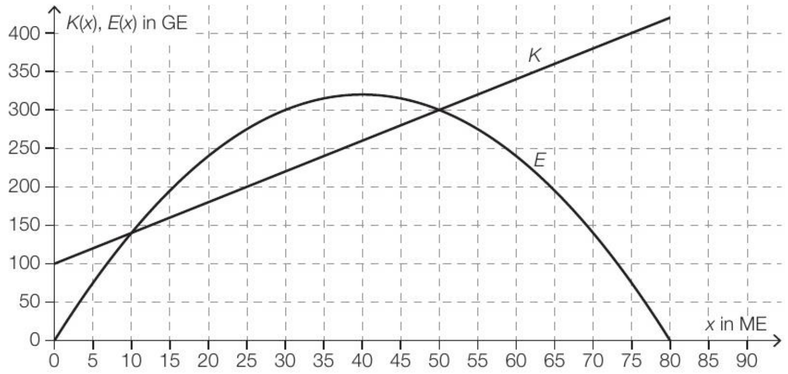
oder:

$d = 150$
$a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 530$
$3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + c = 17$
$a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c + \frac{d}{30} = 22$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}02$
$b = -1{,}2$
$c = 35$
$d = 150$

Wagenheber * (B_299) Lösung

b1)

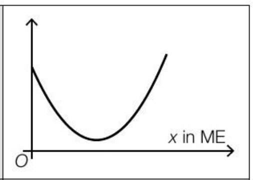
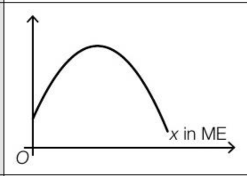
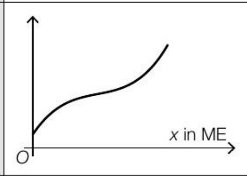
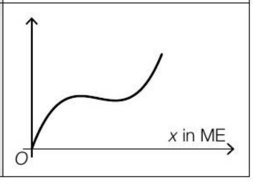


b2) Der maximale Gewinn beträgt 80 GE.
Toleranzbereich: [70; 90]

Rasenmaehroboter * (B_542) Lösung

c1)

Kostenfunktion K	C
Grenzkostenfunktion K'	A

A	
B	
C	
D	

Getraenke * (B_565) Lösung

a1) $p_N(x) = k \cdot x + d$

$k = -\frac{0,2}{200} = -0,001$

$p_N(2\,000) = 2,8$ *oder* $-0,001 \cdot 2\,000 + d = 2,8$

$d = 4,8$

$p_N(x) = -0,001 \cdot x + 4,8$

a2) $E(x) = p(x) \cdot x = -0,001 \cdot x^2 + 4,8 \cdot x$

$E'(x) = -0,002 \cdot x + 4,8$

$E'(x) = 0$ *oder* $-0,002 \cdot x + 4,8 = 0$

$x = 2\,400$

$E(2\,400) = 5\,760$

Der maximale Erlös beträgt € 5.760.

b1)

Kostenfunktion K	C
Stückkostenfunktion $\overline{K}$	B

A	Die Funktion ist konstant.
B	Die y-Achse ist eine Asymptote des Funktionsgraphen.
C	Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.
D	Der Funktionsgraph ist im gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).

Pro Level

Lackproduktion * (B_433) Lösung

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \quad \Rightarrow \quad 450 = d$
II: $K(8) = 522 \quad \Rightarrow \quad 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$
III: $K'(8) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$
IV: $K''(8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

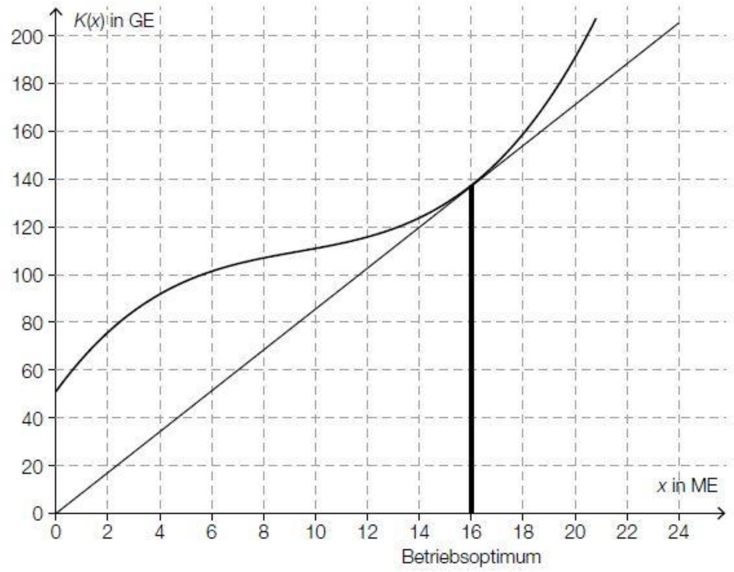
$a = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

$b = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

$c = 17$

$d = 450$

b)



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])
Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136\text{ GE}}{16\text{ ME}} = 8{,}5$ GE/ME
(Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}861 \cdot x + 24{,}169$ (Koeffizienten gerundet)

$E(x) = p_N(x) \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 14{,}037...$
$E(14{,}037...) = 169{,}632...$
Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

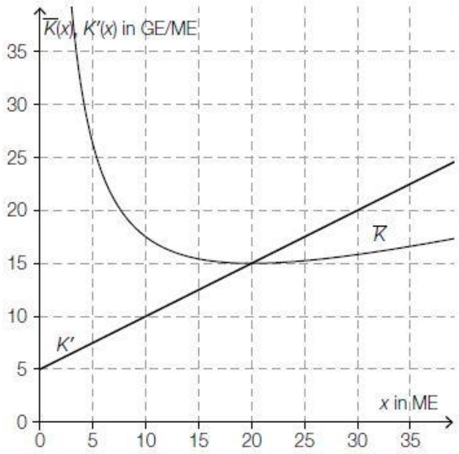
d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lampenproduktion (1) * (B_419) Lösung

a)



