

Aufgabensammlung

Folgen & Reihen

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram [@mathago.at](https://www.instagram.com/mathago.at)

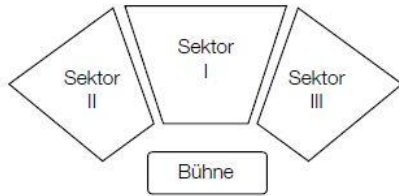
Folgen & Reihen

Rookie Level.....	3
Sitzreihen * (B_436)	3
Bienenwaben * (B_404).....	4
Wuerfel (2) * (B_115).....	4
Ressourcen * (B_512)	5
Desinfektion * (B_530).....	5
Kinderraetsel * (B_551)	5
Lauftraining* (B_449).....	6
Biologieunterricht * (B_573).....	6
Pro Level	7
Navigationsgeraete * (B_465)	7
Klassische_Gitarre (B_233).....	7
Seriationsmaterial (B_242)	8
Suessigkeiten (B_290)	8
Kartenhaus * (B_520)	9
Holzzug * (B_560)	10
Ferienwohnungen * (B_585).....	10
Spielshow * (B_574)	11
Gewinnspiele * (B_599).....	11
Puzzles * (B_609)	12
All Star Level	13
Muenzen (2) * (B_493)	13
Lösungen.....	14
Rookie Level.....	14
Pro Level.....	17
All Star Level.....	21

Rookie Level

Sitzreihen * (B_436)

Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).



- a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.

- Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.
- Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.

- b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.

- Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der n -ten Sitzreihe berechnen kann.

Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9+n) \cdot n}{2}$.

- Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.

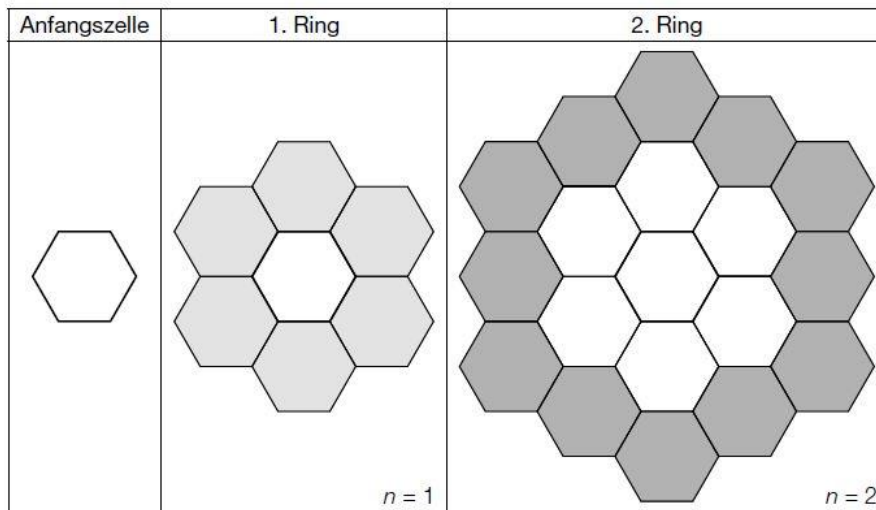
- c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n -ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird:

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$$

- Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

Bienenwaben * (B_404)

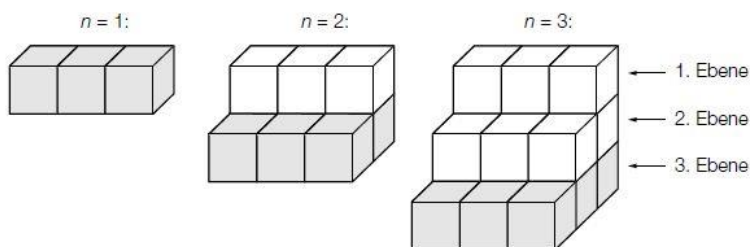
Bienen bauen ihre Waben, indem sie mit einer einzigen sechseckigen Zelle (Anfangszelle) starten und dann weitere sechseckige Zellen ringförmig um die erste Zelle bauen.



