Aufgabensammlung

Finanzmathematik

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Finanzmathematik

Rookie Level

Ansparplaene * (B_382)

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.
Dazu legt sie einen Geldbetrag B, der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E, wenn B, n und i bekannt sind.

$E =$ ____

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren € 4.000 angespart haben. Dazu will er sofort € 1.000 auf das Konto legen, nach 1 Jahr € 1.500 und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R. Der Zinssatz beträgt 3 % p.a.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als € 1.500 sein muss.
– Berechnen Sie den Restbetrag R.

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$5000 \cdot 1{,}035^5 + 1000 \cdot 1{,}035^2 \approx 7009{,}66$

– Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt € 10.000 angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit € 4.000. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p.m. veranlagt werden.

Hotelrenovierung (1) (B_210)

b) Für weitere Renovierungsarbeiten benötigt der Hotelbesitzer einen Kredit in Höhe von € 80.000. Seine Hausbank bietet ihm an, dass er den Kreditbetrag innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Jahresraten in Höhe von € 17.900 begleichen kann.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Kredit zugrunde liegt.

Der Hotelbesitzer möchte anstelle der Jahresraten den Kredit bei gleicher Laufzeit durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 8.950 begleichen.

– Argumentieren Sie, warum sich bei dieser Zahlungsvariante ein höherer effektiver Jahreszinssatz ergibt.

Sonnensegel (B_091)

b) Die Kosten für die Herstellung des Sonnensegels aus besonders witterungsbeständigem Material inklusive Montage betragen € 12.500. Die Firma möchte diesen Betrag in Form von gleichbleibenden nachschüssigen Monatsraten zu je € 360 bezahlen.

– Berechnen Sie, wie viele Raten bei einem Zinssatz von 2,4 % p.a. von der Firma zu entrichten sind.

Maschinenring (B_182)

a) Man geht davon aus, dass der jetzige Mähdrescher noch genau 10 Jahre verwendet werden kann. Daher plant man, dann einen neuen Mähdrescher um einen voraussichtlichen Kaufpreis von € 150.000 zu erwerben.
Für die Anschaffung haben die Betriebe gemeinsam bereits € 30.000 an Rücklagen gebildet und wollen den Rest in Form von vorschüssigen Jahresraten ansparen.
Der Zinssatz wird mit 1,5 % p. a. angenommen.

– Veranschaulichen Sie das Finanzierungskonzept mithilfe einer Zeitlinie.
– Berechnen Sie die Höhe der Jahresraten.

Es wird überlegt, mit der Ratenzahlung erst in 5 Jahren zu beginnen.

– Argumentieren Sie, warum die neuen Raten für die restlichen 5 Jahre in diesem Fall mehr als doppelt so hoch sein müssen, als wenn sofort mit dem Ansparen begonnen wird.

Baugrundstuecke * (B_090)

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

– Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern.

b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

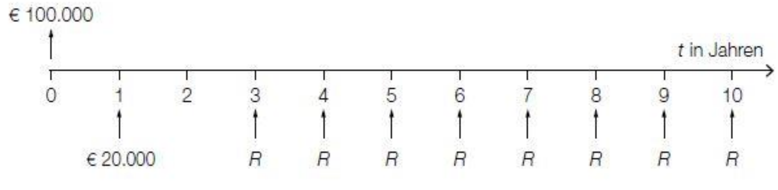
– Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden.

Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:
$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$
Eine Lösung dieser Gleichung ist $x \approx 1{,}0198$.

– Interpretieren Sie die Bedeutung von x im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen R können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

– Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente.
– Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen R.

d) Frau Marth nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 120.000 mit jährlich nachschüssigen Kreditrückzahlungen auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 2,5 % p.a.

Für die ersten zwei Jahre vereinbart Frau Marth Sonderbedingungen, die im nachstehenden Tilgungsplan dargestellt sind.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1			€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00		€ 123.000,00

– Ermitteln Sie die Beträge für die beiden grau markierten Zellen im obigen Tilgungsplan.

Ab dem Jahr 3 werden jährliche Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt werden müssen.

Verzinsung * (A_256)

a) Auf einem Konto werden € 3.000 angelegt.

Für eine Zeitspanne von 3 Jahren wird dieser Betrag mit 5 % pro Jahr verzinst, anschließend für 2 Jahre mit 1 % pro Jahr.

– Ermitteln Sie den Kontostand nach 5 Jahren K_5.

Bei einem konstanten Jahreszinssatz i wäre der Kontostand nach 5 Jahren auf denselben Wert K_5 angewachsen.

– Bestimmen Sie diesen Jahreszinssatz i.

Anschaffungen (B_134)

a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Das Angebot einer anderen Bank für die Rückzahlung eines Kredits in Höhe von € 50.000 ist ausschnittsweise im folgenden Tilgungsplan dargestellt:

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4			€ 12.500	

– Zeigen Sie, dass diesem Tilgungsplan ein effektiver Jahreszinssatz von rund 4,5 % zugrunde liegt.
– Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das 4. Semester.

Die Rückzahlung des Kredits soll am Ende des 5. Semesters durch eine Restzahlung abgeschlossen werden.

– Berechnen Sie die Höhe dieser Restzahlung.

c) Der Unternehmer nimmt einen weiteren Kredit in Höhe von € 10.000 auf, den er innerhalb eines Jahres zurückzahlen möchte.

Er kann zwischen 2 Rückzahlungsvarianten bei gleichem Jahreszinssatz *i* wählen:

- 1. Variante: 2 nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 5.000 und 1 Restzahlung
- 2. Variante: 4 nachschüssige Quartalsraten in Höhe von € 2.500 und 1 Restzahlung

– Erklären Sie, warum 2 nachschüssige Quartalsraten von € 2.500 nicht genau einer nachschüssigen Semesterrate von € 5.000 entsprechen.
– Erklären Sie, bei welcher Variante der Unternehmer eine höhere Restzahlung zu tätigen hat.

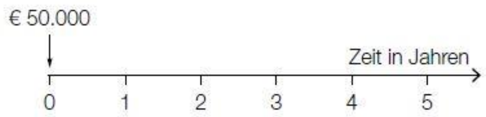
Erbschaft * (B_264)

a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.
Die Höhe der Auszahlungen *Z* kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab.

2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen *Z*.

b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p.a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€\,50.000 - €\,20.000}{60} = €\,500$ abheben kann.