Betriebsoptimum: $x_{opt} = 20$ ME
Toleranzbereich: [18 ME; 22 ME]

$K(x) = \int (0{,}5 \cdot x + 5)\,dx =$
$= 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(20) = 20 \cdot 15 = 300$
$300 = 0{,}25 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 + C$
$C = 100$

Die Fixkosten betragen 100 GE.

b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639...$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360...$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

Buegeleisen * (B_217) Lösung

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$
$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

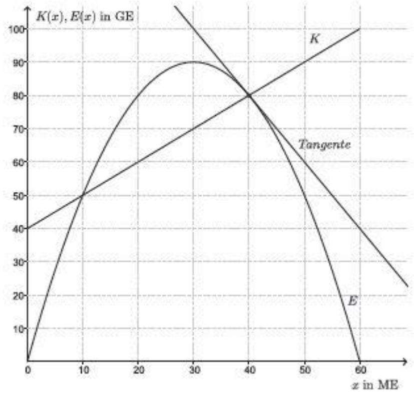
$G(x) = 50$
Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...$, $x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Papierproduzent * (B_281) Lösung

a) Kostenfunktion: $K(x) = x + 40$

Erlösfunktion: Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph der Erlösfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

b)



Steigung der Tangente: $k = -2$
Toleranzbereich: $[-2{,}5; -1{,}5]$

Wird die Absatzmenge um 1 ME erhöht, sinkt der Erlös näherungsweise um 2 GE.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$
An der Stelle des Gewinnmaximums gilt: $G'(x) = 0$.
$G'(x) = 0 = E'(x) - K'(x)$
Also: $E'(x) = K'(x)$.

Sportartikel * (B_348) Lösung

a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$
$G(50) = 450$
Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

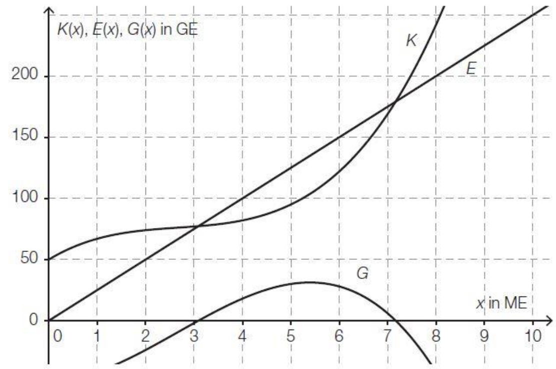
b) I. $K(0) = 2900$
II. $K''(5) = 0$
III. $K(5) = 3100$
IV. $K(9) = 3252{,}80$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 2900$

c) $K(x) = \int K'(x)\,dx = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(0) = 30 \Rightarrow C = 30$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME
Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]

d)



$E(x) = 25 \cdot x$

Tischlereibetrieb (B_269) Lösung

a) $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-\frac{10}{3} \cdot x + 875\right) \cdot x - \left(\frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000\right)$

$G(x) = -\frac{x^3}{300} - \frac{7}{3} \cdot x^2 + 675 \cdot x - 9000$

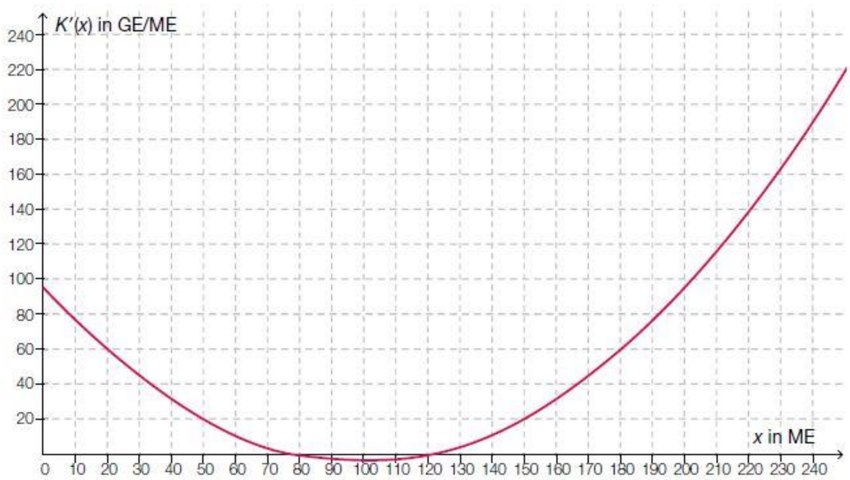
$G'(x) = -\frac{x^2}{100} - \frac{14}{3} \cdot x + 675 = 0 \Rightarrow x = 115{,}87\ldots$

Der maximale Gewinn wird bei rund 116 ME erzielt.

$\frac{K(x)}{x} = \frac{x^2}{300} - x + 200 + \frac{9000}{x} \Rightarrow \overline{K}(115{,}87\ldots) \approx 206{,}55$

Die Durchschnittskosten pro ME betragen rund 206,55 GE.

b) $K'(x) = \frac{x^2}{100} - 2 \cdot x + 96$



Der Funktionsgraph von K' kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sein, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

USB-Sticks (B_191) Lösung

a) Mit Einsetzen in $G(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:
$G(0) = -1{,}4$: $c = -1{,}4$
$G(10) = 6{,}4$: $10^2a + 10b = 6{,}4 + 1{,}4$
$G(20) = 1{,}4$: $\underline{20^2a + 20b = 1{,}4 + 1{,}4}$

Lösung mit Technologieeinsatz:
$a = -0{,}064 \quad b = 1{,}42 \quad c = -1{,}4$
Gewinnfunktion G mit: $G(x) = -0{,}064x^2 + 1{,}42x - 1{,}4$

$|c|$ gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die x-Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von G markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point".

b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.
Nullstellen der Erlösfunktion: $-1{,}25x^2 + 21x = 0$,
$x_1 = 0$ (untere Erlösgrenze), $x_2 = 16{,}8$ (obere Erlösgrenze) $\Rightarrow$ $D = [0; 16{,}8]$

mittlere Änderungsrate:
$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(15) - E(9)}{15 - 9}$

$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$
$E'(x) = -2{,}5x + 21 = 0$
$x = \frac{21}{2{,}5} = 8{,}4$
$E(8{,}4) = 88{,}2$

Der maximale Erlös beträgt 88,2 GE.

Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.

Zum Nachweis eines lokalen Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion an der berechneten Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor.
(Hinweis: Die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion an der Extremstelle wird vorausgesetzt.)

c)

[…]	
[…]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☒
[…]	
[…]	

Zahnpasta * (B_307) Lösung

a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1{,}8 \cdot 600 = 1080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

b) $p(0) = 3{,}15$: $3{,}15 = c$
$p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3{,}15$
$p(600) = 1{,}8$: $1{,}8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3{,}15$

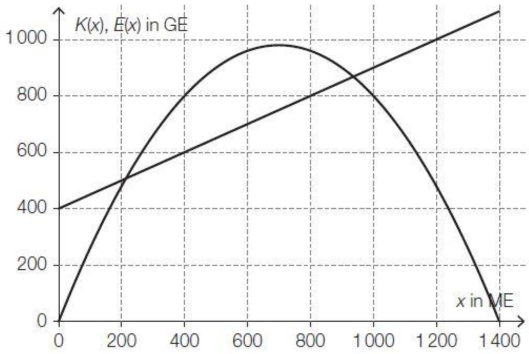
$a = 0{,}0000005$; $b = -0{,}00255$

$p(x) = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
$0 = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$
$x_1 = 2100$; $(x_2 = 3000)$

Die Sättigungsmenge liegt bei 2100 Tuben täglich.
Ein sinnvolles Intervall ist [0; 2100], da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)
Toleranzbereich: [450; 650]
Achtung: $x = 700$ ist falsch!

d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$
$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K_v(x)$ ... variable Kosten in GE
F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Mixer * (B_282) Lösung

a1) Der Parameter c muss null sein, da bei einem Absatz von null Stück auch der Erlös null ist.

a2) Erlös beim Absatz von 2000 Mixern: $2000 \cdot 65 = 130000$

$E(2000) = 130000$
$E(2500) = 131250$

oder:

$2000^2 \cdot a + 2000 \cdot b = 130000$
$2500^2 \cdot a + 2500 \cdot b = 131250$

a3) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$
$b = 115$

a4) $E(x) = 0$

oder:

$-0{,}025 \cdot x^2 + 115 \cdot x = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 4\,600$

Die Sättigungsmenge liegt bei 4600 Stück.

b1) $G(x) = 0$

oder:

$-0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 5$ ME (untere Gewinngrenze)
$x_2 = 32{,}9\ldots$ ME ≈ 33 ME (obere Gewinngrenze)

b2) $G'(x) = 0$

oder:

$-0{,}3 \cdot x^2 - 3{,}8 \cdot x + 200 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -32{,}9\ldots$)
$x_2 = 20{,}2\ldots$
$G(20{,}2\ldots) = 1\,500{,}504\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 1.500,50 GE

b3) $G_1(x) = G(x) + 200 = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 740$

c1) $K''(x) = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$

$K''(25) = 1{,}2 > 0$

Da die 2. Ableitung für 25 ME positiv ist, ist der Kostenverlauf dort progressiv.

c2)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☒

Handyverkauf (B_218) Lösung

b) Lösen der Gleichung $G(x) = 0$ mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -47{,}073\ldots$); $x_2 = 10{,}868$; $x_3 = 34{,}204\ldots$
Ab einer Verkaufsmenge von rund 10,87 ME wird Gewinn erzielt.

$G'(x) = -0{,}3 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 175$
Für die Verkaufsmenge des maximalen Gewinns gilt: $G'(x) = 0$
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x = 23{,}494\ldots$
$G(23{,}494\ldots) = 954{,}262\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 954,26 GE.

c) Die Stelle des maximalen Erlöses entspricht der Nullstelle der Grenzerlösfunktion.
Der maximale Erlös wird bei $x = 12{,}5$ ME erwirtschaftet.

Die Höhe des maximalen Erlöses entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Grenzerlösfunktion bis zur Nullstelle der Funktion. Dieser kann (ohne Integration) als Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks berechnet werden.
Die Fläche ist ein rechtwinkeliges Dreieck: $A = \frac{100 \cdot 12{,}5}{2} = 625$
Der maximale Erlös beträgt also 625 GE.

Zeitschriften (1) * (B_461) Lösung

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K(10) = 100$
$K'(10) = 1{,}5$

oder:

$10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + 79 = 100$
$3 \cdot 10^2 \cdot a + 2 \cdot 10 \cdot b + c = 1{,}5$

a2) Der Graph von K ist bei $x = 10$ rechtsgekrümmt (degressiv).

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001$
$b = -0{,}08$
$c = 2{,}8$

b1) $\frac{E(40)}{40} = \frac{200}{40} = 5$
Toleranzbereich: [4,8; 5,2]

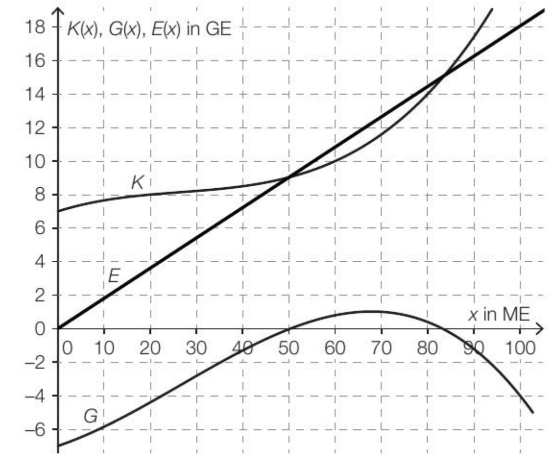
Der Preis bei dieser Absatzmenge beträgt 5 GE/ME.

