Aufgabensammlung

Gozinto Graphen & Matrix

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Gozinto Graphen & Matrix

Rookie Level

Elektronische Geraete (B_367)

Für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Geräts benötigt man die Bausteine B_1, B_2 und B_3. Daraus werden eine Platine Z als Zwischenprodukt und 2 Geräte E_1 und E_2 als Endprodukte hergestellt. Zusätzlich erfüllt das Unternehmen die direkte Nachfrage nach Bausteinen B_2 und B_3 sowie dem Zwischenprodukt Z.
Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den Bausteinen, dem Zwischenprodukt und den Endprodukten. Der Produktionsvektor $\vec{x}$ beschreibt die benötigten Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten. (Alle Angaben in Stück.)

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & Z & E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

a) – Erklären Sie, was die Zahlen in der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ im gegebenen Sachzusammenhang bedeuten.

– Veranschaulichen Sie die in Matrix $\boldsymbol{A}$ beschriebene Produktionsverflechtung durch einen Gozinto-Graphen.

b) – Berechnen Sie, welche Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten direkt nachgefragt werden.

Die direkte Nachfrage nach B_2 und jene nach Z ändern sich: Der Absatz von B_2 wird halbiert, jener von Z vervierfacht, die Matrix $\boldsymbol{A}$ bleibt gleich.

– Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor $\vec{x_2}$.

– Beschreiben Sie die Veränderung der Produktionsmengen, die sich durch die geänderte Nachfrage ergibt.

c) B_1 kostet 0,90 €/Stück, B_2 0,70 €/Stück und B_3 0,80 €/Stück.

– Erstellen Sie den Vektor $\vec{r}$, der den Bedarf an den Bausteinen B_1, B_2 und B_3 für die Herstellung einer Platine Z beschreibt.
– Berechnen Sie die gesamten Kosten für die Bausteine, die bei der Herstellung einer Platine anfallen.

Konfiserie_1 (B_196)

Eine Konditorei möchte Pralinen aus Eigenproduktion anbieten. Um die Nachfrage abschätzen zu können, werden zunächst 4 verschiedene Bonbonnieren (B_1, B_2, B_3, B_4) aus 4 Sorten Pralinen (Marzipan, Nougat, Kokos, Krokant) angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Stück einer jeden Pralinensorte in jeder Bonbonniere enthalten sind:

		Bonbonnieren			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Pralinen-sorten	Marzipan	5	3	4	4
	Nougat	4	3	5	0
	Kokos	2	3	3	4
	Krokant	1	3	0	4

a) Aus 181 Marzipanpralinen, 142 Nougatpralinen, 144 Kokospralinen und 97 Krokantpralinen wurden Bonbonnieren zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Bonbonnieren der Sorten B_1, B_2, B_3 und B_4 mit diesen Pralinen hergestellt werden können.

b) In der folgenden Tabelle sind die Herstellungskosten pro Praline jeweils als Variable angegeben:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Kosten (in €)	K_1	K_2	K_3	K_4

Für die Verpackung fallen Materialkosten in Höhe von € 2,50 pro Bonbonniere an. Pro Bonbonniere wird ein Gewinn von 10 % berechnet.

– Erstellen Sie eine Formel in Matrizenschreibweise, mit deren Hilfe die Verkaufspreise P_1, P_2, P_3 und P_4 der Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4 berechnet werden können.
– Begründen Sie, wie viele Zeilen und Spalten die sich ergebende Matrix haben muss.

c) Die Glasur der Pralinen wird in 3 Typen aus unterschiedlichem Gehalt an Kakao, Zucker und Kakaobutter hergestellt. Jeweils 100 Gramm (g) einer Glasur enthalten die in der untenstehenden Tabelle angegebene Masse dieser Zutaten in g.

	Typ 1 (dunkel)	Typ 2 (mittel)	Typ 3 (hell)
Kakao	40	37	35
Zucker	30	40	45
Kakaobutter	30	23	20

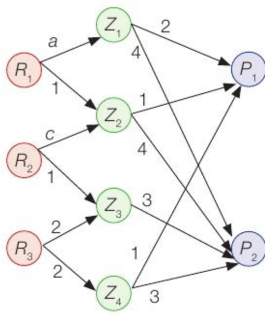
Für die Glasur von jeweils 50 Stück der verschiedenen Pralinensorten werden folgende Mengen (in Einheiten zu 100 Gramm) benötigt:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Typ 1				5
Typ 2	5	2		3
Typ 3	2	3	6	

– Erstellen Sie einen Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen den Rohstoffen (Kakao, Zucker und Kakaobutter), den Glasurtypen und den Pralinensorten beschreibt.
– Interpretieren Sie diesen Graphen hinsichtlich der Zusammensetzung der Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen.

Kosten und Gewinn (B_164)

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 und aus diesen die Endprodukte P_1 und P_2 her.
Die Materialverflechtung in ME wird durch den nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.



a) Für bestimmte Werte von a und c beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

– Lesen Sie aus der Matrix ab, welche Mengen an Rohstoffen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts P_1 verwendet werden.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.

– Berechnen Sie a und c.

b) Für $a = 2$ und $c = 1$ beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten.
Der Materialbestand im Lager beträgt 1 460 ME von R_1, 660 ME von R_2 und 1 160 ME von R_3.

– Erstellen Sie eine Matrix-Gleichung zur Berechnung derjenigen Nachfrage, die bei diesem Lagerbestand höchstens erfüllt werden kann.

– Berechnen Sie diese Nachfrage.

c) Die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E für das Endprodukt P_2 sind bekannt:

$K(x) = 2{,}5 \cdot x^2 + 59 \cdot x + 80$
$E(x) = -6 \cdot x^2 + 187 \cdot x$

x ... produzierte und abgesetzte Menge in ME
$K(x)$, $E(x)$ ... Kosten bzw. Erlös bei der Menge x in GE

Bei einer bestimmten Menge x_{max} wird der maximale Gewinn erzielt.

– Berechnen Sie x_{max}.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man den Preis des Endprodukts beim Verkauf der Menge x_{max} erhalten kann.

– Ermitteln Sie mithilfe des obigen Gozinto-Graphen, wie viel Mengeneinheiten von den Zwischenprodukten für die Herstellung der Menge x_{max} des Endprodukts P_2 benötigt werden.

Medikamentenherstellung (B_368)

Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus das Medikament E her.
Die Produktionsverflechtung ist im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (alle Angaben in ME).

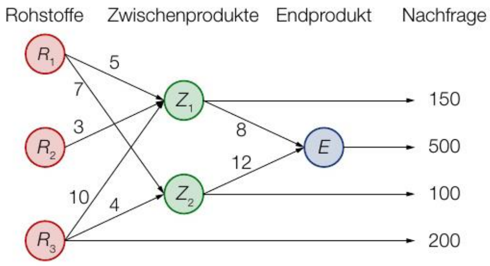


Abbildung 1

a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.

– Geben Sie an, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.

– Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten Rohstoffmengen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.

– Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Medikaments E.

b) Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen Rohstoffen, den Zwischenprodukten und dem Medikament.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Der Vektor $\vec{n}$ beschreibt die in der obigen Abbildung dargestellte Nachfrage nach R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Erstellen Sie den Vektor $\vec{n}$.

Der Vektor $\vec{x}$ beschreibt die benötigten Mengen an R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$.

c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von R_1, 20 000 ME von R_2 und 76 800 ME von R_3.
Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Medikaments E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.
Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte. Die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung des Medikaments.

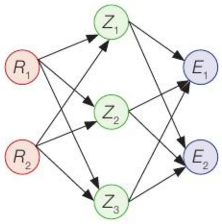
– Erstellen Sie die beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot 600$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

– Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Rohstoffbedarf (B_162)

In einem Unternehmen können die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und den beiden Endprodukten E_1 und E_2 in einem zweistufigen Produktionsverfahren durch den nachstehenden Gozinto-Graphen und mit den beiden nachstehenden Tabellen dargestellt werden. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils 1 ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.