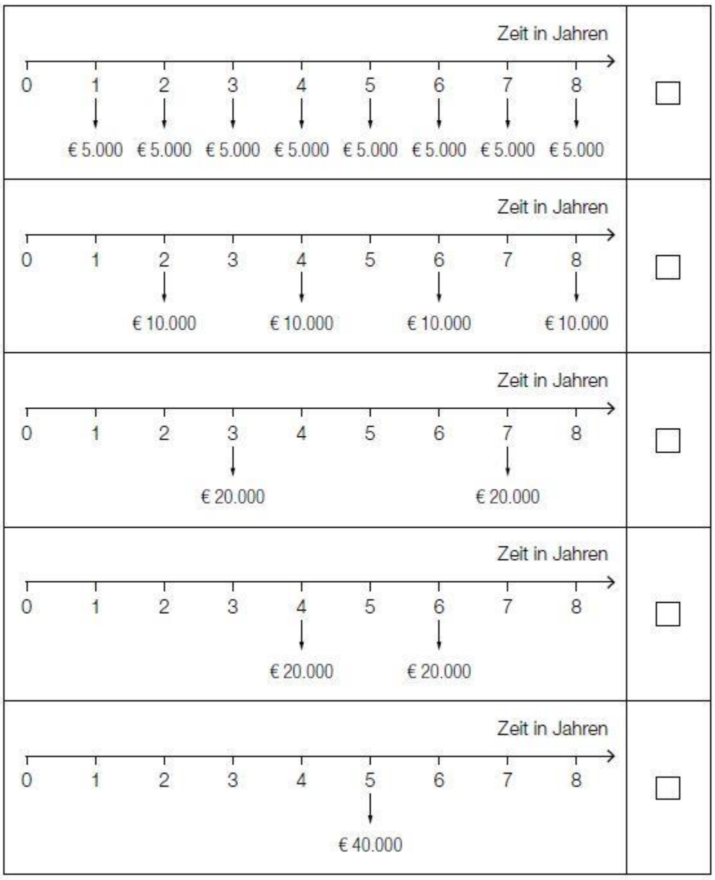
1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind.

2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.

3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten.

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. *[1 aus 5]*



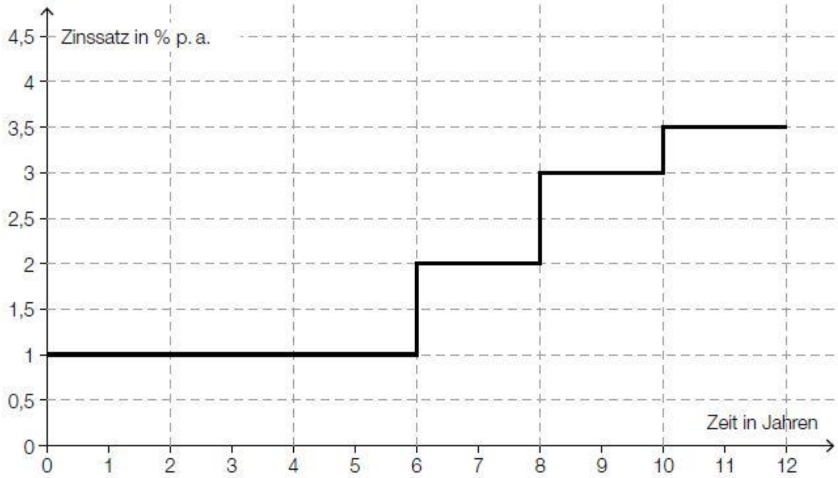
Oeffentlicher Verkehr in Wien * (B_515)

a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen.

Ansparplan * (B_185)

a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab.

2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz.

3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen.

b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p.a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.

1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse.

2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z.

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p.a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R.

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht.

Pro Level

Liftgesellschaft (1) * (B_434)

a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$(50\,000 \cdot 1{,}03^2 + 30\,000) \cdot 1{,}035^4 + 80\,000 \cdot 1{,}035 \approx 178\,096{,}05$

– Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
– Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.

Pensionsvorsorge * (B_420)

a) Er zahlt 15 Jahre lang monatlich vorschüssig € 400 auf ein mit 0,27 % p. m. verzinstes privates Pensionskonto und lässt sein Geld anschließend 25 Jahre bei gleichbleibendem Zinssatz angelegt.

– Berechnen Sie seinen privaten Pensionsbetrag nach 40 Jahren.

b) Eine Bank unterbreitet ihm folgenden Vorschlag:
Durch Einzahlungen von € 20.000 sofort, € 30.000 nach 5 Jahren und € 40.000 nach 15 Jahren garantiert sie ihm nach insgesamt 40 Jahren ein angespartes Kapital von € 200.000.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und angespartes Kapital) auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz.

c) Er hat auf seinem privaten Pensionskonto, das mit 2 % p. a. verzinst wird, einen Betrag in Höhe von € 200.000 angespart.

Nun vergleicht er zwei Auszahlungsvarianten:
Variante 1: Er hebt am Ende jedes Jahres € 12.000 ab.
Variante 2: Er hebt am Ende jedes Jahres € 4.000 ab.

– Berechnen Sie, wie oft er bei Variante 1 den vollen Betrag abheben könnte.
– Erklären Sie, warum bei Variante 2 das angesparte Kapital am Pensionskonto erhalten bleibt.

Seegrundstueck * (B_415)

Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Ein Kreditinstitut macht folgendes Angebot:
Der Kreditnehmer bezahlt am Ende jedes Jahres eine Rate in Höhe von € 100.000 bei einem Zinssatz von 6,75 % p.a.

– Berechnen Sie, wie viele volle Raten der Kreditnehmer bezahlen muss.
– Berechnen Sie die Höhe des ein Jahr nach der letzten vollen Rate fälligen Restbetrags.

b) Ein anderes Kreditinstitut stellt einen Tilgungsplan zur Rückzahlung des Kredits auf. Ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

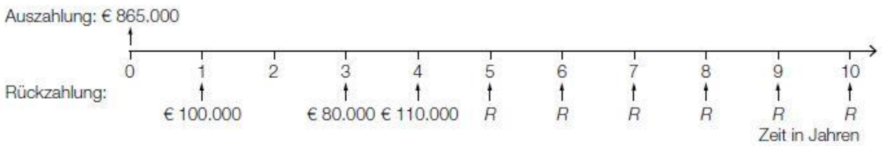
Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ −48.282,32		
...				

– Ermitteln Sie die Annuität und die Restschuld im Jahr 1.

Im Jahr 2 sind die beiden Einträge in den Spalten „Zinsanteil“ und „Tilgungsanteil“ bis auf das Vorzeichen gleich.

– Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2.

c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



– Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Zinssatz von 6 % p.a.

Startkapital (B_146)

a) Er hat während der letzten 10 Jahre die folgenden Zahlungen auf ein mit 2,1 % p.a. verzinstes Sparbuch getätigt: Zu Beginn des 1. Jahres € 20.000, zu Beginn des 4. Jahres € 75.000 und ab dem Beginn des 8. Jahres monatlich vorschüssige Raten in Höhe von je € 450.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie, über welchen Betrag Simon nach diesen 10 Jahren verfügen kann.

