Aufgabensammlung

Integralmittelwerte

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Integralmittelwerte

Rookie Level

Datenuebertragung (B_266)

c) Die Downloadgeschwindigkeit (in MBit/s) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) kann im Zeitintervall [0; 60] näherungsweise durch eine Funktion d_L beschrieben werden.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Auf dem Laufband (2) * (B_458)

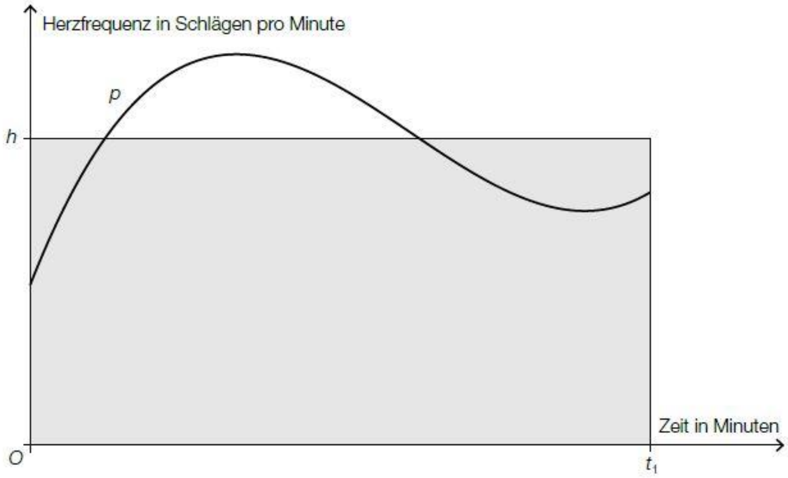
c) Der im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellte Verlauf kann im Zeitintervall [0 min; 25 min] durch die Funktion v beschrieben werden.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an.
$\frac{1}{25} \cdot \int_0^{25} v(t)\,dt$

Wings for Life World Run * (B_022)

b) Der zeitliche Verlauf der Herzfrequenz einer Läuferin kann näherungsweise durch eine Funktion p beschrieben werden.

Der Graph von p ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Flächeninhalt des grau markierten Rechtecks entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen von p im Intervall $[0; t_1]$.



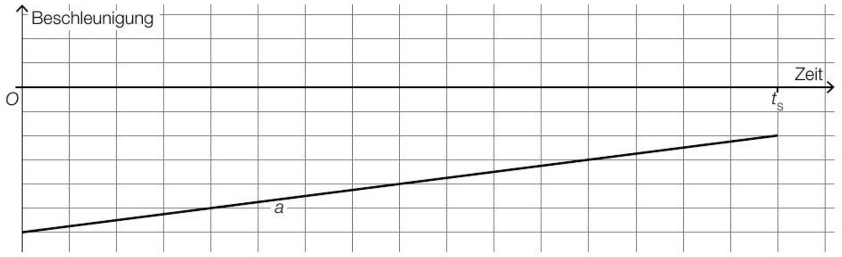
– Interpretieren Sie die Bedeutung von h im gegebenen Sachzusammenhang.
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung von h, wenn die Funktion p bekannt ist.

h = ________________________________

Landung eines Flugzeugs * (B_544)

b) Die (negative) Beschleunigung eines Flugzeugs vom Aufsetzen ($t = 0$) bis zum Stillstand t_S kann modellhaft durch eine lineare Funktion a beschrieben werden (siehe unten stehende Abbildung).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den linearen Mittelwert $\overline{a}$ (Integralmittelwert) der Funktion a im Zeitintervall $[0; t_S]$ ein. *[0/1 P.]*



Pro Level

Elektrische Bauteile * (B_432)

c) Der zeitliche Verlauf der Spannung an einem Kondensator kann nach dem Einschalten des Stroms durch die Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}24}}\right)$$

t … Zeit nach dem Einschalten des Stroms in s
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t in Volt (V)

– Erklären Sie, ausgehend von der Funktionsgleichung für u, warum die Spannung des Kondensators für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 40 V geht.

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ steigt die Spannung am Kondensator von $u(t_1) = 5$ V auf $u(t_2) = 30$ V.

– Berechnen Sie den linearen Mittelwert der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der 1. Ableitung von u vorgelegt:

$$\frac{du(t)}{dt} = -40 \cdot e^{-\frac{t}{0{,}24}}$$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier missachtet wurde.