	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	10	5	0
R_2	15	0	25

	E_1	E_2
Z_1	30	35
Z_2	25	20
Z_3	0	10

Von E_1 werden 200 ME und von E_2 350 ME nachgefragt.

a) – Übertragen Sie die in den Tabellen angegebenen Mengen in den Gozinto-Graphen.

b) – Erstellen Sie eine Matrix, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der beiden Endprodukte beschreibt.

– Interpretieren Sie die Zahlen in der ersten Spalte dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Es sollen 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 verkauft werden. Die nachgefragten Mengen von E_1 werden zu einem Preis von 4 €/ME und jene von E_2 zu 3,50 €/ME verkauft.

– Ermitteln Sie den Gesamterlös.

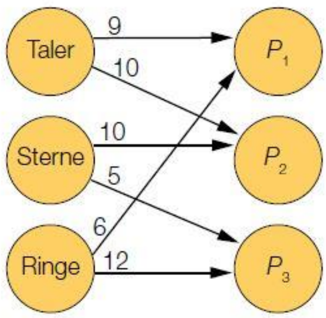
d) – Berechnen Sie das Produkt der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.

– Geben Sie an, welchen Typ von Matrix das Ergebnis darstellt.

– Interpretieren Sie, welche Aussagen über die oben beschriebene Produktion aus der berechneten Matrix abgelesen werden können.

Kekse (B_219)

a) Die produzierten Kekse werden abschließend in verschiedenen Packungen P_1, P_2 und P_3 zusammengestellt und verkauft.



– Beschreiben Sie die im Gozinto-Graphen dargestellten Verflechtungen mithilfe einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$.

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Elements a_{23} dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein Supermarkt bestellt 100 Stück Taler, 150 Stück Sterne und 170 Stück Ringe. Außerdem werden n Packungen der Keksmischung M_1 und doppelt so viele Packungen der Keksmischung M_2 angefordert. Die 3×2-Matrix $\boldsymbol{B}$ gibt an, wie viel Stück Taler, Sterne und Ringe jeweils in den Mischungen M_1 und M_2 enthalten sind.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der für die Bestellung des Supermarkts insgesamt zu produzierenden Taler, Sterne und Ringe.
– Geben Sie an, wie viele Zeilen und Spalten die Ergebnismatrix dieser Berechnung hat.

c) Die nachstehende Tabelle gibt die Verflechtung für die Herstellung zweier Packungssorten P_4 und P_5 an.

	P_4	P_5
Taler	10	10
Sterne	5	4
Ringe	12	6

Es werden 50 Packungen P_4 und 30 Packungen P_5 zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Taler, Sterne und Ringe dafür nötig sind.

d) Die Produktion eines Kekses kostet unabhängig von dessen Form 5 Cent. Die Matrix $\boldsymbol{C}$ gibt die Anzahl der benötigten Taler, Sterne und Ringe für zwei unterschiedliche Packungen P_6 und P_7 an.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\boldsymbol{K} = 0{,}05 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Matrix $\boldsymbol{K}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Aus der Matrix $\boldsymbol{P}$ sollen ohne weitere Berechnungen die Produktionskosten für eine Packung P_6 und die Produktionskosten für eine Packung P_7 abgelesen werden können.

– Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{P}$.

Speiseeis* (B_455)

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.
Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.
Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

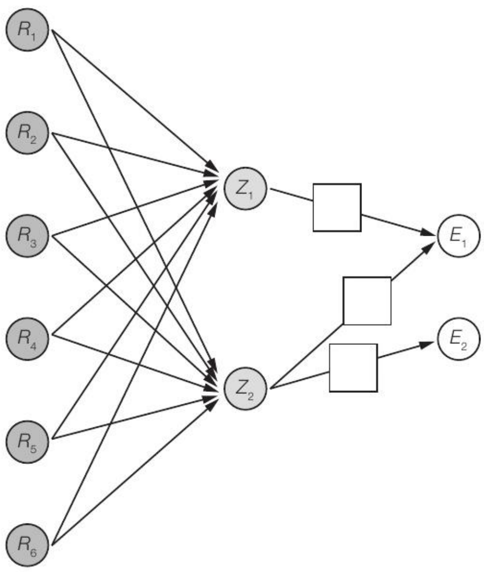
Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Matrix $\boldsymbol{V}$ beschrieben werden.

a) 1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$.

Das Restaurant benötigt täglich 50 Früchtebecher und 30 Bananensplits.

2) Ermitteln Sie denjenigen Vektor $\vec{r}$, der den täglichen Bedarf an Rohstoffen angibt.

b) Die Verflechtung kann auch durch einen Gozinto-Graphen dargestellt werden.



1) Tragen Sie im obigen unvollständigen Gozinto-Graphen die fehlenden Zahlen in die entsprechenden Kästchen ein.

c) Die Preise für die Rohstoffe können in einem Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\vec{p}^{\,T} \cdot \boldsymbol{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

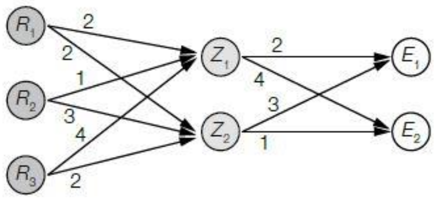
2) Kreuzen Sie die richtige Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^{\,T} \cdot \boldsymbol{V}$ an. *[1 aus 5]*

1×2-Matrix	☐
2×1-Matrix	☐
2×6-Matrix	☐
6×1-Matrix	☐
6×2-Matrix	☐

Zweistufige Produktionsprozesse * (B_462)

Ein Produktionsbetrieb stellt aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die 2 Endprodukte E_1 und E_2 her.

Der nachstehend dargestellte Gozinto-Graph beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten. Er gibt die Menge an Rohstoffen in ME an, die für jeweils 1 ME der Zwischenprodukte benötigt wird. Er gibt weiters die Menge an Zwischenprodukten in ME an, die für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt wird.



a) 1) Erstellen Sie eine Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.

Der Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte kann durch die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschrieben werden.

2) Beschreiben Sie, was mit dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

b) Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$ beschrieben.

In einem Produktionsprozess sollen 10 ME von E_1 und x ME von E_2 hergestellt werden und es gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 145 \\ 230 \end{pmatrix}$$

1) Interpretieren Sie die Zahl 230 im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Ermitteln Sie x.

c) Eine andere Produktionsverflechtung hat folgende Eigenschaften:

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte.
Die Matrix $\boldsymbol{D}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte.

$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Es werden e_1 ME von E_1 und e_2 ME von E_2 hergestellt.
Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 haben die Preise p_1, p_2, p_3 (in GE/ME).

1) Erstellen Sie mithilfe von Matrizen und Vektoren eine Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K für diesen Produktionsprozess.

$K =$ ______________________________

Es werden 5 ME von E_1 und 8 ME von E_2 hergestellt.

2) Ermitteln Sie die benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte.

Seifenherstellung * (B_491)

In einem Betrieb werden Seifen hergestellt und verpackt. Zur Herstellung von Seife werden die Rohstoffe *Sheabutter* (R_1), *verschiedene Öle* (R_2) und *Natronlauge* (R_3) verwendet.

a) In einer Produktionsschiene werden die beiden Seifen S_1 und S_2 hergestellt.

1. Produktionsstufe:
Für 1 ME von S_1 benötigt man 35 ME von R_1, 80 ME von R_2 und 15 ME von R_3.
Für 1 ME von S_2 benötigt man 50 ME von R_2 und 6 ME von R_3.

2. Produktionsstufe:
Beide Seifen werden in den 2 unterschiedlichen Packungen P_1 und P_2 zum Kauf angeboten.
In 1 Packung P_1 befinden sich 2 ME von S_1 und 1 ME von S_2.
In 1 Packung P_2 befinden sich 2 ME von S_1 und 3 ME von S_2.

1) Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Packungen als Gozinto-Graph.

2) Erstellen Sie die beiden Matrizen, die die einzelnen Produktionsstufen beschreiben.

3) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Zusammenstellung der Packungen beschreibt.

Ein Kunde bestellt 20 Packungen P_1 und 30 Packungen P_2.

4) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an Rohstoffen für diese Bestellung.

b) In einer anderen Produktionsschiene werden aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Seifen S_3 und S_4 hergestellt. Die Seifen werden in Form einer Geschenkpackung P verkauft.

Die Produktionsverflechtung wird durch die nachstehende Tabelle beschrieben. Die eingetragenen Werte entsprechen den ME im Produktionsprozess.

	R_1	R_2	R_3	S_3	S_4	P
R_1	0	0	0	15	10	0
R_2	0	0	0	75	52	0
R_3	0	0	0	9,6	8,5	0
S_3	0	0	0	0	0	2
S_4	0	0	0	0	0	2
P	0	0	0	0	0	0

Die Summe der Einträge in der 3. Zeile beträgt 18,1.

1) Interpretieren Sie den Wert 18,1 im Zusammenhang mit der Produktion der beiden Seifen.
2) Lesen Sie aus der obigen Tabelle ab, wie viele ME Seife sich in einer Geschenkpackung befinden.

Im Lager befinden sich 1260 ME von R_1 und 6340 ME von R_2.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob bei diesem Lagerstand jeweils 50 ME von den beiden Seifen S_3 und S_4 hergestellt werden können.

Pro Level

Zweistufige Produktion (B_163)

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Die Mengenangaben erfolgen jeweils in ME.

a) Die Produktionsverflechtung wird durch die beiden nachstehenden Tabellen beschrieben.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2,1	1,2	4,3
R_2	3,4	2,5	1,6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2,0	1,3	0
Z_2	3,1	2,4	0
Z_3	0	4,5	2,8

– Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Endprodukten als Gozinto-Graph.

– Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen, wenn von jedem der Endprodukte 1 ME hergestellt wird.

b) Die 2×3-Matrix $\mathbf{C}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte. Der Spaltenvektor $\vec{n}$ beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten. Es soll der Mengenbedarf an Rohstoffen berechnet werden.

– Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den geeigneten Ansatz aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	

A	$\mathbf{C} \cdot \vec{n}^{\mathrm{T}}$
B	$\vec{n} \cdot \mathbf{C}$
C	$\mathbf{C} \cdot \vec{n}$
D	$\vec{n}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$

Der Vektor $\vec{p} = (20\ \ 50)$ beschreibt die Preise der Rohstoffe in €/ME.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Rohstoffe für $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

c) Im Lager sind Rohstoffmengen vorhanden, die bei der Produktion restlos verbraucht werden sollen. Die Nachfrage nach dem Endprodukt E_3 ist doppelt so hoch wie die Nachfrage nach dem Endprodukt E_1.

Für die Produktion kann die folgende Matrizengleichung aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$$

– Erklären Sie die Aussage der einzelnen Matrizen in dieser Gleichung.

– Berechnen Sie die Mengen der Endprodukte, die mit den vorhandenen Rohstoffen hergestellt werden können.

Malerarbeiten (B_212)

Die Innenwände eines Hotels sollen in den Farben Weiß, Rot, Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett ausgemalt werden. Der Malermeister kauft für dieses Vorhaben die Farben Weiß, Rot und Blau ein. Alle anderen Farbtöne werden selbst gemischt.

a) Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick, welche Menge in Kilogramm von den Farben Weiß, Rot und Blau zur Herstellung von jeweils 1 kg der Farben Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett benötigt werden.

	Hellrosa	Dunkelrosa	Hellviolett	Dunkelviolett
Weiß	0,6	0,5	0,32	0,4
Rot	0,4	0,5	0,08	0,1
Blau	0	0	0,6	0,5

– Veranschaulichen Sie die Verflechtung der Farbmengen in einem Gozinto-Graphen.

c) Für das Ausmalen der Funktionsräume des Hotels werden insgesamt 956 kg weiße, 424 kg rote und 170 kg blaue Farbe benötigt. Die Farben können nicht in beliebigen Mengen, sondern in Kübeln bestimmter Füllmenge gekauft werden. Es liegt folgende Berechnung vor:

$$\begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} = \begin{pmatrix} 38{,}24 \\ 16{,}96 \\ 6{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 25 - \begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die einzelnen Rechenschritte und das Ergebnis der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Der Hotelbesitzer fordert einen Kostenvoranschlag für die anstehenden Malerarbeiten. Der Malermeister erstellt folgende Übersicht:

Materialkosten:

	Farbmenge in kg	Preis in € pro kg
Weiß	n_1	p_1
Rot	n_2	p_2
Blau	n_3	p_3

Lohnkosten: L €

Insgesamt werden 5 % Rabatt gewährt.

Es sollen die Gesamtkosten K berechnet werden.

– Kreuzen Sie die richtige Formel an. *[1 aus 5]*

$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3) + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^T \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^{-1} + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^{-1} \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3) + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^{-1} \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☐

Teemischung (B_203)

In einer Apotheke werden nach eigenem Rezept Teemischungen hergestellt und verkauft. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Gramm (g) von einigen Zutaten jeweils in einer Packung Teemischung enthalten sind.

	Erkältungstee	Hustentee	Beruhigungstee	Blasentee	Gallentee
Süßholzwurzel	5	28	4	5	0
Fenchel	5	23	5	5	5
Ringelblumenblüten	0	0	4	5	5

a) – Erstellen Sie einen passenden Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen Zutaten und Teemischungen wiedergibt.

b) – Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 23 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 430 \\ 140 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 430 in der Ergebnismatrix.

d) Die Zutaten Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten kann die Apotheke bei 3 verschiedenen Lieferanten beziehen. Die folgende Tabelle gibt die Preise in € pro 100 g an:

	Lieferant *A*	Lieferant *B*	Lieferant *C*
Süßholzwurzel	€ 3,35	€ 3,85	€ 3,30
Fenchel	€ 3,13	€ 3,00	€ 3,30
Ringelblumenblüten	€ 3,85	€ 3,90	€ 3,60

Die Apotheke möchte in jedem Fall alle 3 Produkte beim gleichen Lieferanten beziehen. Es werden 1 600 g Süßholzwurzel, 1 800 g Fenchel und 500 g Ringelblumenblüten benötigt.
– Berechnen Sie die für die Apotheke entstehenden Kosten bei allen 3 Lieferanten.
– Beurteilen Sie, welcher der Lieferanten für die Apotheke insgesamt am günstigsten ist.

Handyproduktion * (B_517)

Ein Unternehmen produziert die zwei Handymodelle H_1 und H_2.
Dabei werden die beiden Mikrochip-Sorten M_1 und M_2 benötigt.
Für die Produktion der Mikrochips werden unter anderem die Rohstoffe Silicium (R_1) und Kupfer (R_2) benötigt.

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix ***R*** entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen (in ME) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Mikrochip-Sorten.

	M_1	M_2
R_1	5	7
R_2	1	2

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix ***S*** entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Mikrochips (in Stück) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle.

	H_1	H_2
M_1	5	1
M_2	0	4

a) 1) Ermitteln Sie diejenige Matrix ***A***, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle beschreibt.

Bei einer bestimmten Produktionsvariante wird die Matrix ***S*** durch eine Matrix $\boldsymbol{S_1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ so ersetzt, dass sich anstelle von ***A*** die neue Matrix $\begin{pmatrix} 46 & 33 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ergibt.

2) Ermitteln Sie x.

b) Die Anzahlen der täglich produzierten Handys der Handymodelle H_1 und H_2 können durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Die Preise pro ME für die Rohstoffe R_1 und R_2 können durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\boldsymbol{S} \cdot \vec{x}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

2) Ermitteln Sie die Zeilen- und die Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^{\,\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x}$.