Simon überlegt durch welche nachschüssigen Monatsraten R er in 10 Jahren denselben Betrag hätte ansparen können.

– Ermitteln Sie die Höhe dieser Rate R.

b) Simon benötigt zusätzlich zu seinen Ersparnissen ein Kapital in Höhe von € 45.000. Die Bank bietet ihm einen entsprechenden Kredit mit dem folgenden Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 45.000,00
1	€ 1.665,00	€ 9.000,00	€ 10.665,00	€ 36.000,00
2	€ 1.332,00	€ 9.000,00		€ 27.000,00
3	€ 999,00	€ 9.000,00	€ 9.999,00	€ 18.000,00
4	€ 666,00	€ 9.000,00	€ 9.666,00	€ 9.000,00
5	€ 333,00	€ 9.000,00	€ 9.333,00	€ 0,00

– Ermitteln Sie die fehlende Zahl im Tilgungsplan.

In einem anderen Angebot soll diese Schuld bei einem Zinssatz von 4 % p. a. durch 5 nachschüssige Jahresraten getilgt werden.

– Berechnen Sie die zugehörige Ratenhöhe.

Kredit fuer einen Wohnungskauf * (B_223)

a) Bank *A* bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von € 120.000 jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den zu 3 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Bank *B* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, der in 15 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 2.650 zu tilgen ist. Eine Bearbeitungsgebühr von 2 % der Kreditsumme wird bei Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren sind in den Raten berücksichtigt.)

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Kredits.

c) Bank *C* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, den sie durch nachschüssige Quartalsraten mit dem Zinssatz 1 % p. q. zurückzahlen soll. Die Bank legt ihr den folgenden Tilgungsplan vor:

Quartal	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1	€ 1.200,00	€ 986,26	€ 2.186,26	€ 119.013,74

– Dokumentieren Sie, wie der Zinssatz 1 % p. q. aus dem Tilgungsplan ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie die Laufzeit des Kredits.
– Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Zinsanteil, Tilgungsanteil und Annuität.

Hotelerweiterung * (B_106)

d) Um die Investition durchführen zu können, ist ein Bankkredit in Höhe von € 800.000 notwendig. Für die Rückzahlung werden eine Laufzeit von 15 Jahren und nachschüssige Semesterraten in Höhe von jeweils € 38.100 vereinbart.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Finanzierungsmodell.

Renovierungskredit * (B_350)

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p.a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:
€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

– Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.
– Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p.a.

– Ermitteln Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt.

c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d.h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

– Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss.
– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt.
– Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde.

d) Frau Eberharter vereinbart für einen Kredit mit einer Bank Sonderkonditionen. Die Bank erstellt dazu einen Tilgungsplan. Ein Auszug dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ –660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden auftretenden Beträge in Höhe von € 0,00 im gegebenen Sachzusammenhang.

Segelboot (B_117)

a) Der Verkäufer schlägt folgende Zahlungsvariante vor:
Anzahlung in Höhe von € 6.000 und 5 Jahre lang (ab dem Kaufzeitpunkt gerechnet) nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200 bei einem jährlichen Zinssatz von i

– Stellen Sie diese Zahlungsvariante mithilfe einer Zeitlinie grafisch dar.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwerts B des Segelboots.

B = ________________________________

b) Der Verkäufer ändert die Konditionen: Er veranschlagt den Barwert des Bootes mit € 10.800 und verlangt eine Anzahlung in Höhe von € 6.000 sowie 3 nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200. Der Rest soll ab dem 4. Jahr durch 4 nachschüssige Jahresraten der Höhe R beglichen werden.

– Berechnen Sie die Ratenhöhe R, wenn der Zinssatz 8 % p. a. beträgt.

c) Um das Boot neu lackieren zu lassen, borgt sich der Käufer € 5.000, die er in Form von nachschüssigen Quartalsraten von jeweils € 300 bei einem Zinssatz von 6 % p. a. zurückzahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Quartalsraten zu zahlen sind.
– Berechnen Sie, welcher Restbetrag 1 Quartal nach der letzten Vollrate anfällt.

Sparbuch * (B_222)

a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt).

b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Berechnen Sie die Höhe des Betrags x ohne Berücksichtigung der KESt.
– Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.

– Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KESt).

Interneteinkaeufe (B_216)

b) Ein Versandhaus bietet seinen Internetkunden die Möglichkeit, ihre Rechnung durch Ratenzahlung zu begleichen. Die Rückzahlung erfolgt monatlich vorschüssig. Die erste Rate ist einen Monat nach Kaufabschluss fällig.

– Erklären Sie, warum der als vorschüssig angegebene Rückzahlungsmodus auch als nachschüssige Rente aufgefasst werden kann.

Ein Betrag von € 250 wird durch 23 Monatsraten beglichen. Die ersten 22 Raten betragen jeweils € 13, die letzte Rate € 17,22.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Zahlungsmodus zugrunde liegt.

Kuechenkauf* (B_452)

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz.

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt.

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p.a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz.

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils."

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

$S =$ ____________________________________

Erweiterung der Produktpalette (B_142)

b) Der Unternehmer benötigt einen Kredit in Höhe von € 400.000. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten der Höhe R über einen Zeitraum von 10 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 3,7 %.

– Veranschaulichen Sie den Kreditbetrag und die Raten auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

Kaffeeautomat * (B_285)

a) Die Kosten für den Kaffeeautomaten betragen € 5.500.

Der Elternverein erhält folgendes Leasingangebot:

- Anzahlung: € 1.000 bei Vertragsabschluss
- 48 Monatsraten zu je € 100
- Die Ratenzahlungen beginnen einen Monat nach Vertragsabschluss.
- Der Restwert in Höhe von € 900 ist gleichzeitig mit der letzten Rate zu bezahlen.

1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Angebot.

Autokauf (1) * (B_459)

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse.

Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung" handelt.
Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung" versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist.

b) Bei „Drittelfinanzierung" muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R.

2) Berechnen Sie R.

c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1				
2				

2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist.

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung.

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.
Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz.

Lagerhalle * (B_484)

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz *i* verzinst werden:
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag *X* ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags *X*.

$X =$ ____

2) Berechnen Sie den Betrag *X* für den Zinssatz $i = 2{,}5\ \%$ p. a.

b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1 % p. q. getilgt werden.

1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate.

c) Ein anderes Kreditangebot enthält Sonderkonditionen für die Jahre 1 und 2.

Diese Sonderkonditionen können dem Tilgungsplan entnommen werden:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 180.000
1	€ 5.400	€ –5.400	€ 0	€ 185.400
2	€ 5.562			€ 180.000

1) Ermitteln Sie den Jahreszinssatz für dieses Kreditangebot.