c1)

$-\frac{p_h}{x_s}$	☒

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen * (B_490) Lösung

a1)



a2) $p = \frac{E(100)}{100} = \frac{18}{100} = 0{,}18$
Der Preis beträgt 0,18 GE/ME.
Toleranzbereich: [0,16; 0,20]

a3) $G_{max} \approx 1$ GE
Toleranzbereich: [0,8; 1,2]

b1)

$-\frac{b}{a}$	☒

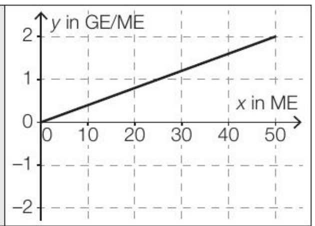
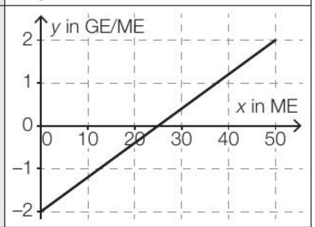
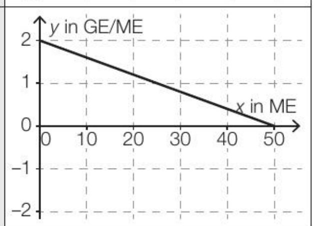
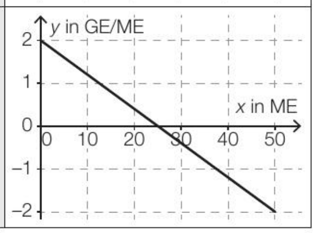
Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen

c1) $k = 1{,}2$ GE/ME

c2) Wird bei einem Absatz von 10 ME der Absatz um 1 ME erhöht, dann steigt der Erlös um rund 1,2 GE.

c3)

Grenzerlösfunktion E'	D
Preisfunktion der Nachfrage p_N	C

A	
B	
C	
D	

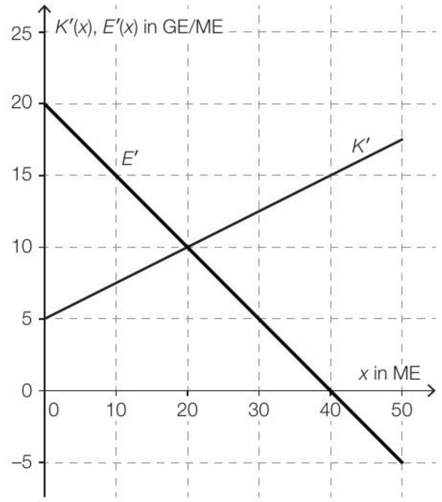
Scharniere * (B_503) Lösung

a1) $K'(x) = 0{,}25 \cdot x + 5$
x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE

a2) $K(x) = \int (0{,}25 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$

$K(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50$
$K(x) = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 50$

a3)



a4) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist diejenige Absatzmenge, bei der der Erlös maximal ist.

b1) Bei dieser Produktionsmenge handelt es sich um das Betriebsoptimum.

oder:

Bei dieser Produktionsmenge sind die Durchschnittskosten minimal.

b2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

c1)

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	B
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	D

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d1) $G(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50 = 0$

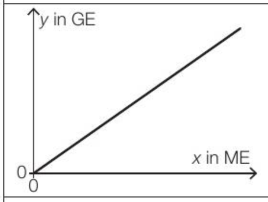
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 13{,}48...$ $\quad (x_2 = 27{,}83...;\ x_3 = -13{,}31...)$
Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 13,5 ME.

d2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}03 \cdot x^2 + 0{,}56 \cdot x + 1{,}75 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 21{,}39...$ $\quad (x_2 = -2{,}72...)$
$G(21{,}39...) = 17{,}67...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 17,7 GE.

Moebel * (B_513) Lösung

a1)

	☒

b1) Im Produktionsintervall [0; 400[ist der Verlauf der Kostenfunktion degressiv.
Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze [325; 475]
Auch die Angabe als abgeschlossenes oder offenes Intervall ist als richtig zu werten.

b2) $\overline{K}_1(200) = \frac{K_1(200)}{200} = \frac{70\,000}{200} = 350$
Die Stückkosten betragen 350 GE pro Stück.

b3) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion. Die Fixkosten fallen beim Ableiten als konstantes Glied weg.

c1) $0{,}001 \cdot 100^3 - 0{,}9 \cdot 100^2 + a \cdot 100 + 3\,000 = 35\,000 \quad \Rightarrow \quad a = 400$

c2) $\overline{K}_2(x) = \frac{K_2(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}9 \cdot x + 400 + \frac{3\,000}{x}$
$\overline{K}_2'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}9 - \frac{3\,000}{x^2}$
$\overline{K}_2'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 457{,}1\ldots$
Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktion von rund 457 Kommoden.

c3) $K_2(60) = 23\,976$
$p = \frac{23\,976}{60} = 399{,}6$
Der Preis beträgt 399,60 GE pro Kommode.