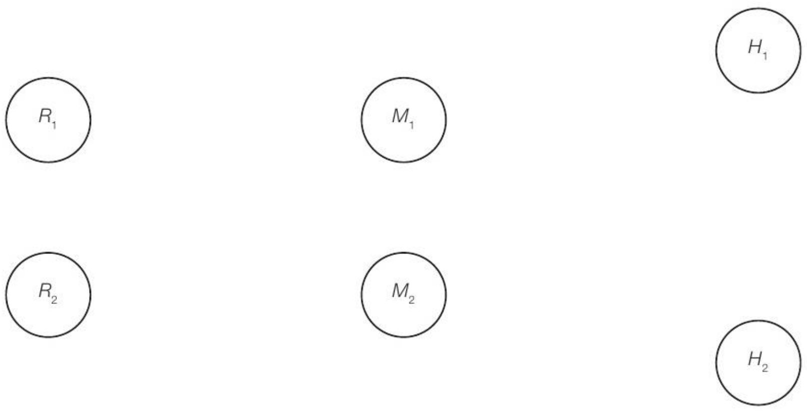
Zeilenanzahl: __________

Spaltenanzahl: __________

c) Der Prozess der Handyproduktion wird geändert. Die neue Verflechtung zwischen den Rohstoffen, den Mikrochips und den Handymodellen kann durch die nachstehende Tabelle beschrieben werden.

	R_1	R_2	M_1	M_2	H_1	H_2
R_1	0	0	5	7	6	0
R_2	0	0	1	2	0	0
M_1	0	0	0	0	5	1
M_2	0	0	0	0	0	4
H_1	0	0	0	0	0	0
H_2	0	0	0	0	0	0

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Gozinto-Graphen so, dass er den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



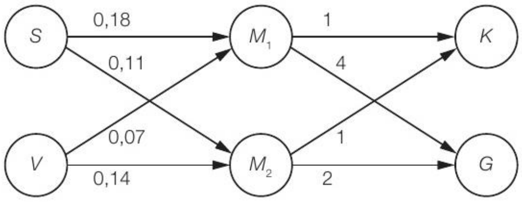
Die tägliche Nachfrage nach den Rohstoffen R_1 und R_2, den Mikrochips M_1 und M_2 sowie den Handymodellen H_1 und H_2 kann durch den Vektor $\vec{n}$ beschrieben werden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,000 \\ 1\,000 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

2) Lesen Sie die Anzahl der insgesamt täglich nachgefragten Mikrochips ab.

Puddingmischungen * (B_529)

Aus reinen Puddingsorten werden verschiedene Mischsorten produziert. Diese werden in verschiedenen Packungen verkauft. Der nachstehende Gozinto-Graph bildet diesen Produktionsprozess ab.



S ... reiner Schokoladepudding (in Litern)
V ... reiner Vanillepudding (in Litern)

M_1 ... Mischsorte 1: Schokoladepudding mit Vanille-Sprenkeln (in Bechern)
M_2 ... Mischsorte 2: Vanillepudding mit Schoko-Sprenkeln (in Bechern)

K ... Kleinpackungen (in Stück)
G ... Großpackungen (in Stück)

a) 1) Ermitteln Sie den Prozentsatz an Schokoladepudding in einem Becher M_1.

2) Übertragen Sie den Gozinto-Graphen in 2 Matrizen, die den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten bzw. den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen beschreiben.

Ein Supermarkt bestellt 300 Klein- und 200 Großpackungen.

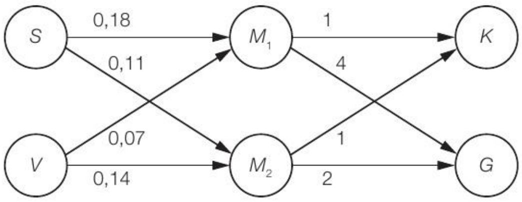
3) Ermitteln Sie die dafür jeweils benötigte Menge an Schokolade- und Vanillepudding in Litern.

b) Der Produktionsablauf wird verändert. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}11 & 0 & \mathbf{0{,}50} \\ 0 & 0 & 0{,}07 & 0{,}14 & 0 & \mathbf{0{,}25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neu dabei sind: $a_{16} = 0{,}50$ und $a_{26} = 0{,}25$.

1) Zeichnen Sie diese beiden neuen Verflechtungen im nachstehenden Gozinto-Graphen ein.



Der Vektor $\vec{x}$ soll die benötigten Mengen an reinen Puddingsorten, Mischsorten und Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G) beschreiben.

2) Ermitteln Sie diesen Vektor $\vec{x}$ für eine Nachfrage von 300 Klein- und 200 Großpackungen.

Für eine andere Nachfrage ergibt sich anstelle von $\vec{x}$ der Vektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 461 \\ 264 \\ 1\,300 \\ \mathbf{700} \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

3) Interpretieren Sie den Eintrag 700 dieses Vektors im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Beschreiben Sie, wie sich eine zusätzliche direkte Nachfrage nach reinem Schokoladepudding im Ausmaß von 100 Litern auf den Vektor $\vec{x}_1$ auswirkt.

c) Der Produktionsprozess wird auf andere Puddingsorten erweitert.
Aus a reinen Puddingsorten werden b verschiedene Mischsorten produziert, die wiederum in c verschiedenen Packungsgrößen abgepackt werden. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen.

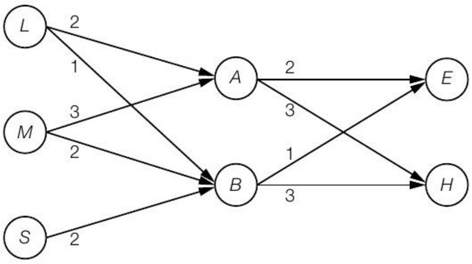
1) Ordnen Sie den beiden Eigenschaften von $\boldsymbol{B}$ jeweils die zutreffende Berechnung aus A bis D zu.

Anzahl der Matrixelemente von $\boldsymbol{B}$	
Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$	

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Seminarpruefungen * (B_548)

a) An einer Universität stellt eine Professorin Prüfungen für ihre Seminare zusammen. Dabei verwendet sie jede Prüfungsfrage nur ein Mal.
Sie teilt ihre Prüfungsfragen in drei Kategorien ein: leicht (L), mittel (M), schwierig (S).
Sie kombiniert die Prüfungsfragen in unterschiedlicher Anzahl für Prüfungen der Niveaustufen A und B. In ihren Einführungsseminaren (E) und Hauptseminaren (H) gibt es jeweils unterschiedlich viele Prüfungen der Niveaustufen A und B.
Die entsprechenden Zahlen können dem nachstehenden Gozinto-Graphen entnommen werden.



In diesem Gozinto-Graphen existiert kein Pfeil von S nach A.

1) Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Die Matrix $\boldsymbol{V_1}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungsfragen für die unterschiedlichen Prüfungen der Niveaustufen A und B.
Die Matrix $\boldsymbol{V_2}$ beschreibt den Bedarf an Prüfungen der Niveaustufen A und B für die unterschiedlichen Seminare.

2) Ermitteln Sie die beiden Matrizen $\boldsymbol{V_1}$ und $\boldsymbol{V_2}$. *[0/1 P.]*

Die Professorin hält im aktuellen Semester 4 Einführungsseminare (E) und 2 Hauptseminare (H).
Der Vektor $\vec{a}$ beschreibt den Bedarf an leichten, mittleren und schwierigen Prüfungsfragen für diese Seminare.

3) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}$. *[0/1 P.]*

Die Professorin benötigt für die Vorbereitung der Prüfungsfragen unterschiedlich viel Zeit:
t_1 Minuten für eine leichte, t_2 Minuten für eine mittlere und t_3 Minuten für eine schwierige Prüfungsfrage. Die insgesamt für alle Prüfungsfragen des aktuellen Semesters benötigte Vorbereitungszeit wird mit t bezeichnet.

4) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von t auf. Verwenden Sie dabei t_1, t_2 und t_3 sowie den Vektor $\vec{a}$.

t = ____ *[0/1 P.]*

b) Über die Matrizen $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ weiß man:
$\boldsymbol{R}$ ist eine 3×3-Matrix.
$\boldsymbol{S}$ ist eine 2×3-Matrix.
$\boldsymbol{T}$ ist eine 3×2-Matrix.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

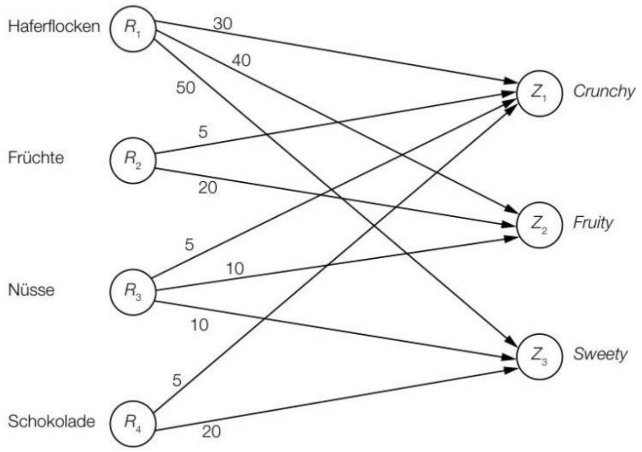
$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×2-Matrix.	☐
$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{T}$ ist eine 2×3-Matrix.	☐
$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×3-Matrix.	☐
$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}$ ist eine 3×2-Matrix.	☐
$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}$ ist eine 3×3-Matrix.	☐

Muesliriegel * (B_571)

Ein Start-up-Unternehmen bringt verschiedene Müsliriegel-Sorten auf den Markt.

Aus den 4 Rohstoffen Haferflocken (R_1), Früchte (R_2), Nüsse (R_3) und Schokolade (R_4) werden mit Öl und Honig Müsliriegel der Sorten *Crunchy* (Z_1), *Fruity* (Z_2) und *Sweety* (Z_3) als Zwischenprodukte hergestellt.

Im nachstehenden Gozinto-Graphen ist der Mengenbedarf an diesen 4 Rohstoffen in Gramm für die Herstellung jeweils eines Müsliriegels dargestellt.



Das Start-up-Unternehmen bringt die Müsliriegel als Endprodukte in 6er-Probierpackungen (E_1), in 12er-Packungen (E_2) und in 18er-Mix-Boxen (E_3) auf den Markt.

Die jeweiligen Stückzahlen der Müsliriegel in den Packungen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben, die der Matrix ***P*** entspricht.

	6er-Probierpackung E_1	12er-Packung E_2	18er-Mix-Box E_3
Crunchy Z_1	2	2	10
Fruity Z_2	2	4	4
Sweety Z_3	2	6	4

a) Der im obigen Gozinto-Graphen dargestellte Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel soll durch die Matrix ***R*** beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie die Matrix ***R***.

Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Müsliriegel-Packungen soll durch die Matrix ***V*** beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie die Matrix ***V***.

3) Interpretieren Sie das Element v_{32} der Matrix ***V*** im gegebenen Sachzusammenhang.

Es werden 50 der 6er-Probierpackungen, 30 der 12er-Packungen und 20 der 18er-Mix-Boxen nachgefragt.

Es stehen 40 kg Haferflocken zur Verfügung.

4) Überprüfen Sie nachweislich, ob mit dieser Menge der Mengenbedarf an Haferflocken für die Herstellung der Müsliriegel gedeckt ist.

b) Die Gesamtmasse der Müsliriegel beträgt in der 6er-Probierpackung 540 g, in der 12er-Packung 1 220 g und in der 18er-Mix-Box 1 380 g.

Aus diesen Werten kann mithilfe der Matrix $\boldsymbol{P}$ die Masse x_1 eines Müsliriegels *Crunchy*, die Masse x_2 eines Müsliriegels *Fruity* und die Masse x_3 eines Müsliriegels *Sweety* berechnet werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Massen x_1, x_2 und x_3.

Die Massen x_1, x_2 und x_3 können auch zu einem Vektor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst und mithilfe des Vektors $\vec{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} 540 \\ 1\,220 \\ 1\,380 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ermittelt werden.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ berechnet werden kann.
[1 aus 5]

$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{P} \cdot \vec{\boldsymbol{m}})^{\mathrm{T}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐
$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{m}}$	☐

c) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach der 18er-Mix-Box untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Stück.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Stück beträgt die Nachfrage 80 Stück.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

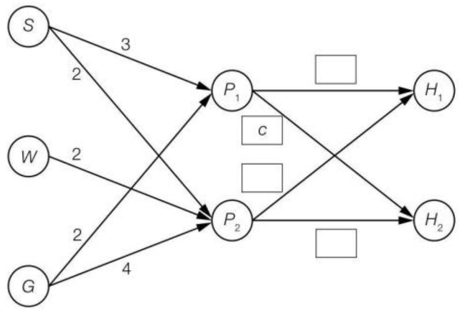
$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$
x ... nachgefragte Menge in Stück
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in Euro pro Stück

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.
2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Stück.

Tennissocken * (B_583)

Ein Sportartikelhersteller produziert unter anderem schwarze (S), weiße (W) und graue (G) Tennissocken und verkauft diese als einzelne Paare sowie in zwei verschiedenen Großpackungen (P_1 und P_2).

a) Der nachstehende Gozinto-Graph veranschaulicht den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die einzelnen Großpackungen, die später in unterschiedlicher Anzahl an die zwei Sporthändler H_1 und H_2 ausgeliefert werden.



Die 3×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt den Bedarf an Paaren von Tennissocken für die jeweiligen Großpackungen.

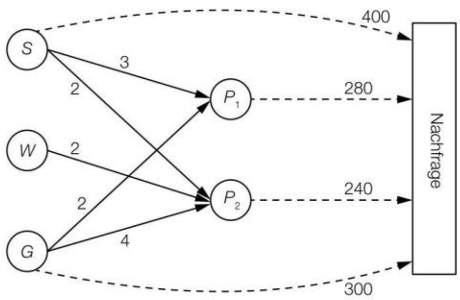
1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt den Bedarf an Großpackungen für die Sporthändler H_1 und H_2.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

2) Tragen Sie im obigen Gozinto-Graphen die richtigen Elemente der Matrix $\boldsymbol{B}$ in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

b) Im Online-Shop dieses Sportartikelherstellers werden Tennissocken auch als einzelne Paare nachgefragt.
Die gesamte Nachfrage eines Monats ist in der nachstehenden Abbildung durch strichlierte Pfeile dargestellt.



Die quadratische 5×5-Matrix $\boldsymbol{V}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$.

Der Vektor $\vec{n}$ beschreibt die Nachfrage nach den einzelnen Paaren von Tennissocken und den Großpackungen (in der Reihenfolge S, W, G, P_1, P_2).

2) Ermitteln Sie den Vektor $\vec{n}$.

3) Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der benötigten Paare schwarzer, weißer und grauer Tennissocken für die angegebene Nachfrage.

All Star Level

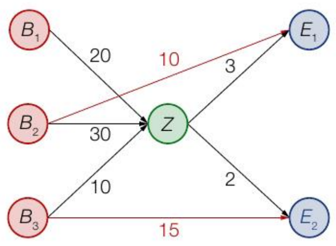
Lösungen

Rookie Level

Elektronische Geraete (B_367) Lösung

a) Die Nullen in den ersten 3 Spalten der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreiben, dass der Baustein B_2 mit sich selbst und mit den anderen Bausteinen nicht in Beziehung steht. In der 4. Spalte der 2. Zeile findet man die Menge der Bausteine B_2, die für die Herstellung einer Platine Z benötigt werden. In der 5. Spalte findet man die Anzahl der Bausteine B_2, die für die Herstellung eines Geräts E_1 benötigt wird. Die 6. Spalte sagt aus, dass B_2 nicht im Gerät E_2 eingesetzt wird.