2) Erklären Sie mithilfe der Einträge im Tilgungsplan, warum der Tilgungsanteil im Jahr 1 negativ ist.

3) Vervollständigen Sie die Zeile für das Jahr 2 im obigen Tilgungsplan.

Produktionserweiterung_2 (B_337)

b) Für eine neue Produktionshalle wird ein Kredit benötigt. Die ersten 5 Jahre garantiert die Bank einen fixen Jahreszinssatz *i*, für die restliche Laufzeit wird ein Jahreszinssatz *i′* angenommen.
Die nachstehende Tabelle zeigt einen Auszug aus dem Tilgungsplan der Annuitätenschuld.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 2.121,44	€ 7.878,56	€ 10.000,00	
6	€ 2.513,44	€ 7.486,56	€ 10.000,00	
…				
12	€ 527,12	€ 9.472,88	€ 10.000,00	€ 3.705,01
13				

– Beschreiben Sie, wie man aus dem Tilgungsplan ablesen kann, dass der Zinssatz *i′* größer als *i* ist.
– Berechnen Sie die Zeile für das Jahr 13 des Tilgungsplans, wenn man davon ausgeht, dass die Schuld am Ende dieses Jahres vollständig getilgt wird.

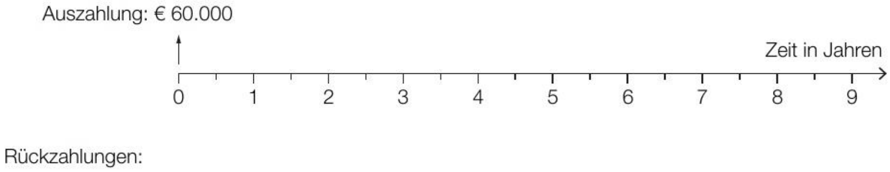
Obsthaendler * (B_489)

a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:

- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils R, die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s.

b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz i, bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde.

2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen.

Wohnanlage * (B_502)

a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m², 60 m², 78 m² und 102 m².

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro.

b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.
Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse.

2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i.

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind.

c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.
Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits.
2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein.

Anschaffungen (B_134)

a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Das Angebot einer anderen Bank für die Rückzahlung eines Kredits in Höhe von € 50.000 ist ausschnittsweise im folgenden Tilgungsplan dargestellt:

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4			€ 12.500	

– Zeigen Sie, dass diesem Tilgungsplan ein effektiver Jahreszinssatz von rund 4,5 % zugrunde liegt.
– Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das 4. Semester.

Die Rückzahlung des Kredits soll am Ende des 5. Semesters durch eine Restzahlung abgeschlossen werden.

– Berechnen Sie die Höhe dieser Restzahlung.

c) Der Unternehmer nimmt einen weiteren Kredit in Höhe von € 10.000 auf, den er innerhalb eines Jahres zurückzahlen möchte.
Er kann zwischen 2 Rückzahlungsvarianten bei gleichem Jahreszinssatz *i* wählen:
- 1. Variante: 2 nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 5.000 und 1 Restzahlung
- 2. Variante: 4 nachschüssige Quartalsraten in Höhe von € 2.500 und 1 Restzahlung

– Erklären Sie, warum 2 nachschüssige Quartalsraten von € 2.500 nicht genau einer nachschüssigen Semesterrate von € 5.000 entsprechen.
– Erklären Sie, bei welcher Variante der Unternehmer eine höhere Restzahlung zu tätigen hat.

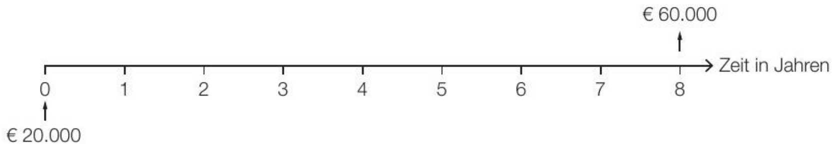
Reisebus * (B_516)

b) Für den Ankauf des Reisebusses hat das Reiseunternehmen in den letzten 8 Jahren eine Rücklage in Höhe von € 60.000 gebildet.

Die Höhe der Rücklage ergibt sich aus einer Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 und regelmäßigen Zahlungen R:

$$20000 \cdot 1{,}021^8 + R \cdot \frac{1{,}021^4 - 1}{1{,}021 - 1} \cdot 1{,}021^2 = 60000$$

1) Tragen Sie alle Zahlungen R auf der nachstehenden Zeitachse ein.



2) Berechnen Sie die Höhe von R.

c) Für den Ankauf des Reisebusses nimmt das Reiseunternehmen einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. auf. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt durch gleichbleibende jährliche Annuitäten.

Einige Werte des Tilgungsplans sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die Höhe der Annuität in die grau markierte Zelle ein.

Bei der weiteren Tilgung des Kredits verbleibt ein Restbetrag, der ein Jahr nach der letzten Vollrate bezahlt wird.

2) Ermitteln Sie die Höhe dieses Restbetrags.

Zinsentwicklung * (B_528)

b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat.

2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein.

c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1.

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B, i_0 und i_1.

$E =$ ________________________________

2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\ \%$ und $i_1 = 1\ \%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i, bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst.

Abfindung * (B_538)

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.
Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:
€ 25.000 nach 3 Jahren,
€ 30.000 nach 6 Jahren und
€ 35.000 nach 9 Jahren.

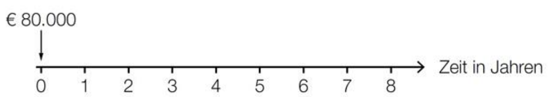
1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes i auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a.

$$80000 = 20000 + R \cdot \frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^6}$$

1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten R auf der nachstehenden Zeitachse dar. *[0/1 P.]*



c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

$1{,}02^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}004962...$

2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird. *[0/1 P.]*

d) Zur Finanzierung der Hausübernahme nimmt Martha einen Kredit auf.

Die vorletzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
15	€ 319,43	€ 9.680,57	€ 10.000,00	€ 966,95

1) Zeigen Sie, dass der Zinssatz 3 % p.a. beträgt. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie die nachstehende letzte Zeile des Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16				€ 0,00

Autokauf (3) * (B_546)

a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz i_{12} für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = 1 + i_{12}$ führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Eine andere Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einem Zinssatz von 6,2 % p.a. an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 219,35.

1) Berechnen Sie den zu 6,2 % p.a. äquivalenten Monatszinssatz. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1				

c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag B_1 und vor 3 Jahren den Geldbetrag B_2 auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p.a.

1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

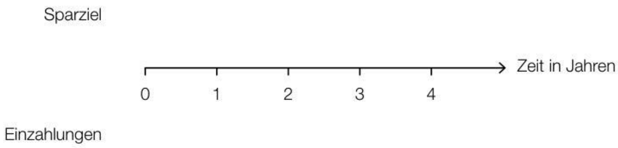
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

Esszimmereinrichtung * (B_558)

a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag X auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse.