- a) Die Anzahlen der Zellen in den jeweiligen Ringen bilden eine arithmetische Folge. Die Anfangszelle wird dabei nicht als Ring gezählt.
- Geben Sie die ersten 4 Glieder dieser arithmetischen Folge an.
 - Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
 - Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
- b) Mit der Formel $s_n = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$ kann man berechnen, wie viele Zellen insgesamt bis zum n -ten Ring gebildet worden sind.
Eine Wabe besteht aus insgesamt 271 Zellen.
- Ermitteln Sie, aus wie vielen Ringen diese Wabe besteht.

Wuerfel (2) * (B_115)

- b) Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:



Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

- Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n -ten Ebene berechnen kann.
- Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen.

Die Anzahl s_n der Würfel, die für eine solche Treppe aus n Ebenen insgesamt benötigt wird, kann mithilfe der folgenden Formel bestimmt werden:

$$s_n = 1,5 \cdot (n^2 + n)$$

- Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Ressourcen * (B_512)

Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen.¹

Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

- a) 1) Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970.

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden.

Im Modell A wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

- 2) Erstellen Sie für das Modell A ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Im Modell B wird das jährliche absolute Wachstum als konstant angenommen.

- 3) Erstellen Sie für das Modell B ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffbedarf von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

- 4) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$$180 \text{ Milliarden Tonnen} = 1,8 \cdot 10^{\square} \text{ kg}$$

Desinfektion * (B_530)

- c) Eine Oberfläche wird mehrfach mit einem bestimmten Desinfektionsmittel gereinigt. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Bakterien nach dem jeweiligen Reinigungsdurchgang noch vorhanden sind.

Reinigungsdurchgang	1	2	3	4
Prozentsatz der noch vorhandenen Bakterien	5 %	0,25 %	0,0125 %	0,000625 %

- 1) Zeigen Sie, dass die Prozentsätze der noch vorhandenen Bakterien eine geometrische Folge bilden. [0/1 P.]

Kinderraetsel * (B_551)

- b) *Zahlenfolgen-Rätsel* sind beliebte Rätselaufgaben. Dabei soll man eine gegebene Zahlenfolge fortsetzen.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zahlenfolge so, dass die Zahlen eine geometrische Folge bilden.

$$27; 18; \square; \square \quad [0/1 P.]$$

- 2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Zahlenfolge 27; 18 als arithmetische Folge fortsetzen kann. [0/1 P.]

Lauftraining* (B_449)

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	
	Beate	1,5	2	2,5	

- 1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden.
- 2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

- 3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.
 - 4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle.
- b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$$c_n = 2,75 + 0,125 \cdot n$$

n ... Trainingstag

c_n ... Länge der Trainingsstrecke am n -ten Tag in km

- 1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat.

Biologieunterricht * (B_573)

c) Mäuse vermehren sich unter bestimmten Bedingungen sehr schnell. Die Anzahl der Jungtiere, die in einer Generation geboren werden, kann näherungsweise durch das nachstehende rekursive Bildungsgesetz beschrieben werden.

$$a_n = a_{n-1} \cdot 5 \text{ und } a_1 = 20$$

a_n ... Anzahl der Jungtiere in der n -ten Generation

- 1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n) .
- 2) Berechnen Sie, in der wievielten Generation erstmals 500 Jungtiere geboren werden.

Pro Level

Navigationsgeraete * (B_465)

- b) Entlang einer 45 km langen Teststrecke auf einer Autobahn sind insgesamt 8 Radarboxen in gleichen Abständen zur Überwachung der Geschwindigkeit aufgestellt. Eine dieser Radarboxen steht am Anfang und eine am Ende der Strecke.

Die Abstände der Radarboxen vom Streckenanfang lassen sich durch eine Folge (a_1, a_2, \dots, a_8) modellieren.

- 1) Geben Sie an, welche Art von Folge hierfür in Frage kommt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- 2) Stellen Sie für diese Folge ein explizites Bildungsgesetz auf.

Die 8 Radarboxen werden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 vom Navi erkannt.

- 3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Radarboxen auf dieser Strecke nicht erkannt werden.

Klassische_Gitarre (B_233)

Eine Gitarre wird standardmäßig gleichstufig (= gleichtemperiert) gestimmt. Dabei wird die Oktave (= Tonumfang von 8 Tönen) in 12 identische Halbtonschritte aufgeteilt.