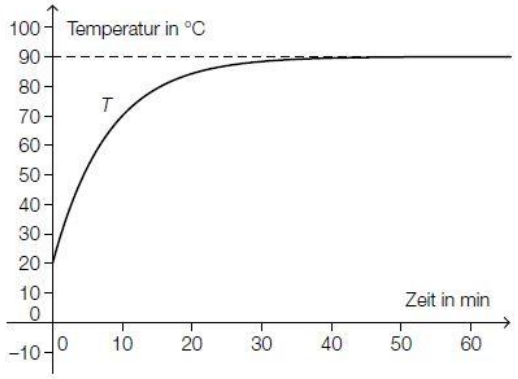
Kalt - warm (1) * (B_394)

a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

$$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20 \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a.
– Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t)\,dt = 60\ °C$$

Blut (B_372)

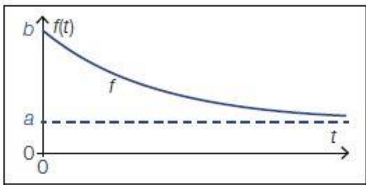
b) Bei der Verabreichung eines Medikaments lässt sich die Menge des Wirkstoffs im Blut näherungsweise durch die Funktion f beschreiben:

$f(t) = a - a \cdot e^{-b \cdot t}$

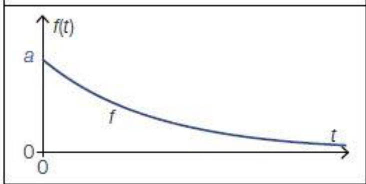
t … Zeit seit Beginn der Verabreichung des Medikaments in min
$f(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
$a > 0$, $b > 0$ … Konstanten

– Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:
$\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} f(t)\,dt$

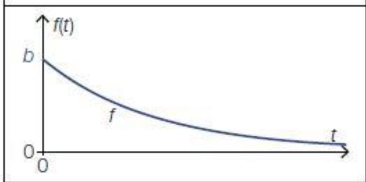
– Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, in der der Graph der Funktion f richtig dargestellt ist. *[1 aus 5]*



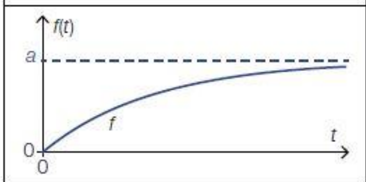
☐



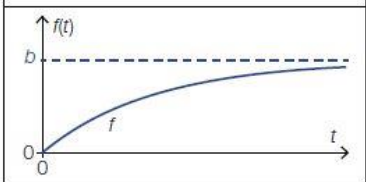
☐



☐



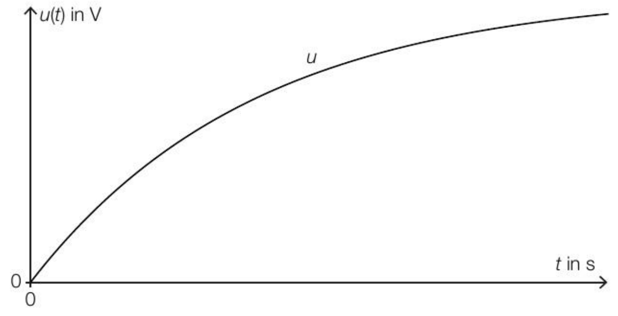
☐



☐

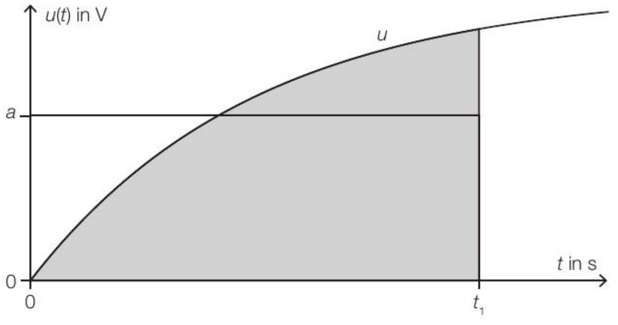
Kondensator * (B_496)

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Aufladevorgang dargestellt.



1) Markieren Sie diejenige Stelle, an der die 1. Ableitung von u im dargestellten Bereich den maximalen Wert annimmt.

Der Inhalt der grau markierten Fläche und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen t_1 und a sind gleich groß (siehe nachstehende Abbildung).



2) Beschreiben Sie die Bedeutung von a im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Erstellen Sie mithilfe der Funktion u eine Formel zur Berechnung von a.

$a =$ ____

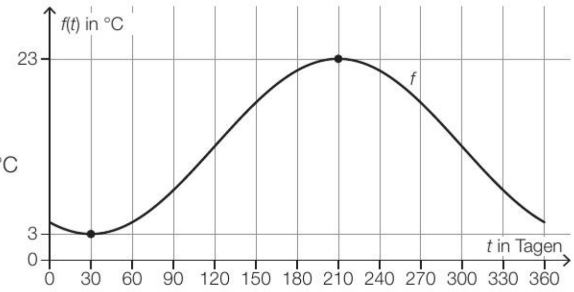
All Star Level

Attersee * (B_524)

a) Der zeitliche Verlauf der Temperatur des Attersees kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$$f(t) = a \cdot \sin\left(b \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + c \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 360$$

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a, b, c ... Parameter



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter b.