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz i verzinst.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags X auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz i.

$X =$ ____

b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt.

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags.

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis W über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe R bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit q_{12} bezeichnet.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]*

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	☐

c) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch über einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren finanzieren.

Dazu wird eine gleichbleibende Annuität berechnet und ein Tilgungsplan erstellt.

Allerdings ist nach 5 Jahren die Schuld noch nicht vollständig getilgt, weil während der Laufzeit eine einmalige Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 4.000,00
1	€ 100,00	€ 760,99	€ 860,99	€ 3.239,01
2	€ 80,98	€ 780,01	€ 860,99	€ 2.459,00
3	€ 98,36	€ 762,63	€ 860,99	€ 1.696,37
4	€ 67,85	€ 793,13	€ 860,99	€ 903,24
5	€ 36,13	€ 824,86	€ 860,99	€ 78,38

1) Erklären Sie, woran man erkennen kann, dass während der Laufzeit eine Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

2) Berechnen Sie den Zinssatz im Jahr 5.

Der Kredit soll am Ende des Jahres 5 vollständig getilgt werden.
Dadurch verändert sich die letzte Zeile des obigen Tilgungsplans.

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13			€ 0,00

Niedrigzinsphase * (B_568)

a) Für einen Kredit mit jährlich nachschüssigen Annuitäten in Höhe von je € 12.000 wurde in der Zeit vor der Niedrigzinsphase ein fixer Jahreszinssatz i vereinbart.
Die Zeile des Tilgungsplans für das Jahr 7 ist gegeben:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
7	€ 3.628,87	€ 8.371,13	€ 12.000,00	€ 78.030,55

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz i.

2) Berechnen Sie die Höhe des Kredits.

Nach dem Jahr 7 wird mit der Bank über einen neuen Zinssatz verhandelt. Mit dem ursprünglichen Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_8	T_8	€ 12.000,00	K_8

Mit dem neuen, niedrigeren Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_{neu}	T_{neu}	€ 12.000,00	K_{neu}

Diese beiden Zeilen für das Jahr 8 werden verglichen.

3) Tragen Sie jeweils das richtige Zeichen („<“ oder „>“) ein.

Z_{neu} ______ Z_8 T_{neu} ______ T_8 K_{neu} ______ K_8

b) Bei Tilgungsplänen können verschiedene Sonderfälle auftreten.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen.

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	

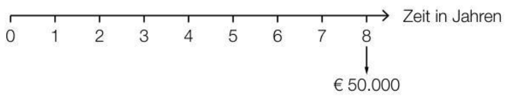
A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20\,000 \cdot q^2 = 50\,000$$

R ... Rate
q ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie alle Raten R und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein.



2) Berechnen Sie die Höhe der Rate R für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p. a. ist.

Umbaufinanzierung * (B_581)

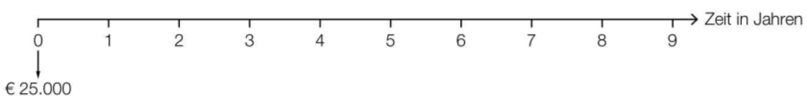
Maria und Johanna bauen ihre gemeinsame Wohnung um und benötigen für die Umbaufinanzierung einen Kredit in Höhe von € 25.000.

a) Maria überlegt sich eine Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- einmalige Rückzahlung in Höhe von € 8.000, die 2 Jahre nach Auszahlung des Kredits erfolgt
- 3 Jahresraten in Höhe von jeweils € 6.500, beginnend 3 Jahre nach der einmaligen Rückzahlung

1) Tragen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Rückzahlungen ein.



2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der der zugrundeliegende Jahreszinssatz i berechnet werden kann.

b) Johanna überlegt sich eine andere Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- 5 Jahresraten in Höhe von jeweils € 5.000, beginnend 1 Jahr nach Auszahlung des Kredits
- Restzahlung, die 1 Jahr nach der letzten Jahresrate erfolgt

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung.

c) Maria und Johanna erhalten von ihrer Bank einen Tilgungsplan für die Rückzahlung des Kredits mit gleich bleibenden monatlichen Annuitäten.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38			€ 450,00	

1) Ermitteln Sie den Monatszinssatz für den Monat 37.

Für den Monat 38 beträgt der Monatszinssatz 0,2 %.

2) Vervollständigen Sie die Zeile für den Monat 38.

d) Für den Kredit in Höhe von € 25.000 bietet eine andere Bank Maria und Johanna eine Tilgung mit einem Monatszinssatz von 0,375 % an.
Sie verhandeln mit der Bank über einen Zahlungsaufschub.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten ohne Rückzahlungen die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen würde.

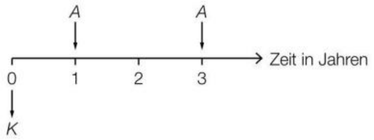
Maria und Johanna wollen nun doch von Anfang an am Ende jedes Monats genau so viel zurückzahlen, dass die Restschuld am Ende jedes Monats gleich dem ursprünglichen Kreditbetrag von € 25.000 ist.

2) Ermitteln Sie, wie hoch die monatlichen Rückzahlungen dazu sein müssen.

Tischlerei * (B_593)

a) Für den Kauf einer Sägemaschine wird der Kreditbetrag K aufgenommen. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a.

Der Kredit wird durch zwei gleich hohe Zahlungen A getilgt (siehe nachstehende Zeitachse).



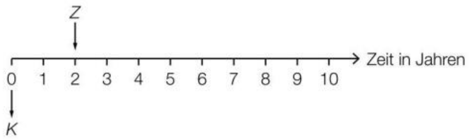
1) Stellen Sie mithilfe von K eine Formel für A auf.

A = ________________________________

Alternativ kann der Kreditbetrag K durch eine Einmalzahlung Z und 5 jährliche Raten R zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a.

Es gilt: $K \cdot 1{,}02^3 = Z \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Der Kreditbetrag K und die Einmalzahlung Z sind auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



2) Zeichnen Sie auf der obigen Zeitachse die Raten R ein.

3) Berechnen Sie R für K = € 60.000 und Z = € 20.000.

b) Eine Schleifmaschine wird um den Betrag S gekauft. Die Bezahlung erfolgt mit den Beträgen B_1 und B_2.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$

q ... monatlicher Aufzinsungsfaktor ($q > 1$)

Alternativ könnte die Zahlung auch mit den Beträgen B_1 und B_3 erfolgen.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_3 \cdot q^{-3}$

1) Argumentieren Sie, dass B_3 kleiner als B_2 ist.