Halbtonschritt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bezeichnung des Tons	c	cis/ des	d	dis/ es	e	f	fis/ ges	g	gis/ as	a	ais/ b	h

Die mathematische Vorschrift zur Bestimmung der Frequenz f der Töne auf der gesamten Tonleiter der gleichstufigen Stimmung ist eine geometrische Folge und lautet:

$$f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

i ... Anzahl der Halbtonschritte ausgehend vom gewählten Ausgangston (Das Vorzeichen von i ist bei Tönen, die höher sind als der Ausgangston, positiv und bei Tönen, die tiefer sind als der Ausgangston, negativ.)

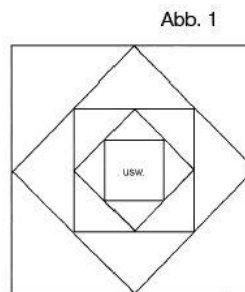
f_0 ... Frequenz eines beliebigen Ausgangstons in Hertz (Hz)

f_i ... Frequenz beim i -ten Halbtonschritt in Hz

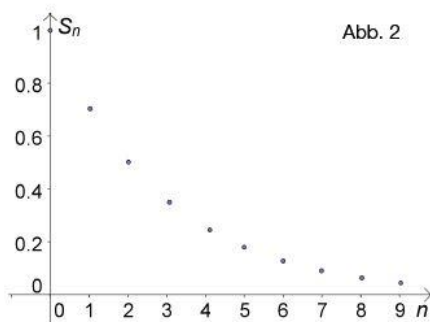
- a) Der gemeinsame Ton, auf den die Instrumente eines Ensembles gestimmt werden, ist das eingestrichene „a“ mit einer Frequenz von 440 Hz („Kammerton“).
 - Berechnen Sie mithilfe obenstehender Tabelle ausgehend vom Kammerton „a“ die Frequenz des tieferen Tons „e“.
- b) – Zeigen Sie anhand der Formel den Zusammenhang zwischen den Frequenzen zweier Töne, die sich genau um 1 Oktave unterscheiden.
- c) – Erstellen Sie eine Formel, mit der man ausgehend von einem beliebigen Ton mit der Frequenz f_n die Frequenz des nächsthöheren Halbtons berechnen kann.
- d) Der tiefste Ton einer Gitarre ist das tiefe „E“ mit einer Frequenz von 82,41 Hz, der höchste auf einer klassischen Gitarre spielbare Ton hat eine Frequenz von 987,77 Hz.
 - Berechnen Sie, wie viele Halbtonschritte der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst.

Seriationsmaterial (B_242)

In einem Kindergarten gibt es verschiedene Materialien, mit denen die Kinder spielerisch Größenverhältnisse erforschen können. Eines dieser Materialien besteht aus quadratischen Platten aus festem Schaumstoff, deren Seitenlängen S_n eine geometrische Folge bilden (Abb. 1). Jedes Quadrat berührt das nächstgrößere mit seinen Eckpunkten genau im Mittelpunkt der Seiten. Die größte Platte hat eine Seitenlänge von 1 Meter (m).



- a) – Berechnen Sie die Seitenlänge der 2. Platte in Zentimetern (cm).
- b) – Begründen Sie, warum der nachstehende Graph in Abb. 2 die geometrische Folge, die in Abb. 1 dargestellt ist, beschreibt.



- c) Ein Spielmaterial besteht aus Holzstäben, deren Länge jeweils um 5 cm zunimmt. Der kürzeste Stab ist 10 cm lang.
- Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Länge a_n eines beliebigen Stabes berechnen kann.
 - Beschreiben Sie alle Variablen, die in der Formel vorkommen.

Suessigkeiten (B_290)

- a) Der Wert der Maschine, die die Kugeln herstellt, nimmt im Laufe der Zeit ab. Diese Wertabnahme kann mit einer Folge beschrieben werden. Die einzelnen Folgenglieder geben den Wert der Maschine im entsprechenden Jahr an. Die Maschine hat im 1. Jahr einen Wert von € 97.500. Zu Beginn jedes weiteren Jahres verringert sich der Wert der Maschine jeweils um € 7.500.
- Geben Sie an, um welchen Folgentyp es sich hierbei handelt. Begründen Sie Ihre Auswahl.
 - Berechnen Sie die ersten 3 Folgenglieder.
 - Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.
 - Berechnen Sie, wann die Maschine € 60.000 wert ist.