Martiniglaeser * (B_523) Lösung

c1) $p_N(x) = a \cdot x + b$
$p_N(100) = 5$
$p_N(300) = 3{,}5$

oder:

$a \cdot 100 + b = 5$
$a \cdot 300 + b = 3{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$p_N(x) = -0{,}0075 \cdot x + 5{,}75$

c2) 200 ME
Toleranzbereich: [190; 210]

c3)

Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☒

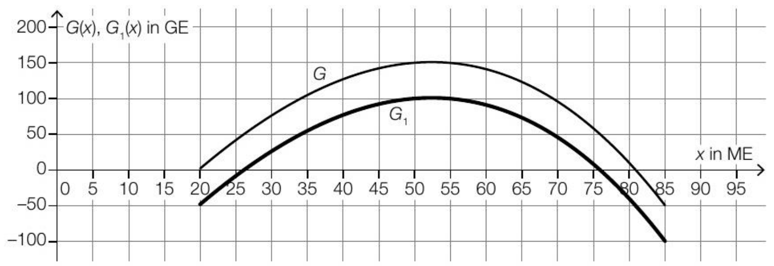
Farben und Lacke * (B_539) Lösung

a1)

①	
$c < 0$	☒

②	
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☒

b1)



b2) Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 26 ME.
Toleranzbereich: [25; 28]

c1) $p(x) = k \cdot x + d$
$p(0) = 60$
$d = 60$

$p(200) = 20$
$k \cdot 200 + 60 = 20$
$k = -0{,}2$

$p(x) = -0{,}2 \cdot x + 60$

c2) Die Steigung $-0{,}2$ gibt an, dass eine Preissenkung um 0,2 €/L zu einer Absatzsteigerung um 1 L führt.

oder:

Soll die Absatzmenge um 1 L gesteigert werden, so muss der Preis um 0,2 €/L gesenkt werden.

c3) $p(x) = 0$ *oder* $-0{,}2 \cdot x + 60 = 0$
$x = 300$

Die Sättigungsmenge beträgt 300 L.

Scheiben fuer PKWs * (B_527) Lösung

a1) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$E(180) = 0$
$E(90) = 1\,200$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 = 0$
$a \cdot 90^2 + b \cdot 90 = 1\,200$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{27} = -0{,}148...$

$b = \frac{80}{3} = 26{,}6...$

$E(x) = -\frac{4}{27} \cdot x^2 + \frac{80}{3} \cdot x$

a2) $p_N(x) = -\frac{4}{27} \cdot x + \frac{80}{3}$

a3) [40; 95]
Toleranzbereich für die obere Gewinngrenze: [93; 97]

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}0029 \cdot x^2 - 0{,}45 \cdot x + 24 + \frac{450}{x}$
$\overline{K}'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 87{,}678...$
$\overline{K}(87{,}678...) = 11{,}970...$

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt rund 11,97 GE/ME.

b2)

Fixkosten	☒

b3) Höchstpreis: 30 GE/ME

b4) $G(x) = p_N(x) \cdot x - K(x) = -0{,}0029 \cdot x^3 + 0{,}29 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 450$
$G'(x) = -0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6$

$G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -9{,}102...)$, $x_2 = 75{,}768...$
$p_N(75{,}768...) = 17{,}876...$

Der Cournot'sche Preis beträgt rund 17,88 GE/ME.

Suesswarenproduktion * (B_545) Lösung

a1) Wenn $K_A(x_1) = K_B(x_1)$ gilt, dann gilt auch $\frac{K_A(x_1)}{x_1} = \frac{K_B(x_1)}{x_1}$, daher sind die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch.

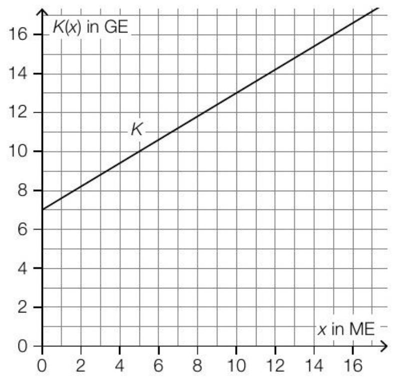
a2) $K_B(x) = 0{,}3 \cdot x + 260$

a3) $K_A'(x) = K_B'(x)$ *oder* $0{,}0002 \cdot x + 0{,}17 = 0{,}3$
$x = 650$

Bei einer Produktion von 650 ME sind die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch.

b1) $a = 0{,}6$ GE/ME

b2)



c1) $G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = -0{,}0003 \cdot x^3 + 0{,}017 \cdot x^2 + 1{,}1 \cdot x - 40$

c2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0009 \cdot x^2 + 0{,}034 \cdot x + 1{,}1 = 0$

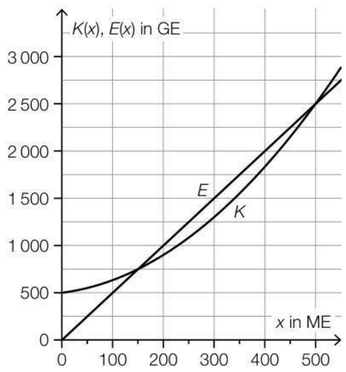
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 58{,}62\ldots$ $(x_2 = -20{,}84\ldots)$
$G(58{,}62\ldots) = 22{,}46\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 22,5 GE.

c3) Das Betriebsoptimum bei der Produktion von Schokolinsen liegt bei rund 52,5 ME.

Werkzeugproduktion * (B_569) Lösung

a1) $p = \frac{250 \text{ GE}}{50 \text{ ME}} = 5$ GE/ME
$p = \frac{605 \text{ GE}}{110 \text{ ME}} = 5{,}5$ GE/ME
Dies steht im Widerspruch dazu, dass der Schraubenzieher zu einem fixen Preis verkauft wird.

a2)



a3) untere Gewinngrenze: 150 ME
obere Gewinngrenze: 500 ME

Toleranzbereich: jeweils ±25 ME

a4)

①	
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☒

②	
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☒

Parfumherstellung * (B_556) Lösung

a1) $K''(x) = 0{,}3 \cdot x - 6$
$K''(x) = 0$ *oder* $0{,}3 \cdot x - 6 = 0$
$x = 20$

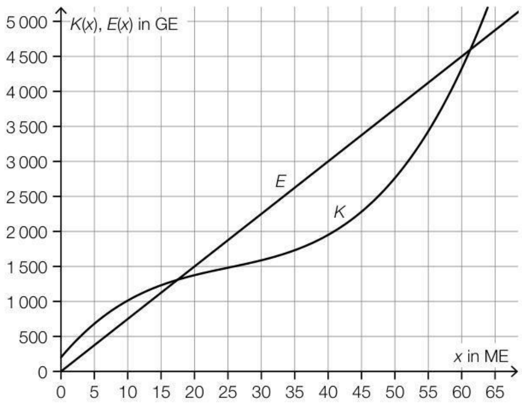
Für $x > 20$ liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.