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die <u>nicht</u> zur Gleichung $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$ äquivalent ist. *[1 aus 5]*

$S \cdot q^{10} = B_1 \cdot q^5 + B_2 \cdot q^3$	☐
$S \cdot q^7 = B_1 \cdot q^2 + B_2$	☐
$S \cdot q^6 = B_1 \cdot q + B_2 \cdot q^{-1}$	☐
$S \cdot q^5 = B_1 + B_2 \cdot q^{-2}$	☐
$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☐

c) Für den Kauf einer Fräsmaschine wird ein Kredit in Höhe von € 45.000 aufgenommen. Dieser Kredit wird durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von je € 3.500 und eine Restzahlung getilgt. Der Semesterzinssatz beträgt 0,8 %.

Für die Rückzahlung des Kredits wurde der nachstehende Tilgungsplan erstellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	

1) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Semester 1.

Es werden 13 nachschüssige Semesterraten gezahlt. Ein Semester nach Zahlung der letzten Semesterrate wird der Kredit durch eine Restzahlung vollständig getilgt.

2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeilen für die Semester 13 und 14.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	
14	€ 17,30			€ 0,00

Für eine alternative Rückzahlung wird folgende Berechnung durchgeführt:

$\sqrt[6]{1{,}008} - 1 \approx 0{,}0013$

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Swimmingpool (2) * (B_605)

a) Lea möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür über einen Zeitraum von 5 Jahren bei einem konstanten Jahreszinssatz 4 Einzahlungen Z auf ein Konto getätigt und so bis heute € 2.468,39 gespart.

Dabei gilt:

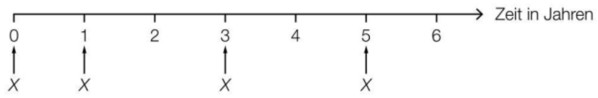
$Z + Z \cdot 1{,}0102^2 + Z \cdot 1{,}0102^4 + Z \cdot 1{,}0102^5 = 2\,468{,}39$

1) Lesen Sie den Jahreszinssatz i ab.

i = ____________________ % p. a.

2) Berechnen Sie die Höhe von Z.

b) Melisa möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür 4 Einzahlungen X auf ein Konto getätigt (siehe nachstehende Zeitachse).



Für verschiedene Zeitpunkte soll der Wert dieser Einzahlungen berechnet werden.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor wird mit q bezeichnet.

1) Ordnen Sie den beiden Werten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu.

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c) Konstantin möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf, den er durch 120 Monatsraten in Höhe von jeweils € 198,71 zurückzahlen möchte. Die 1. Zahlung erfolgt 1 Monat nach Auszahlung des Kredits.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz für diesen Kredit.

d) Simon möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit auf, den er durch nachschüssige monatliche Annuitäten bei einem Monatszinssatz i_{12} zurückzahlen soll.
Die Höhe der monatlichen Annuitäten ändert sich dabei.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
12				€ 6.766,03
13				€ 6.492,13
14				€ 6.492,13
15			A_{15}	€ 6.217,55

1) Geben Sie denjenigen Monat an, in dem der Tilgungsanteil € 0 beträgt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von A_{15} auf.
Verwenden Sie dabei i_{12} sowie die Werte für die Restschuld im Monat 14 und im Monat 15.

A_{15} = ____

All Star Level

Autokauf (2) (B_197)

Ein neues Auto kostet € 66.700.

a) Herr Maier möchte dieses Auto kaufen. Innerhalb von 30 Tagen ist die Rechnung zu bezahlen. Der Verkäufer bietet ihm bei Barzahlung des Wagens innerhalb von 14 Tagen einen Skonto (Preisnachlass bei Zahlung binnen einer bestimmten Frist) von 1,5 % des Kaufpreises an. Leider verfügt Herr Maier erst 30 Tage nach dem Autokauf über das notwendige Geld. Um das Skonto-Angebot des Verkäufers annehmen zu können, müsste er sein Konto bei einem Überziehungszinssatz von 12 % p. a. überziehen.

– Überprüfen Sie, ob Herr Maier unter diesen Bedingungen das Auto innerhalb der ersten 14 Tage nach Kauf bezahlen soll.

b) Frau Specht möchte dasselbe Auto kaufen. Allerdings kann sie nicht den vollen Kaufpreis von € 66.700 zahlen. Sie überlegt daher, das Auto zu leasen. Das Autohaus bietet ihr folgende Konditionen:
Anzahlung: € 13.340
Laufzeit: 36 Monate
monatlich nachschüssige Rate: € 922
Restwert: € 26.000

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Leasinggeschäft.

c) Eine Alternative zu einer Leasingfinanzierung ist die Finanzierung mittels eines Kredits. Für das zum Verkauf stehende Auto (Kaufpreis: € 66.700) wird folgender Kredit angeboten:
Anzahlung: € 13.560
Zinssatz: 5,06 % p. a.
Laufzeit: 60 Monate

– Berechnen Sie, wie hoch bei diesem Angebot die zu leistenden nachschüssigen Monatsraten sind.

Geraetekauf (B_211)

b) Die Geräte können durch einen Bankkredit finanziert werden. Familie Kurz erhält folgendes Angebot:
Kreditbetrag: € 10.000
Bearbeitungsgebühr: 2 % des Kreditbetrags (bei Kreditabschluss fällig)
60 nachschüssige Monatsraten zu je € 185

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Effektivzinssatz dieses Angebots.

c) Familie Kurz vereinbart mit ihrer Bank einen Kredit in Höhe von € 10.000. Dieser ist durch nachschüssige Monatsraten innerhalb von 5 Jahren zu begleichen. Die Bank bietet einen Zinssatz von 0,25 % p. m. an.
Nach Zahlung von 12 Raten werden ein halbes Jahr keine Rückzahlungen geleistet. Anschließend werden die vereinbarten Raten weiterbezahlt. Die versäumten Zahlungen werden durch eine Sonderzahlung 3 Jahre nach Kreditaufnahme abgegolten.

– Stellen Sie den Verlauf der Kreditrückzahlung auf einer Zeitachse dar.
– Berechnen Sie die Höhe der vereinbarten Raten.
– Berechnen Sie, wie hoch die Sonderzahlung sein muss, um die versäumten Zahlungen nachzuholen.

Kreditkonditionen (B_122)

a) Ihre Hausbank bietet ihr einen Kredit in Höhe von € 100.000 zu folgenden Konditionen an: Rückzahlung durch vorschüssige Monatsraten bei einem Zinssatz von 4,2 % p.a. und einer Laufzeit von 10 Jahren.