2) Ordnen Sie den beiden Größen jeweils den zutreffenden Zahlenwert aus A bis D zu.

Amplitude von f	
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	

A	10
B	12
C	13
D	23

Zur Zeit $t = 120$ betrug die tatsächlich gemessene Temperatur 12 °C.

3) Geben Sie den Betrag des absoluten Fehlers an, der entsteht, wenn man statt der tatsächlich gemessenen Temperatur den Funktionswert an der Stelle $t = 120$ verwendet.

Zur Überprüfung der Qualität der Modellfunktion f werden 1 000 Messwerte y_i der Temperatur zu verschiedenen Zeiten t_i erhoben.

Für jeden dieser Messpunkte $(t_i \mid y_i)$ wird die Differenz des Messwerts y_i zum Funktionswert $f(t_i)$ermittelt. Diese Differenzen werden jeweils quadriert und danach aufsummiert. Die so erhaltene Summe wird mit s bezeichnet.

4) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung von s.

$$s = \sum_{i=1}^{1000} \boxed{}$$

Lösungen

Rookie Level

Datenuebertragung (B_266) Lösung

c) Mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ wird die mittlere Downloadgeschwindigkeit im Zeitintervall [0; 60] berechnet.

Auf dem Laufband (2) * (B_458) Lösung

c1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit für die Trainingseinheit in m/min berechnet.

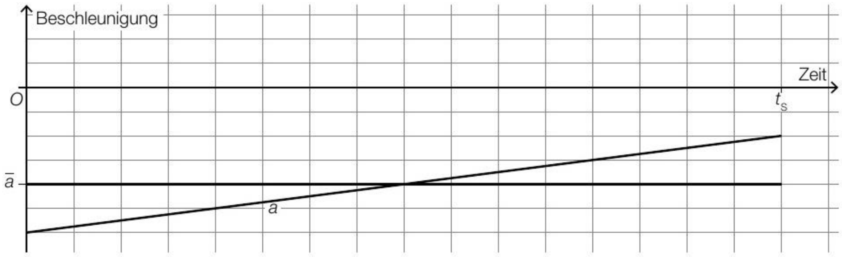
Wings for Life World Run * (B_022) Lösung

b) Die Seitenlänge h des Rechtecks stellt die mittlere Herzfrequenz im Zeitintervall $[0; t_1]$ dar.

$h = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} p(t)\,dt$

Landung eines Flugzeugs * (B_544) Lösung

b1)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der lineare Mittelwert nur auf der senkrechten Achse markiert ist.

Pro Level

Elektrische Bauteile * (B_432) Lösung

c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0,24}}$ für steigende Werte von t gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}04...$$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

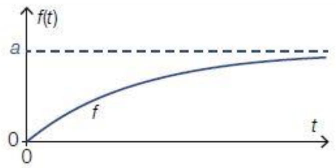
Kalt - warm (1) * (B_394) Lösung

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur 60 °C.

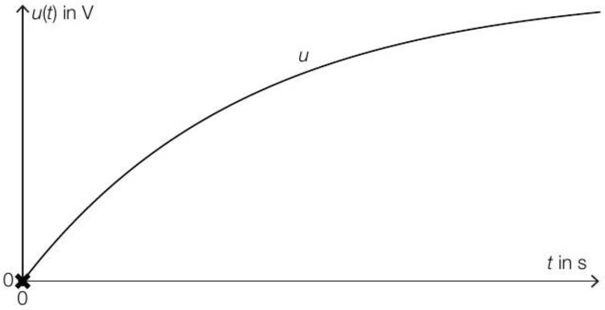
Blut (B_372) Lösung

b) Mit dem Ausdruck wird die durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut in der ersten halben Stunde nach Beginn der Verabreichung berechnet.

[...]	
[...]	
[...]	
	☒
[...]	

Kondensator * (B_496) Lösung

d1)



d2) a ist die mittlere Kondensatorspannung im Zeitintervall $[0; t_1]$.

d3) $a = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$

All Star Level

Attersee * (B_524) Lösung

a1) $\frac{T}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

a2)

Amplitude von f	A
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	C

A	10
B	12
C	13
D	23

a3) $|f(120) - 12| = 13 - 12 = 1$

Der Betrag des absoluten Fehlers beträgt 1 °C.

a4) $s = \sum_{i=1}^{1000} (y_i - f(t_i))^2 \quad \textit{oder} \quad \sum_{i=1}^{1000} (f(t_i) - y_i)^2$