Gozinto-Graph:



b) $\vec{n} = \vec{x} - \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\,000 \\ 2\,500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es werden 1 000 Stück der Bausteine B_2, 2 500 Stück von B_3, 400 Stück Platinen Z und 200 Geräte E_1 sowie 300 Geräte E_2 von dieser Produktion direkt nachgefragt.

Die Änderung des Nachfragevektors ergibt mit $\vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{n}$ das folgende Gleichungssystem:

$x_1 = 20 \cdot x_4$
$x_2 = 30 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 500$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 15 \cdot x_6 + 2500$
$x_4 = 3 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 + 1600$
$x_5 = 200$
$x_6 = 300$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt die Komponenten des neuen Produktionsvektors:

$x_1 = 56000$; $x_2 = 86500$; $x_3 = 35000$; $x_4 = 2800$; $x_5 = 200$; $x_6 = 300$

Alternativer Lösungsweg mit der inversen Matrix:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56\,000 \\ 86\,500 \\ 35\,000 \\ 2\,800 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

c) Nur die Anzahl der beiden Geräte E_1 und E_2 ändert sich nicht, alle übrigen Produktionsmengen müssen erhöht werden: B_1 um 24 000 Stück, B_2 um 35 500 Stück, B_3 um 12 000 Stück und Z um 1 200 Stück.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gesamte Kosten: $(0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = 47$

Die Bausteine für die Herstellung einer Platine kosten insgesamt € 47.

Konfiserie (B_196) Lösung

a) a, b, c und d bezeichnen die Anzahl der hergestellten Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4.

Lösung mit Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5a + 3b + 4c + 4d &= 181 \\ 4a + 3b + 5c &= 142 \\ 2a + 3b + 3c + 4d &= 144 \\ a + 3b + 4d &= 97 \end{aligned}$$

mittels Technologieeinsatz: $a = 8$, $b = 15$, $c = 13$, $d = 11$

Alternativer Lösungsweg (mit inverser Matrix):

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Mittels Technologieeinsatz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}5 & 0{,}125 \\ -0{,}292 & 0{,}333 & -0{,}167 & 0{,}458 \\ -0{,}125 & 0 & 0{,}5 & -0{,}375 \\ 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Es können 8 Bonbonnieren B_1, 15 Bonbonnieren B_2, 13 Bonbonnieren B_3 und 11 Bonbonnieren B_4 hergestellt werden.

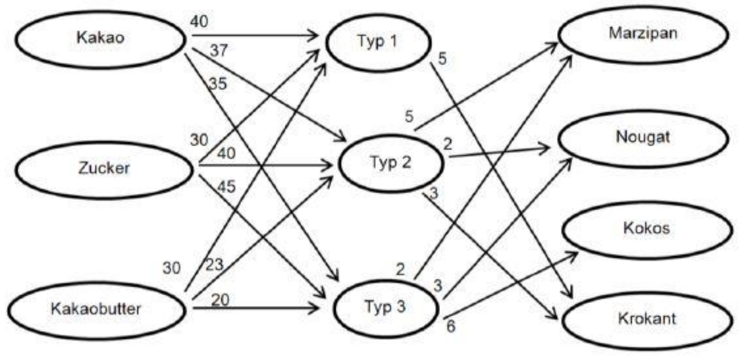
Hinweis: Werden die Einträge der inversen Matrix nicht gerundet, ergeben sich leicht abweichende Zahlenwerte im Ergebnisvektor.

b) Verkaufspreisvektor:

$$(P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4) = \left[(K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5)\right] \cdot 1{,}1$$

Das Ergebnis muss eine 1×4-Matrix sein (also 1 Zeile und 4 Spalten aufweisen), da bei der Multiplikation 1 × 4 mal 4 × 4 eine 1×4-Matrix entsteht und die weiteren Rechenschritte die Dimension der Matrix nicht mehr beeinflussen.

c)



Die Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen besteht aus 5 Einheiten Typ 2 und 2 Einheiten Typ 3. In einer Einheit Typ 2 sind 37 g Kakao, 40 g Zucker und 23 g Kakaobutter, in einer Einheit Typ 3 sind 35 g Kakao, 45 g Zucker und 20 g Kakaobutter enthalten. Insgesamt besteht die Glasur also aus:

– Kakao: $5 \cdot 37\text{ g} + 2 \cdot 35\text{ g} = 255\text{ g}$
– Zucker: $5 \cdot 40\text{ g} + 2 \cdot 45\text{ g} = 290\text{ g}$
– Kakaobutter: $5 \cdot 23\text{ g} + 2 \cdot 20\text{ g} = 155\text{ g}$

Kosten und Gewinn (B_164) Lösung

a) Von den Rohstoffen benötigt man für P_1 5 ME von R_1, 3 ME von R_2 und 2 ME von R_3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 2;\ c = 3$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 660 \\ 1160 \end{pmatrix}$

$5 \cdot n_1 + 12 \cdot n_2 = 1460$
$\underline{n_1 + 7 \cdot n_2 = 660}$
$n_1 = 100;\ n_2 = 80$

Es können höchstens 100 ME von P_1 und höchstens 80 ME von P_2 hergestellt werden.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 128 \cdot x - 8{,}5 \cdot x^2 - 80$
$G'(x) = 0 \Rightarrow 128 - 17 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{max} = 7{,}529\ldots$

Bei einer Menge von rund 7,53 ME wird der maximale Gewinn erzielt.

Man berechnet den Funktionswert von E an der Stelle x_{max}. Das Ergebnis dividiert man durch x_{max}.

Man benötigt jeweils die 4-fache Menge (also rund 30,12 ME) von Z_1 und Z_2 sowie die 3-fache Menge (also rund 22,59 ME) von Z_3 und Z_4.

Medikamentenherstellung (B_368) Lösung

a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

R_1: $5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$
R_2: $3 \cdot 8 = 24$
R_3: $10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1, 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$

Der Rechenweg für $\vec{x}$ ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$x_1 = 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5$
$x_2 = 3 \cdot x_4$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200$
$x_4 = 8 \cdot x_6 + 150$
$x_5 = 12 \cdot x_6 + 100$
$x_6 = 500$

Dabei gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Vektor $\vec{x}$:
$x_1 = 63\,450$; $x_2 = 12\,450$; $x_3 = 66\,100$; $x_4 = 4\,150$; $x_5 = 6\,100$; $x_6 = 500$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 4 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vektor $\vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 63\,450 \\ 12\,450 \\ 66\,100 \\ 4\,150 \\ 6\,100 \\ 500 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

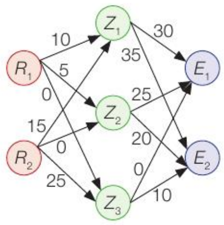
Es wird der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung von 600 ME des Medikaments E berechnet.

benötigte Rohstoffmengen: $\left[\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}\right] \cdot 600 = \begin{pmatrix} 74\,400 \\ 14\,400 \\ 76\,800 \end{pmatrix}$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5 600 ME übrig, R_3 wird zur Gänze verbraucht.

Rohstoffbedarf (B_162) Lösung

a)



b) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 425 & 450 \\ 450 & 775 \end{pmatrix}$

Vom Rohstoff R_1 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 425 ME benötigt.
Vom Rohstoff R_2 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 450 ME benötigt.

c) $(4 \quad 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = 800 + 1\,225 = 2\,025$

Der Gesamterlös beträgt € 2.025.

d) $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\,250 \\ 12\,000 \\ 3\,500 \end{pmatrix}$

Es handelt sich um einen dreizeiligen Spaltenvektor (3×1-Matrix).