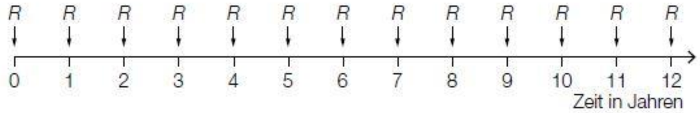
– Ermitteln Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Frau Mitter hat die Möglichkeit, einen Teil aus eigenen Ersparnissen zu finanzieren und einen Kredit in Höhe von € 80.000 bei einem Zinssatz von 4,2 % p.a. aufzunehmen. Die Bank erwartet monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von je € 550. Die Rückzahlung beginnt 3 Jahre nach Kreditaufnahme.

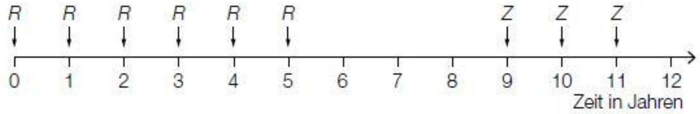
– Berechnen Sie, wie viele Jahre und Monate nach Kreditaufnahme die Schuld beglichen ist, wenn die Restzahlung 1 Monat nach der letzten Vollrate fällig ist.
– Stellen Sie diese Situation mit den entsprechenden Rückzahlungsbeträgen grafisch in einer Zeitlinie dar.

c) Die folgenden Grafiken zeigen in Zeitlinien 2 weitere Rückzahlungsvarianten eines Kredits mit jährlichen Raten R bzw. Z mit dem Jahreszinssatz i.

1. Variante:



2. Variante:



– Beschreiben Sie die beiden Zahlungsweisen in Worten.
– Argumentieren Sie, dass die angegebene Gleichung den Wert von Z richtig beschreibt.

$Z = R \cdot (1 + q^3)$, wobei $q = 1 + i$ bedeutet

Photovoltaik (1) (B_201)

b) Eine Bank bietet Frau Zangerl einen Kredit über € 12.560 für die Finanzierung einer Photovoltaikanlage an. Dieser Kredit soll in 15 Jahren durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 98 getilgt werden. Eine Bearbeitungsgebühr von 3 % der Kreditsumme wird bei der Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Angebots in Prozent.

Ruecklage (B_125)

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.
Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.
Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann.
(Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p.m. einem geringeren Barwert entspricht.

– Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
– Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p.a. angelegt.
Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

– Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Wohnungsrenovierung (B_139)

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit mit einer Laufzeit von 10 Jahren, der bei einem Zinssatz von nominell 4 % p.a. und quartalsmäßiger Verzinsung durch nachschüssige Monatsraten getilgt werden soll.

– Ermitteln Sie den äquivalenten Monatszinssatz.
– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die Ratenhöhe berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.

b) Thomas holt sich für diesen Kredit ein weiteres Angebot von einer anderen Bank.
Diese verlangt eine Bearbeitungsgebühr von 2 % vom Kreditbetrag, die bei der Auszahlung einbehalten wird.
Die Rückzahlung des Kredits erfolgt in 12 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 800.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

c) Das Angebot einer dritten Bank ist in folgendem Tilgungsplan dargestellt:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0	0	0	€ 30.000,00
1	€ 1.350,00	€ 491,75	€ 1.841,75	€ 29.508,25
2	€ 1.327,88	€ 513,87	€ 1.841,75	€ 28.994,38

– Erklären Sie die Begriffe und den Zusammenhang von Zinsanteil und Tilgungsanteil.
– Berechnen Sie den Jahreszinssatz, der dem Tilgungsplan zugrunde liegt.

Sparkonto (B_120)

a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.
Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KESt mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$K = 500 \cdot \frac{1{,}01125^t - 1}{0{,}01125}$$

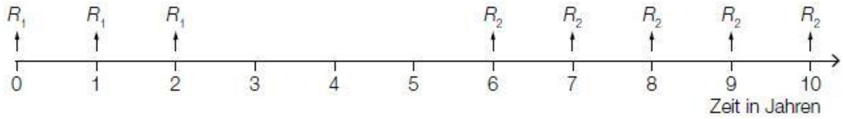
K ... Kapital in Euro (€)
t ... Zeit in Jahren

– Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
– Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p.a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.

– Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
– Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

c) Karin tätigt die in der nachstehenden Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



– Beschreiben Sie den dargestellten Sachverhalt in Worten.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Wert B aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem Jahreszinssatz i aus.

B = ____

Stallbaufinanzierung (B_170)

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig € 2.800, die zu 2,3 % p.a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren € 65.000 auf ein Sparbuch gelegt, das mit 1,8 % p.a. verzinst wird.

– Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von € 375.000 auf. Zur Rückzahlung werden nachschüssige Jahresraten der Höhe R bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.
Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt. Die neue Ratenhöhe ist R_{neu}.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die Höhe der ursprünglichen Rate beträgt gerundet R = € 23.841. Der Zinssatz ist 4,8 % p.a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu}. (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von € 375.000 folgende Möglichkeit an:
5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung der Höhe x entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten der Höhe R über 20 Jahre abgedeckt.
Es ist bei allen Zahlungen von einem Jahreszinssatz i auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x.

Lösungen

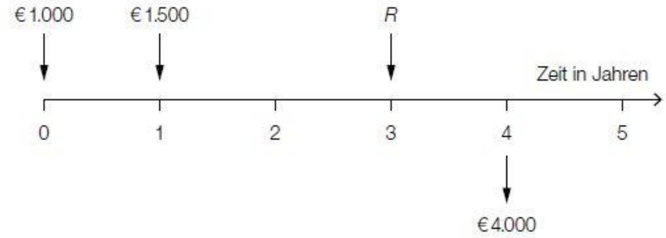
Rookie Level

Ansparplaene * (B_382) Lösung

a) $E = B \cdot (1 + i)^n$

$i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$

b)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.

Der Restbetrag muss kleiner als € 1.500 sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

Eine Begründung nur durch die nachstehende Rechnung ist nicht ausreichend.

$1\,000 \cdot 1{,}03^4 + 1\,500 \cdot 1{,}03^3 + R \cdot 1{,}03 = 4\,000$

$R = \frac{4\,000 - 1\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,500 \cdot 1{,}03^3}{1{,}03} = 1\,199{,}418\ldots$

Als Restbetrag müssen € 1.199,42 eingezahlt werden.

c) € 5.000 werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch € 1.000 dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag € 7.009,66.

Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.

d) ohne Verzinsung:

$\frac{6\,000}{24} = 250$

Ohne Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 250.

mit Verzinsung:

$4\,000 \cdot 1{,}0025^{24} + R \cdot \frac{1{,}0025^{24} - 1}{0{,}0025} = 10\,000$

$R = (10\,000 - 4\,000 \cdot 1{,}0025^{24}) \cdot \frac{0{,}0025}{1{,}0025^{24} - 1} = 232{,}887\ldots$

Mit Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 232,89.