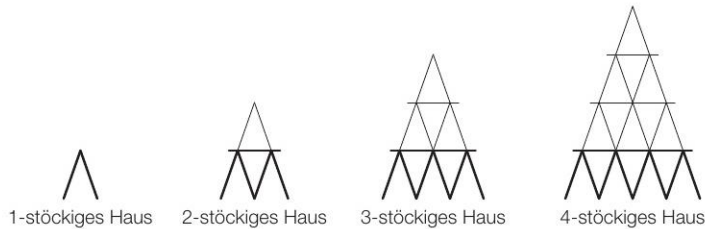
Kartenhaus* (B_520)

Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen (siehe nebenstehendes Foto).



Bildquelle: <https://pixabay.com/de/kartenhaus-zerbrechlich-geduld-763246/> [02.10.2019].

In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



- a) Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Karten für ein n -stöckiges Kartenhaus insgesamt benötigt werden und wie viele davon für das unterste Stockwerk benötigt werden.

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
1	2	2
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5		

- 1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen in die grau markierten Zellen ein.

Die Anzahl der Karten für das unterste Stockwerk kann durch die arithmetische Folge z_n beschrieben werden.

- 2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die arithmetische Folge z_n .

Maria hat ein 24-stöckiges Kartenhaus errichtet und möchte es nun zu einem 25-stöckigen Kartenhaus erweitern.

- 3) Ermitteln Sie die Anzahl der zusätzlichen Karten, die Maria dafür benötigt.

- b) Die Gesamtanzahl s_n der Karten für ein n -stöckiges Kartenhaus kann mit der nachstehenden Formel ermittelt werden.

$$s_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

- 1) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Karten, die für ein 50-stöckiges Kartenhaus benötigt werden.

Alexander hat 3 vollständige Kartensets zu je 32 Karten zur Verfügung und möchte ein Kartenhaus mit möglichst vielen Stockwerken bauen.

- 2) Berechnen Sie die Anzahl der Stockwerke, die Alexanders Kartenhaus höchstens haben kann.

Holzzug* (B_560)

- d) Ein bestimmter Hersteller bietet geradlinig verlaufende Teile nur in folgenden Längen an:
54 mm, 72 mm, 108 mm, 144 mm, 216 mm

Diese Längen (in mm) sind Glieder der arithmetischen Folge (a_n) .

$$a_1 = 54 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 18$$

- 1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz der Folge (a_n) .
- 2) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlenden Werte von n ein.

n	1				
a_n	54	72	108	144	216

Ferienwohnungen* (B_585)

- a) Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Rosenhof* kostet 1.200 Euro.
Jede weitere Woche kostet um 10 % weniger als die vorangegangene Woche.

Die Kosten der n -ten Woche können durch eine Folge beschrieben werden.

- 1) Geben Sie an, ob es sich dabei um eine arithmetische oder eine geometrische Folge handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- 2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge.
- 3) Berechnen Sie die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung.

- b) Die jeweiligen Kosten der n -ten Woche in den Ferienwohnungen *Seeblick* und *Bergschlössl* können durch Folgen beschrieben werden.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl* kostet 1.750 Euro.

Jede weitere Woche ist um 100 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Seeblick* kostet 1.450 Euro.

Jede weitere Woche ist um 50 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

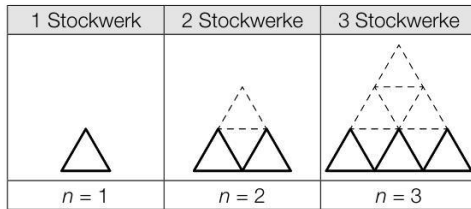
- 1) Ordnen Sie den beiden Ferienwohnungen jeweils den zutreffenden Zusammenhang aus A bis D zu.

<i>Bergschlössl</i>		A	(a_n) mit $a_n = a_{n+1} - 100$
<i>Seeblick</i>		B	(b_n) mit $b_{n+1} = b_{n-3} - 200$
		C	(c_n) mit $c_{n+2} = c_{n+1} + 50$
		D	(d_n) mit $d_{n-1} = d_{n+1} + 200$

- 2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Kosten der n -ten Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl*.
- 3) Ermitteln Sie für die Ferienwohnung *Bergschlössl* diejenige Woche, die erstmals um mindestens 25 % billiger als die 1. Woche ist.