18 250 ME des Zwischenprodukts Z_1 und 12 000 ME des Zwischenprodukts Z_2 sowie 3 500 ME des Zwischenprodukts Z_3 werden benötigt, um 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 herstellen zu können.

Kekse (B_219) Lösung

a) Werden die Rohstoffe waagrecht in der Reihenfolge Taler, Sterne, Ringe und die Packungen senkrecht aufgetragen, ergibt sich folgende Matrix:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

Auch eine Vertauschung von Zeilen und Spalten sowie eine andere Reihenfolge der Kekssorten ist möglich.

Das Element a_{23} steht in der 2. Zeile und 3. Spalte und hat den Wert 5. Es gibt die Anzahl der in den Packungen P_3 enthaltenen Sterne an.

b) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \begin{pmatrix} n \\ 2 \cdot n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 170 \end{pmatrix}$

Die Ergebnismatrix $\boldsymbol{X}$ hat 3 Zeilen und 1 Spalte.

c) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 370 \\ 780 \end{pmatrix}$

Man benötigt 800 Stück Taler, 370 Stück Sterne und 780 Stück Ringe.

d) Die Matrix $\boldsymbol{K}$ gibt an, wie viel die Produktion der in den Packungen vorhandenen unterschiedlichen Keksformen jeweils kostet.

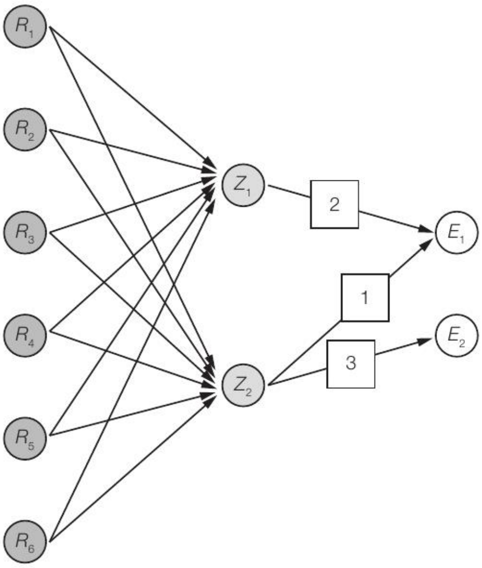
$\boldsymbol{P} = (0{,}05 \quad 0{,}05 \quad 0{,}05) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = (1{,}35 \quad 1)$

Speiseeis* (B_455) Lösung

a1) $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 40 & 30 \\ 20 & 15 \\ 5 & 10 \\ 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$

a2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 8200 \\ 4100 \\ 1900 \\ 2000 \\ 1400 \end{pmatrix}$

b1)



c1) Es werden die Rohstoffkosten für eine Portion Früchtebecher und für eine Portion Bananen-split berechnet.

c2)

1×2-Matrix	☒

Zweistufige Produktionsprozesse * (B_462) Lösung

a1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a2) Das Matrizenprodukt gibt an, welche Menge an Rohstoffen man für jeweils 1 ME der End-produkte benötigt.

b1) Es werden 230 ME von R_3 benötigt.

b2) $10 \cdot 10 + 10 \cdot x = 150$

oder:

$11 \cdot 10 + 7 \cdot x = 145$

oder:

$14 \cdot 10 + 18 \cdot x = 230$

$x = 5$

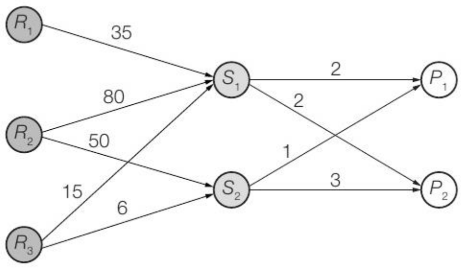
c1) $K = (p_1\ p_2\ p_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

c2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 23 \end{pmatrix}$

Es werden 34 ME von Z_1 und 23 ME von Z_2 benötigt.

Seifenherstellung * (B_491) Lösung

a1)



a2) Matrix für 1. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$

Matrix für 2. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix}$

a4) $\begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,500 \\ 13\,500 \\ 2\,160 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung benötigt man 3 500 ME von R_1, 13 500 ME von R_2 und 2 160 ME von R_3.

b1) Für 1 ME von S_3 und 1 ME von S_4 benötigt man insgesamt 18,1 ME von R_3 (Natronlauge).

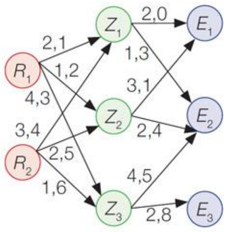
b2) In einer Geschenkpackung befinden sich 4 ME Seife.

b3) Rohstoffbedarf R_1: $15 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 1\,250$
Rohstoffbedarf R_2: $75 \cdot 50 + 52 \cdot 50 = 6\,350 > 6\,340$
Nein, diese Mengen können nicht hergestellt werden, da von R_2 zu wenig auf Lager ist.

Pro Level

Zweistufige Produktion (B_163) Lösung

a)



$$\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1{,}2 & 4{,}3 \\ 3{,}4 & 2{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}0 & 1{,}3 & 0 \\ 3{,}1 & 2{,}4 & 0 \\ 0 & 4{,}5 & 2{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}92 \\ 36{,}65 \end{pmatrix}$$

Vom Rohstoff R_1 benötigt man 44,92 ME, vom Rohstoff R_2 benötigt man 36,65 ME.

b)

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	D
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	C

A	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{n}^{\,T}$
B	$\vec{n} \cdot \boldsymbol{C}$
C	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{n}$
D	$\vec{n}^{\,T} \cdot \boldsymbol{C}^T$

$$\vec{p} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \vec{n}) = (20 \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 6480 \\ 5080 \end{pmatrix} = 383600$$

Die Gesamtkosten betragen € 383.600.

c) $\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix}$ gibt die vorhandenen Rohstoffmengen an

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$ gibt die Nachfrage nach den Endprodukten an

$\begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ gibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte an

I: $570 = 8 \cdot n_1 + 25 \cdot n_2 + 24 \cdot n_1$
II: $430 = 15 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2 + 10 \cdot n_1$

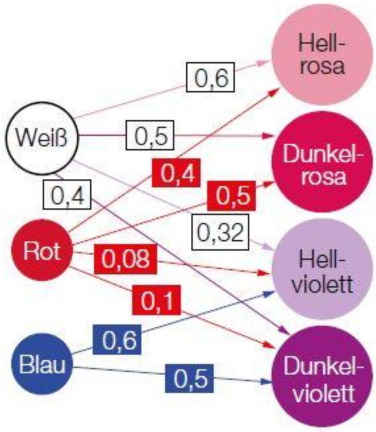
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n_1 = 10$; $n_2 = 10$

Von E_1 können 10 ME hergestellt werden, von E_2 10 ME und von E_3 20 ME.