a2) $0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c = 0$
$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot c}}{2 \cdot 0{,}15}$
Der Ausdruck unter der Wurzel muss kleiner als null sein:
$36 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot c < 0$
$c > 60$

Auch ein Nachweis, dass $K'(20) = 0$ für $c = 60$ gilt, ist im Hinblick auf die Punktevergabe ausreichend.

a3) $\int (0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 80)\,dx = 0{,}05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + F$
$F = 250$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 250$

b1)



b2) [17; 61] (in ME)

Toleranzbereich untere Grenze: [15; 19]
Toleranzbereich obere Grenze: [59; 63]

c1) $G(25) = 313{,}75$
$\frac{313{,}75}{25} = 12{,}55$
Bei einem Absatz von 25 ME beträgt der durchschnittliche Gewinn 12,55 GE/ME.

c2) $G'(x) = -0{,}15 \cdot x^2 + 4{,}8 \cdot x - 9$
$G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}15 \cdot x^2 + 4{,}8 \cdot x - 9 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 2 \quad x_2 = 30$
$(G(2) = -188{,}8)$
$G(30) = 360$

Der maximale Gewinn beträgt 360 GE.

Muesli * (B_570) Lösung

d1) $p_N(180) = 0$
$p_N(80) = 10$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 + 30 = 0$
$a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + 30 = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{1200} = 0{,}0008\dot{3}$

$b = -\frac{19}{60} = -0{,}31\dot{6}$

d2) $p_N(x) = 24$ *oder* $\frac{1}{1200} \cdot x^2 - \frac{19}{60} \cdot x + 30 = 24$

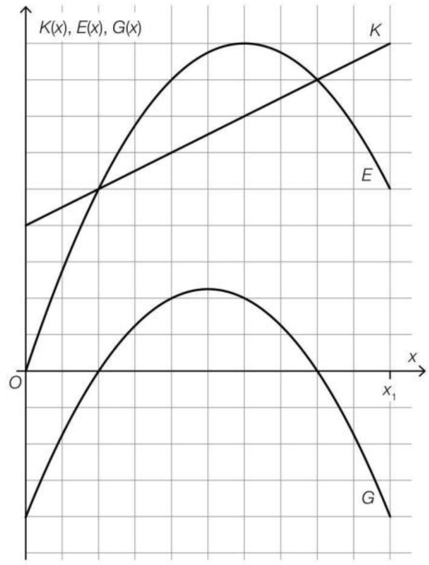
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 20$ $(x_2 = 360)$

Bei einem Preis von 24 Euro pro Packung werden 20 Packungen nachgefragt.

Lösung: Heizungstechnik * (B_579)

b1)



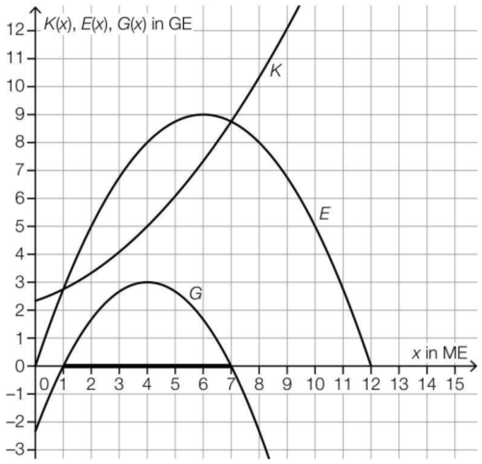
Im Hinblick auf die Punktevergabe ist das richtige Einzeichnen des Graphen der quadratischen Funktion G an den Stellen $x = 0$ und $x = x_1$ sowie an den beiden Nullstellen relevant.

b2) $a = -n$
$b = m - k$

b3) $G'(x) = -2 \cdot n \cdot x + m - k$
$G'(x_S) = 0$ *oder* $-2 \cdot n \cdot x_S + m - k = 0$
$x_S = \frac{m - k}{2 \cdot n}$

Lösung: Trinkflaschen * (B_580)

a1)



a2) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$E(12) = 0$
$E(6) = 9$

oder:

$a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 0$
$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 = 9$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}25$
$b = 3$

$E(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

a3)

2 GE/ME	☒

b1) $K'(x) = 0{,}105 \cdot x^2 - 0{,}64 \cdot x + 1{,}2$

$K'(x) = 2{,}8$ *oder* $0{,}105 \cdot x^2 - 0{,}64 \cdot x + 1{,}2 = 2{,}8$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 8$ $(x_2 = -1{,}90...)$

Bei einer Produktionsmenge von 8 ME betragen die Grenzkosten 2,8 GE/ME.

b2) $K(9) - K(8) = 3{,}355$

Die absolute Änderung der Gesamtkosten beträgt 3,355 GE.

b3) $K''(x) = 0{,}21 \cdot x - 0{,}64$

$K''(x) = 0$ *oder* $0{,}21 \cdot x - 0{,}64 = 0$
$x = 3{,}047...$

Die Kostenkehre liegt bei rund 3,05 ME.