Spielshow * (B_574)

- c) Im Rahmen einer Spielshow müssen die teilnehmenden Personen aus Spielkarten Kartenhäuser bauen. Dabei muss das jeweilige Kartenhaus in jeder Runde um ein Stockwerk höher gebaut werden.



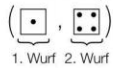
In der obigen Abbildung sind die Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk fett dargestellt. Die Anzahl der Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk bildet die arithmetische Folge (a_n) mit $a_1 = 3$.

- 1) Geben Sie die Folgenglieder a_2 und a_3 an.
- 2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge.
- 3) Ermitteln Sie das Folgenglied a_{10} .

Gewinnspiele * (B_599)

- b) Im Folgenden sind die Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen X für ein anderes Gewinnspiel dargestellt. Die Zufallsvariable X gibt dabei die größte geworfene Augenzahl beider Würfe an.

Es wird folgende Schreibweise verwendet:



$$P(X = 1) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 2) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{3}{36}$$

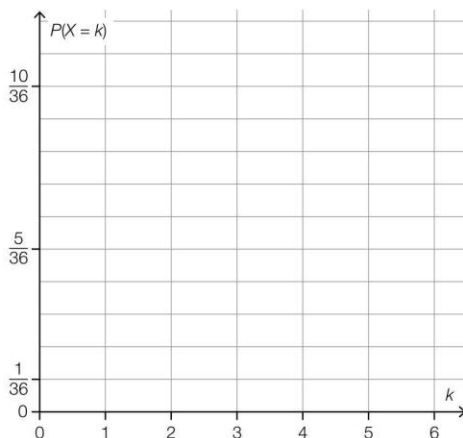
$$P(X = 3) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{5}{36}$$

usw.

$$P(X = 6) = \dots = \frac{11}{36}$$

Die obigen Wahrscheinlichkeiten bilden eine arithmetische Folge.

- 1) Zeigen Sie dies für $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$.
- 2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese Folge.
- 3) Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion als Säulendiagramm dar.



Puzzles * (B_609)

- a) Bei einem sogenannten *Rundpuzzle* werden die Teile in Ringen aneinandergelegt. Der innerste Ring besteht aus 4 Teilen. Die Anzahl der Teile jedes Ringes ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

n (Nummer des Ringes – von innen aus gezählt)	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n (Anzahl der Teile im n -ten Ring)	4	10	16	22	32	36	38	42

Die Anzahl der Teile im jeweiligen Ring kann durch die Folge (r_n) beschrieben werden.

- 1) Begründen Sie, warum sich die Anzahl der Teile im n -ten Ring bis $n = 4$ durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt.
- 2) Weisen Sie nach, dass sich die Anzahl der Teile im n -ten Ring ab $n = 5$ nicht mehr durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt.

Die gesamte Anzahl aller Teile bis zum n -ten Ring kann bis $n = 4$ mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$$s_n = k \cdot n^2 + \ell \cdot n$$

s_n ... gesamte Anzahl der Teile in den ersten n Ringen

n ... Anzahl der Ringe

k, ℓ ... Parameter

Es gilt: $s_1 = 4$ und $s_2 = 14$

- 3) Berechnen Sie die Parameter k und ℓ .

- b) Vom Hersteller B gibt es Puzzles, deren Teilezahlen der Folge (b_n) entsprechen. b_1 ist dabei die Teilezahl des größten Puzzles (d. h. des Puzzles mit den meisten Teilen).

$$b_n = 4000 \cdot q^{n-1} \quad \text{mit} \quad n \leq 6$$

Das fünftgrößte Puzzle ($n = 5$) hat 250 Teile.

- 1) Ermitteln Sie den Parameter q .

Das fünftgrößte Puzzle des Herstellers C hat doppelt so viele Teile wie das fünftgrößte Puzzle des Herstellers B . Dieses Verhältnis gilt für alle Puzzlegrößen.

Die Teilezahlen der Puzzles des Herstellers C entsprechen der Folge (c_n) .