Malerarbeiten (B_212) Lösung

a)



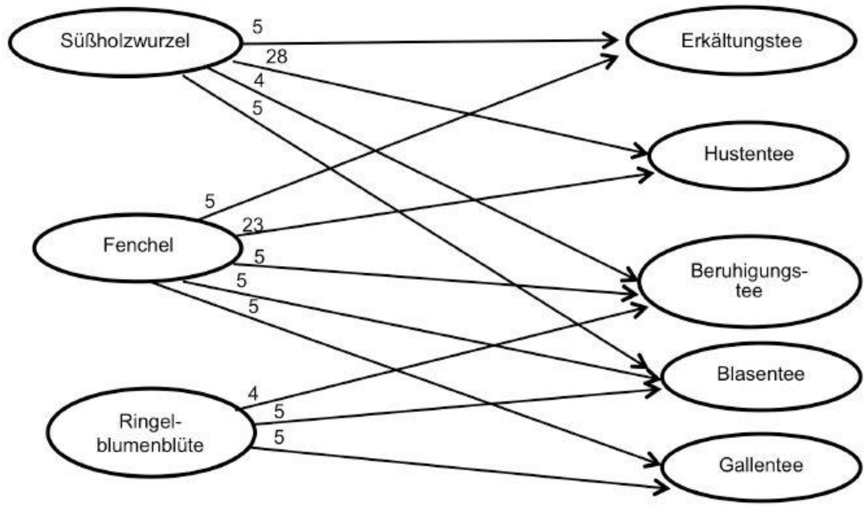
c) Der Malermeister kauft die Farben in Kübeln zu je 25 kg ein. Er berechnet die Anzahl der jeweils benötigten Farbkübel und berechnet durch Subtraktion der benötigten Farbmengen die verbleibenden Restmengen.
Es bleiben 19 kg Weiß, 1 kg Rot und 5 kg Blau übrig.

d)

[...]	
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

Teemischung (B_203) Lösung

a)



b) Die Formel beschreibt, wie viel Gramm Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten man zur Herstellung von jeweils 10 Packungen der angeführten Teemischungen braucht.
Die Zahl 430 in der Ergebnismatrix ist die für 10 Packungen benötigte Menge Fenchel in Gramm.

d) $(16 \quad 18 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 3{,}35 & 3{,}85 & 3{,}3 \\ 3{,}13 & 3 & 3{,}3 \\ 3{,}85 & 3{,}9 & 3{,}6 \end{pmatrix} = (129{,}19 \quad 135{,}10 \quad 130{,}20)$

Der Lieferant A ist mit € 129,19 für die Apotheke am günstigsten.

Eine richtige Berechnung ohne Verwendung von Matrizen ist auch als richtig zu werten.

Handyproduktion * (B_517) Lösung

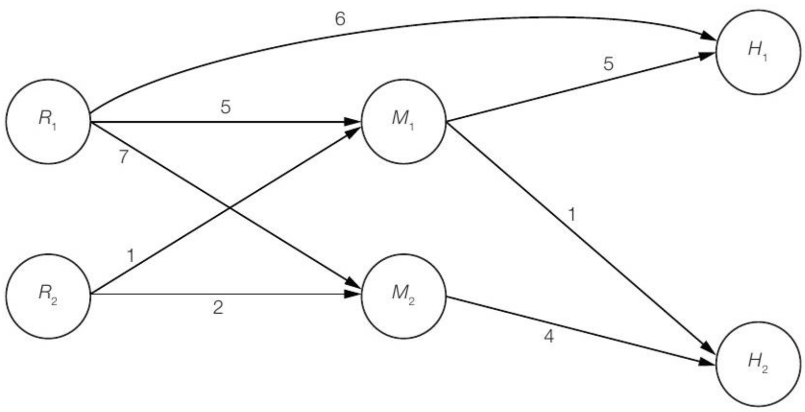
a1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 25 & 33 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

a2) $5 \cdot 5 + 7 \cdot x = 46 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
$1 \cdot 5 + 2 \cdot x = 11 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
Für die Punktevergabe ist eine der beiden Gleichungen ausreichend.

b1) Es wird die Anzahl der Mikrochips M_1 und M_2 berechnet, die für die Produktion von x_1 Handys vom Modell H_1 und x_2 Handys vom Modell H_2 benötigt werden.

b2) Zeilenanzahl: 1
Spaltenanzahl: 1

c1)



c2) Es werden insgesamt 3000 Mikrochips täglich nachgefragt.

Puddingmischungen * (B_529) Lösung

a1) $\frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}07} = 0{,}72$

In einem Becher M_1 sind 72 % Schokoladepudding enthalten.

a2) Matrix für den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten:

$\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

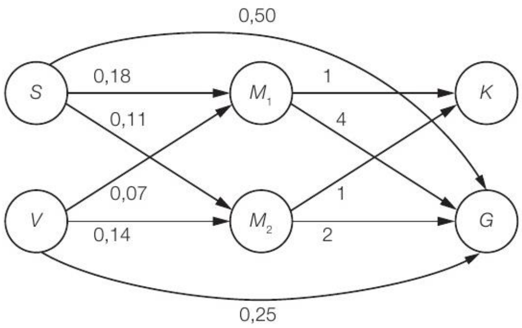
Matrix für den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a3) $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 175 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung werden 275 L Schokoladepudding und 175 L Vanillepudding benötigt.

b1)



b2) $\vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 225 \\ 1\,100 \\ 700 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

b3) Für diese Nachfrage werden 700 Becher M_2 benötigt.

b4) Zum 1. Eintrag des Vektors $\vec{x}_1$ wird 100 addiert.

c1)

Anzahl der Matrixelemente von ***B***	D
Anzahl der Zeilen von ***B***	B

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Seminarpruefungen * (B_548) Lösung

a1) Prüfungen der Niveaustufe A enthalten keine schwierigen Prüfungsfragen.

a2) $\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{V_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a3) $\vec{a} = \boldsymbol{V_1} \cdot \boldsymbol{V_2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 15 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \\ 20 \end{pmatrix}$

a4) $t = (t_1 \;\; t_2 \;\; t_3) \cdot \vec{a}$

oder:

$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{a}$ (als Skalarprodukt)

oder:

$t = 38 \cdot t_1 + 62 \cdot t_2 + 20 \cdot t_3$

b1)

$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$ ist eine 3×3-Matrix.	☒

Muesliriegel * (B_571) Lösung

a1) $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 0 \\ 5 & 10 & 10 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

a2) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 240 & 520 & 660 \\ 50 & 90 & 130 \\ 50 & 110 & 130 \\ 50 & 130 & 130 \end{pmatrix}$

a3) Man benötigt 110 g Nüsse (R_3) für die Herstellung einer 12er-Packung (E_2).

a4) $240 \cdot 50 + 520 \cdot 30 + 660 \cdot 20 = 40\,800$

Es werden 40,8 kg Haferflocken benötigt. Der Mengenbedarf an Haferflocken für die Herstellung der Müsliriegel ist somit nicht gedeckt.

b1) $2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 540$
$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 1\,220$
$10 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 1\,380$

b2)

$\vec{x} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \vec{m}$	☒

c1) $p_N(180) = 0$
$p_N(80) = 10$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 + 30 = 0$
$a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + 30 = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{1\,200} = 0{,}0008\dot{3}$

$b = -\frac{19}{60} = -0{,}31\dot{6}$

c2) $p_N(x) = 24$ *oder* $\frac{1}{1\,200} \cdot x^2 - \frac{19}{60} \cdot x + 30 = 24$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

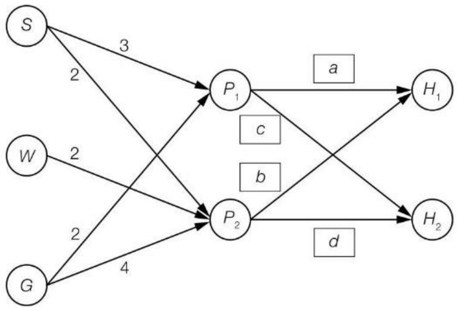
$x_1 = 20 \quad (x_2 = 360)$

Bei einem Preis von 24 Euro pro Stück werden 20 Stück nachgefragt.

Lösung: Tennissocken * (B_583)

a1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a2)



b1) $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b2) $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 300 \\ 280 \\ 240 \end{pmatrix}$

b3) $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{V})^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1720 \\ 480 \\ 1820 \\ 280 \\ 240 \end{pmatrix}$

oder:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1720 \\ 480 \\ 1820 \end{pmatrix}$

oder:

$3 \cdot 280 + 2 \cdot 240 + 400 = 1720$
$2 \cdot 240 = 480$
$2 \cdot 280 + 4 \cdot 240 + 300 = 1820$

Es werden 1 720 Paar schwarze Tennissocken, 480 Paar weiße Tennissocken und 1 820 Paar graue Tennissocken benötigt.

All Star Level