Lösung: Kaffeegetränke * (B_577)

b1) $v = 0{,}25$ GE/ME

c1) $K_2''(x) = 0$ *oder* $\frac{6}{5\,000\,000} \cdot x - \frac{1}{1\,000} = 0$

$x = 833{,}3...$

Die Kostenkehre der Funktion K_2 liegt bei rund 833 ME.

c2) $E(x) = 0{,}5 \cdot x$

$G(x) = 0{,}5 \cdot x - K_2(x)$

$G(x) = 0$ *oder* $-\frac{1}{5\,000\,000} \cdot x^3 + \frac{1}{2\,000} \cdot x^2 - \frac{1}{10} \cdot x - 200 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -500)$

$x_2 = 1\,000$

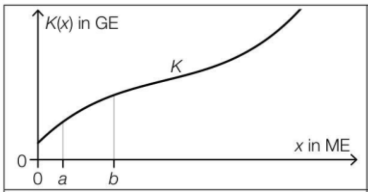
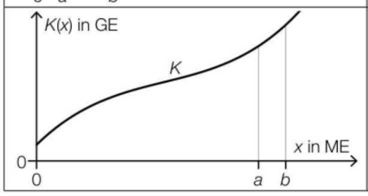
$x_3 = 2\,000$

Gewinnbereich: $[1\,000; 2\,000]$ (in ME)

Auch eine Angabe des Gewinnbereichs als $]1\,000; 2\,000[$ *ist als richtig zu werten.*

Lösung: Fahrradhelme * (B_594)

a1)

	D
	B

A	Die Gesamtkosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.
B	Die Grenzkosten sind bei *a* ME geringer als bei *b* ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen *a* ME und *b* ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.

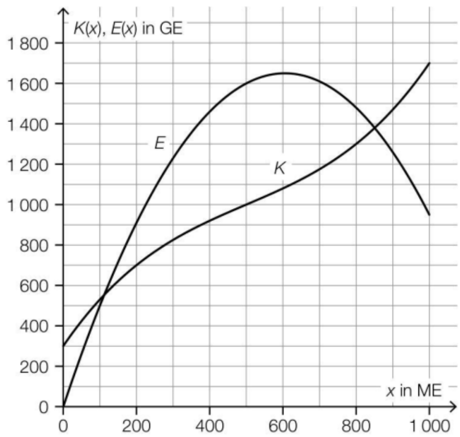
a2) $K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 18 \cdot x + F$

$K(40) = 664$ *oder* $0{,}001 \cdot 40^3 - 0{,}2 \cdot 40^2 + 18 \cdot 40 + F = 664$

$F = 200$ GE

Die Fixkosten betragen 200 GE.

b1)



b2) $G(500) = E(500) - K(500) = 600$

Toleranzbereich: $[570; 630]$

Der Gewinn bei einem Absatz von 500 ME beträgt rund 600 GE.

b3)

①	
dem Preis	☒

②	
GE/ME	☒

c1) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $G(0) = -220$
II: $G(50) = 0$
III: $G'(300) = 0$

oder:

I: $c = -220$
II: $2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 0$
III: $600 \cdot a + b = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}008$
$b = 4{,}8$
$c = -220$

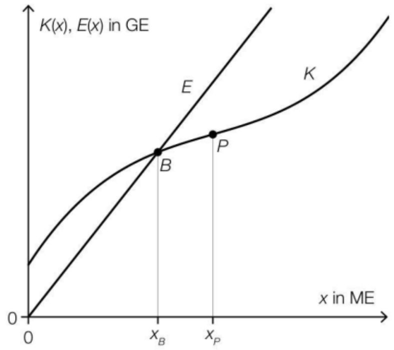
Lösung: Schreibtischlampen * (B_588)

c1)

x_B	A
x_P	B

A	$K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$
B	$K'(x) > 0$ und $K''(x) = 0$
C	$K'(x) > 0$ und $K''(x) > 0$
D	$K'(x) < 0$ und $K''(x) > 0$

c2)



Lösung: Bauteile * (B_604)

a1)

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	A
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	D

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b1) $K'(x) = 700$ *oder* $6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 700$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 0$
$x_2 = 20$

Im Intervall [0; 20] betragen die Grenzkosten maximal 700 GE/ME.

Die Angabe in Intervallschreibweise ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b2)

$4 \cdot x - 60 = 0$	☒

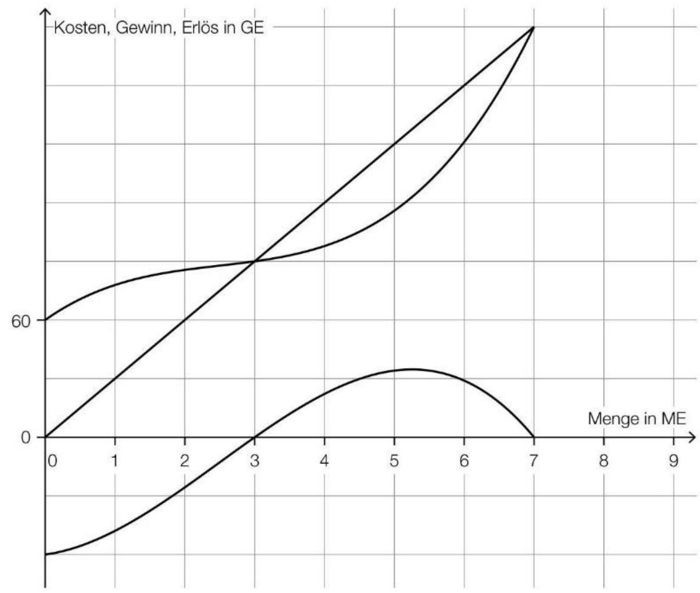
b3) $G'(x) = 0$ *oder* $-80 \cdot x + 1\,200 = 0$
$x = 15$

$G(15) = 3\,000$

15 ME = 150 000 Stück
3 000 GE = 300.000 Euro
$\frac{300.000 \text{ Euro}}{150\,000 \text{ Stück}} = 2$ Euro/Stück

b4) $a = 2$
$b = -100$
$c = 1\,900$

c1)



c2) $\frac{60}{2} = 30$
Der Preis beträgt 30 GE/ME.

d1) $300 = p_H - 20 \cdot 5$
$p_H = 400$ GE/ME

d2) Die Steigung –20 gibt an, dass eine Preissenkung um 20 GE/ME zu einer Absatzsteigerung um 1 ME führt.

oder:

Soll die abgesetzte Menge um 1 ME gesteigert werden, so muss der Preis um 20 GE/ME gesenkt werden.