- 2) Kreuzen Sie das auf die Folge (c_n) zutreffende Bildungsgesetz an. [1 aus 5]

$c_n = 4000 \cdot q^{2 \cdot n - 1}$	<input type="checkbox"/>
$c_n = 4000 \cdot q^{2 \cdot (n-1)}$	<input type="checkbox"/>
$c_n = 4000 \cdot (2 \cdot q)^{n-1}$	<input type="checkbox"/>
$c_n = (4000 \cdot 2) \cdot q^{n-1}$	<input type="checkbox"/>
$c_n = 4000 \cdot q^{(n-1)^2}$	<input type="checkbox"/>

All Star Level

Muenzen (2) * (B_493)

- a) Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

Agnes, Bettina und Celina spielen ein Spiel mit einer fairen Münze.

Agnes wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Agnes und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, dann ist Bettina an der Reihe.

Bettina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Bettina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Celina an der Reihe.

Celina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Celina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Runde 1 beendet und Agnes beginnt Runde 2.

Dieses Spiel wird auf die gleiche Art fortgesetzt.

In der unten stehenden Tabelle sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die ersten 3 Runden teilweise eingetragen.

- 1) Vervollständigen Sie diese Tabelle durch Eintragen der fehlenden Gewinnwahrscheinlichkeiten.

	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1			$\frac{1}{8}$
Runde 2		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$		$\frac{1}{512}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde n gewinnt, lässt sich durch eine geometrische Folge modellieren.

- 2) Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.

Lösungen

Rookie Level

Sitzreihen * (B_436) Lösung

- a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.

$$a_1 = 8 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 3$$

- b) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1$
 $a_n = 4 + n$

$$126 = \frac{(9 + n) \cdot n}{2}$$

$$n^2 + 9 \cdot n - 252 = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$n_1 = 12 \text{ (und } n_2 = -21)$$

Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.

- c) 5 ... Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
 4 ... in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4

$$a_7 = 5 + (7 - 1) \cdot 4 = 29$$

Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.

Bienenwaben * (B_404) Lösung

- a) Glieder der Folge: $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 18, a_4 = 24$

rekursives Bildungsgesetz:

$$a_1 = 6$$

$$a_{n+1} = a_n + 6$$

explizites Bildungsgesetz:

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6$$

oder:

$$a_n = 6 \cdot n$$

- b) $271 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9$

Diese Wabe besteht aus 9 Ringen.

Wuerfel (2) * (B_115) Lösung

- b) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

$$a_7 = 21$$

$$360 = 1,5 \cdot (n^2 + n)$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n_1 = 15, (n_2 = -16)$$

Die Treppe besteht aus 15 Ebenen, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Ressourcen * (B_512) Lösung

a1) $\frac{22 \cdot 10^9}{3,5 \cdot 10^9} = 6,28\dots$

Der durchschnittliche jährliche Rohstoffverbrauch pro Person betrug im Jahr 1970 rund 6,3 Tonnen.

a2) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

b_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$$b_1 = 22$$

$$b_{41} = 70$$

$$q = \sqrt[40]{\frac{70}{22}} = 1,02935\dots$$

$$b_n = 22 \cdot 1,0294^{n-1}$$

a3) $a_{n+1} = a_n + d$

a_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$$a_1 = 22$$

$$a_{41} = 70$$

$$d = \frac{70 - 22}{40} = 1,2$$

$$a_{n+1} = a_n + 1,2 \quad (\text{mit } a_1 = 22)$$

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn das Startglied $a_1 = 22$ beim rekursiven Bildungsgesetz nicht angegeben ist.

a4) 180 Milliarden Tonnen = $1,8 \cdot 10^{\boxed{14}}$ kg

Desinfektion * (B_530) Lösung

c1) $\frac{0,25\%}{5\%} = \frac{0,0125\%}{0,25\%} = \frac{0,000625\%}{0,0125\%} = 0,05$

Kinderraetsel * (B_551) Lösung

b1) 27; 18; ;

b2) $a_{n+1} = a_n - 9$ mit $a_1 = 27$

Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn das Startglied $a_1 = 27$ nicht angegeben ist.

Lauftraining* (B_449) Lösung

a1) $\frac{1,65}{1,5} = 1,1$ $\frac{1,815}{1,65} = 1,1$

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge gleich sind.

a2) Anna: $a_1 = 1,5$ $a_{n+1} = 1,1 \cdot a_n$

a3) Beate: $b_1 = 1,5$ $b_{n+1} = b_n + 0,5$

a4) Tabellenwert für Anna: 1,9965
Tabellenwert für Beate: 3

b1) $8 = 2,75 + 0,125 \cdot n \Rightarrow n = 42$

Am 42. Trainingstag läuft Clara eine Strecke von 8 km.

Biologieunterricht * (B_573) Lösung

c1) $a_n = 20 \cdot 5^{n-1}$ oder $a_n = 4 \cdot 5^n$

c2) $500 = 20 \cdot 5^{n-1}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$n = 3$$

In der 3. Generation werden erstmals 500 Jungtiere geboren.

Pro Level

Navigationsgeraete * (B_465) Lösung

b1) Da die Abstände zwischen den Radarboxen gleich groß sind, lassen sich ihre Abstände vom Streckenanfang als arithmetische Folge modellieren.

$$b2) a_n = \frac{45}{7} \cdot (n - 1)$$

b3) Binomialverteilung mit $p = 0,05$, $n = 8$:
 X ... Anzahl der nicht erkannten Radarboxen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X = 2) = 0,0514\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 5,1 %.

Klassische_Gitarre (B_233) Lösung

$$a) f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

Das „e“ ist 5 Halbtonschritte tiefer:

$$f_{-5} = 440 \cdot 2^{-\frac{5}{12}} = 440 \cdot 2^{-0,4167} = 329,627\dots$$

Die Frequenz des Tons „e“ beträgt ca. 329,63 Hz.

b) Für $i = 12$ (1 ganze Oktave höher) gilt: $f(12) = f_0 \cdot 2^1$.
 Für $i = -12$ (1 ganze Oktave tiefer) gilt: $f(-12) = f_0 \cdot 2^{-1}$.

D. h., der um 1 Oktave höhere Ton hat die doppelte Frequenz bzw. der um 1 Oktave tiefere Ton hat die halbe Frequenz.

(Beide Antworten sind als richtig zu werten.)

c) Potenzschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
 oder Wurzelschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot \sqrt[12]{2}$

(Anmerkung: In Musikbüchern steht in der Regel die Wurzelschreibweise.)

$$d) f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

$$987,77 = 82,41 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

$$\frac{987,77}{82,41} = 2^{\frac{i}{12}} \quad | \lg \text{ (oder } \ln)$$

$$i = 42,99$$

Der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst 43 Halbtonschritte.

(Berechnung auch mit Technologie erlaubt.)

Seriationsmaterial (B_242) Lösung

a) Die Seitenlänge der 2. Platte ist die Diagonale eines Quadrats mit der halben Seitenlänge der ersten:

$$a_0 = 100 \text{ cm}$$

$$a_1 = 50 \cdot \sqrt{2} \approx 71 \text{ cm}$$

b) Der Graph in Abb. 2 beschreibt eine geometrische Folge mit abnehmenden Gliedern. Die Zahlenwerte der dargestellten Folgeglieder stimmen mit den Seitenlängen S_n in Abb. 1 überein.

Jede schlüssige, korrekte Begründung gilt als richtig.

c) Bei den Holzstäben handelt es sich um eine arithmetische Folge.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k \text{ mit } n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

a_1 ... Länge des 1. Stabes in cm

k ... Längenzunahme in cm

a_n ... Länge des n -ten Stabes in cm

$$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 5$$

Es können auch andere Bezeichnungen gewählt werden.

Suessigkeiten (B_290) Lösung

a) $a_1 = € 97.500$

$a_2 = € 90.000$

$a_3 = € 82.500$

Es handelt sich um eine arithmetische Folge, da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.

$$a_n = 97500 - (n - 1) \cdot 7500$$

$$60000 = 97500 - (n - 1) \cdot 7500$$

$$n = 6$$

Zu Beginn des 6. Jahres hat die Maschine einen Wert von € 60.000.