All Star Level

Grenzkosten * (B_316) Lösung

a) Der Grenzkostenwert 1060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1060 GE führen wird.

$K'(20) = 1060$
$K'(50) = 7120$
$K'(60) = 10340$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$

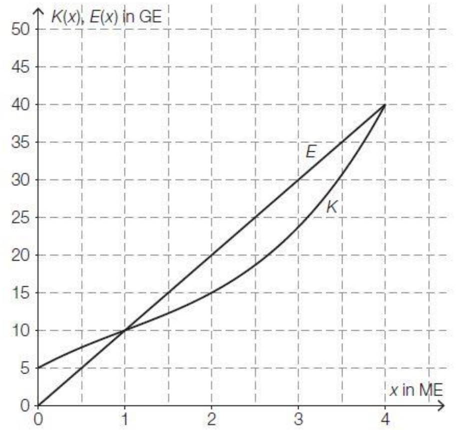
$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,dx = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$
$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2372{,}50 \Rightarrow C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Kosten * (B_319) Lösung

a) Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

(1) $K(0) = 4$: $d = 4$

(2) $K(10) = 2124$: $2124 = 1000a + 100b + 10c + d$

(3) $\overline{K}'(2) = 0$: $0 = 4a + b - \frac{d}{4}$

(4) $\overline{K}(2) = 14$: $14 = 4a + 2b + c + \frac{d}{2}$

b) Die x-Koordinate des Berührpunktes T ist das Betriebsoptimum.
Die Steigung dieser Tangente ist die langfristige Preisuntergrenze.

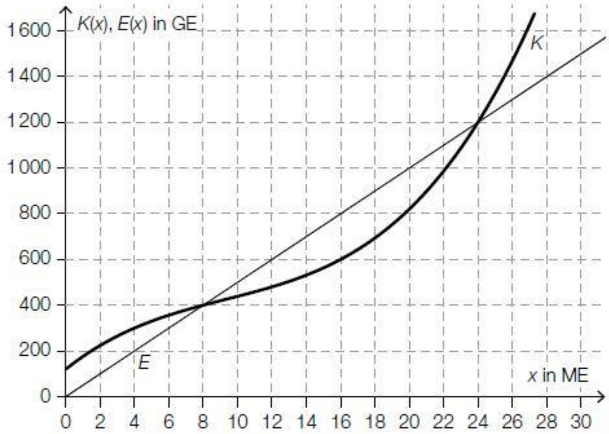
c) $K''(x) = 0$: $0{,}6x - 1{,}2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Die Kostenkehre liegt bei 2 ME.

Der Kostenverlauf ist für $x < 2$ ME degressiv.
Der Kostenverlauf ist für $x > 2$ ME progressiv.

d) Der gegebene Funktionsgraph kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

Rohrproduktion * (B_089) Lösung

a)



Marktpreis: 50 GE/ME

x in ME	0	8	16
G(*x*) in GE	**–120**	0	**200**

Toleranzbereiche:
$G(0)$: [–180; –100]
$G(16)$: [150; 250]

b) $K(x) = \int \left(\frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60\right) dx = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + F$

$K(16) = 600 \quad \Rightarrow \quad 600 = \frac{5}{32} \cdot 16^3 - \frac{35}{8} \cdot 16^2 + 60 \cdot 16 + F \quad \Rightarrow \quad F = 120$

$K(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 120$

$K''(x) = \frac{15}{16} \cdot x - \frac{35}{4}$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28}{3}$

Die Kostenkehre liegt bei rund 9,33 ME.

c)

$E(11) = 13{,}2$	☒

d) $p_N(x) = -3{,}2 \cdot x + 80$

x ... Absatzmenge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der Absatzmenge x in GE/ME

Höchstpreis: 80 GE/ME

Grenzkosten und Grenzerloes * (B_421) Lösung

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$
$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.
Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Fruchtsaftproduktion * (B_483) Lösung

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ *oder* $1\,875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0{,}04$; $b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	☒

②	
nach unten geöffnet ist	☒

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.
Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

d1) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 29{,}280...$ ($x_2 = -62{,}613...$)

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

d2) $G(x) = \int (-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220)\,dx = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$

Da $G(0) = -F$, gilt: $G(x) = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215$

d3) $G(x) = 1000$ *oder* $-0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215 = 1000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 11{,}565...$ $x_2 = 44{,}950...$ ($x_3 = -106{,}516...$)

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Kuechengeraet * (B_557) Lösung

c1) $20 \cdot 1430 - 28000 = 600$

Der Gewinn beim Verkauf von 1 430 Stück beträgt 600 Euro, daher wird der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht.

c2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$p(x) = 64{,}7 \cdot e^{-0{,}00083 \cdot x}$ *(Parameter gerundet)*

c3) Die Sättigungsmenge ist die Nullstelle der Preis-Absatz-Funktion. Da hier ein exponentielles Modell gewählt wurde, gibt es keine Nullstelle.

Kompensationsprüfungsaufgaben

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

a1) $K'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $K(0) = 22$
II: $K(20) = 40$
III: $K'(20) = 1{,}5$

oder:

I: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 22$
II: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 40$
III: $2 \cdot a \cdot 20 + b = 1{,}5$

b1) $G(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 10,\ x_2 = 60$

c1) Der maximale Erlös wird bei x_0 (in ME) Spielgeräten erzielt.

BHS Oktober 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a1) $K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 20 \cdot x + C = x^3 - 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + C$
$K(0) = 4\,200$
$C = 4\,200$

$K(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 4\,200$

b1) $G_1(x) = E_1(x) - K_1(x) = -0{,}26 \cdot x^2 + 40 \cdot x - 200$
$G_1(70) = 1\,326$

Der Gewinn bei 70 ME beträgt 1 326 GE.