Kartenhaus * (B_520) Lösung

a1)

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
5	40	14

a2) $z_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$

oder:

$$z_n = 3 \cdot n - 1$$

a3) $z_{25} = 74$

Um ein 25-stöckiges Kartenhaus zu errichten, benötigt Maria 74 zusätzliche Karten.

b1) $s_{50} = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 50 = 3775$

Für ein 50-stöckiges Kartenhaus werden insgesamt 3775 Karten benötigt.

b2) $3 \cdot 32 = 96$

$$96 = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$(n_1 = -8,16\dots); \quad n_2 = 7,83\dots$$

Alexanders Kartenhaus kann höchstens 7 Stockwerke haben.

Holzzug * (B_560) Lösung

d1) $a_n = 54 + (n - 1) \cdot 18$ oder $a_n = 36 + 18 \cdot n$

d2)

n	1	2	4	6	10
a_n	54	72	108	144	216

Lösung: Ferienwohnungen * (B_585)

a1) Es handelt sich um eine geometrische Folge, da jede weitere Woche um 10 % weniger als die vorangegangene Woche kostet.

oder:

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da der Quotient aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.

a2) $b_n = 1200 \cdot 0,9^{n-1}$

a3) $b_4 = 1200 \cdot 0,9^3 = 874,8$

Die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung betragen 874,80 Euro.

b1)

Bergschlössl	D
Seeblick	B

A	(a_n) mit $a_n = a_{n+1} - 100$
B	(b_n) mit $b_{n+1} = b_{n-3} - 200$
C	(c_n) mit $c_{n+2} = c_{n+1} + 50$
D	(d_n) mit $d_{n-1} = d_{n+1} + 200$

b2) $k_n = 1750 - (n - 1) \cdot 100$

oder:

$$k_n = 1850 - 100 \cdot n$$

b3) $1750 - (n - 1) \cdot 100 = 0,75 \cdot 1750$

$$1850 - 100 \cdot n = 1312,5$$

$$n = \frac{1850 - 1312,5}{100} = 5,375$$

Die 6. Woche ist diejenige Woche, die erstmals um mindestens 25 % billiger als die 1. Woche ist.

Spielshow * (B_574) Lösung

c1) $a_2 = 6$

$$a_3 = 9$$

c2) $a_n = 3 + 3 \cdot (n - 1)$

oder:

$$a_n = 3 \cdot n$$

c3) $a_{10} = 30$

Lösung: Gewinnspiele * (B_599)

b1) Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant.

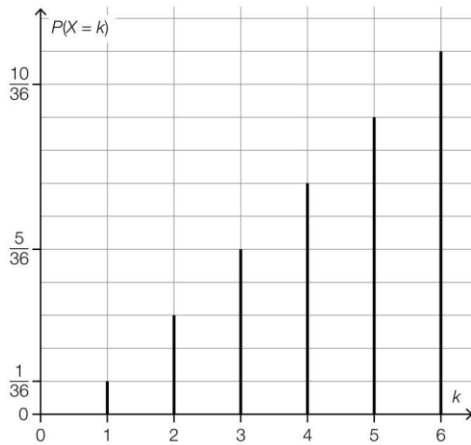
Es gilt:

$$P(X=2) - P(X=1) = P(X=3) - P(X=2) = \frac{2}{36}$$

Es handelt sich hier also um eine arithmetische Folge.

b2) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{36}$ mit $a_1 = \frac{1}{36}$

b3)



Lösung: Puzzles * (B_609)

a1) Es handelt sich um eine arithmetische Folge, weil (bis $n = 4$) jeder Ring um 6 Teile mehr hat als der vorige.

a2) Im 5. Ring befinden sich 32 Teile, das sind um 10 (und nicht um 6) mehr als im 4. Ring.

a3) I: $k \cdot 1^2 + \ell \cdot 1 = 4$
 II: $k \cdot 2^2 + \ell \cdot 2 = 14$

Berechnung mittels Technologieinsatz:

$$k = 3$$

$$\ell = 1$$

b1) $4000 \cdot q^{5-1} = 250$

$$q = \sqrt[4]{\frac{250}{4000}} = 0,5$$

b2)

$c_n = (4000 \cdot 2) \cdot q^{n-1}$	<input checked="" type="checkbox"/>

All Star Level

Muenzen (2) * (B_493) Lösung

a1)

	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Runde 2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

a2) $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$

c_n ... Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde n gewinnt

$$q = \frac{1}{64} : \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$c_n = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{oder} \quad c_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$$