Hotelrenovierung (1) (B_210) Lösung

b) $80000 = 17900 \cdot \frac{(1 + i_{eff})^5 - 1}{i_{eff}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{eff})^5}$

mittels Technologieeinsatz:
$i_{eff} = 0{,}03860...$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 3,86 %.

Bei der halbjährlichen Zahlungsart ergibt sich durch die früher fälligen Zahlungen ein höherer effektiver Jahreszinssatz.

Sonnensegel (B_091) Lösung

b) monatlicher Aufzinsungsfaktor $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}024} = 1{,}00197...$

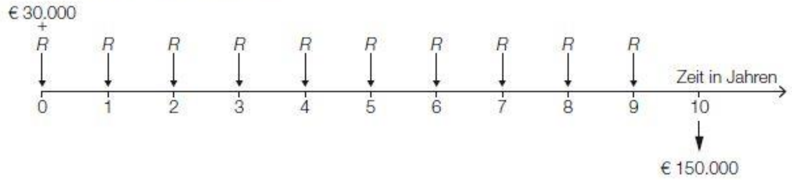
$12500 = 360 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 36{,}00...$

Die Firma muss 36 Monatsraten zahlen.

Maschinenring (B_182) Lösung

a) R ... Höhe einer Jahresrate in €



$q = 1{,}015$

$30000 \cdot q^{10} + R \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 150000 \quad \Rightarrow \quad R \approx € \ 10.603{,}06$

Die Höhe der Jahresraten beträgt € 10.603,06.

Wenn die Raten genau doppelt so hoch wären, wäre die Summe der bezahlten Raten zwar gleich hoch, der Endwert der 5-jährigen Rente aber niedriger, weil die Verzinsungen der ersten 5 Raten fehlten. Um den gleichen Wert zu erhalten, müssen die Raten daher mehr als doppelt so hoch sein.

Baugrundstuecke * (B_090) Lösung

a) $228000 \cdot (1 + i)^4 = 753000$

$i = \sqrt[4]{\frac{753000}{228000}} - 1 = 0{,}3480...$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 34,8 %.

b) Barwertvergleich:

Angebot 1: $150000 + \frac{50000}{1{,}03^2} = 197129{,}795...$

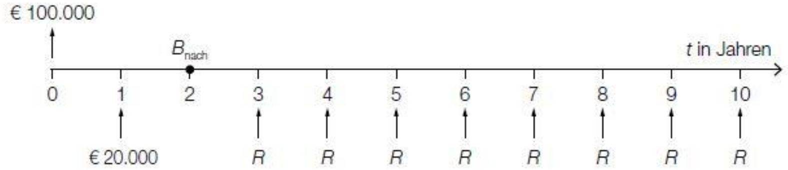
Angebot 2: $\frac{202000}{1{,}03} = 196116{,}504...$

$197129{,}795... - 196116{,}504... = 1013{,}290...$

Die beiden Angebote unterscheiden sich zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also um rund € 1.013.

Bei einem Zinssatz von 1,98 % p.a. sind die beiden Angebote äquivalent.

c)



Bewertung aller Zahlungen auf den Bezugszeitpunkt $t = 2$ (Barwert der nachschüssigen Rente): $100000 \cdot 1{,}03^2 - 20000 \cdot 1{,}03 = 85490$

$$85490 = R \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^8} \quad \Rightarrow \quad R = 12178{,}596...$$

Die Höhe der Zahlungen R beträgt € 12.178,60.

d)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1		€ –3.000,00	€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00	€ 3.075,00	€ 123.000,00

$$123000 = 10000 \cdot \frac{1{,}025^n - 1}{0{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}025^n}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 14{,}88...$
Die volle Annuität in Höhe von € 10.000 muss 14-mal bezahlt werden.

Verzinsung * (A_256) Lösung

a) $K_5 = 3000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2 = 3542{,}679...$
Der Kontostand nach 5 Jahren beträgt € 3.542,68.

$1 + i = \sqrt[5]{1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2} = 1{,}0338... \approx 1{,}034$ *oder:* $3542{,}679... = 3000 \cdot (1 + i)^5$

$$i = \sqrt[5]{\frac{3542{,}679...}{3000}} - 1 = 0{,}0338...$$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 3,4 %.

Anschaffungen (B_134) Lösung

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$

$$50000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \Rightarrow \quad R = 516{,}020\ldots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

b) Semesterzinssatz $i_2 = \frac{1112{,}62}{50000} = 0{,}02225\ldots$
effektiver Jahreszinssatz $i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}04499\ldots \approx 4{,}50\ \%$

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

Die Restschuld vom Ende des 4. Semesters wird ein weiteres Semester aufgezinst. Es sind daher am Ende des 5. Semesters noch € 2.972,91 fällig.

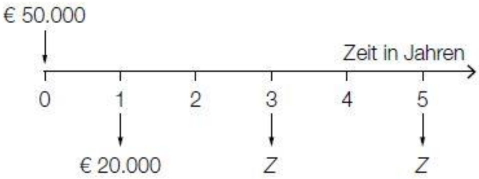
c) Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Semesterrate gezahlt wird (also am Ende des Semesters), wurde die 1. bezahlte Quartalsrate bereits 1 Semester lang verzinst. Der Endwert der beiden Quartalsraten ist daher etwas höher als die Semesterrate.

Der Endwert der Quartalsraten ist etwas höher als der Endwert der Semesterraten. Daher ist die Restzahlung bei der 1. Variante höher.

Erbschaft * (B_264) Lösung

a1) Zinssatz: 3 % p. a.

a2)



a3) $50000 = \frac{20000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$Z = 17202{,}934...$
Die Höhe der Auszahlungen Z beträgt € 17.202,93.

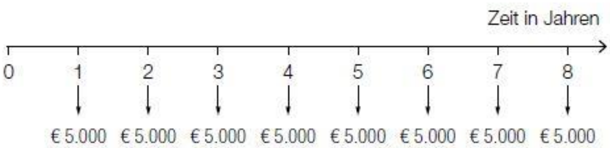
b1) Da das Erbe angelegt und verzinst wird, kann Jutta einen höheren Betrag als monatlich € 500 abheben.

b2) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466...$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

b3) $q_{12} = 1 + i_{12}$
$50000 \cdot 1{,}03^5 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} + 20000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 587{,}846...$
Die Höhe der Monatsraten beträgt € 587,85.

c1)

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Oeffentlicher Verkehr in Wien * (B_515) Lösung

a1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor
$365 = 33 \cdot \frac{q_{12}^{12} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{11}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}0151...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}19818...$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 19,82 %.

Ansparplan * (B_185) Lösung

a1) Die Anleihe wird die ersten 6 Jahre zu 1 % p.a., dann 2 Jahre zu 2 % p.a., 2 Jahre zu 3 % p.a. und schließlich 2 Jahre zu 3,5 % p.a. verzinst.

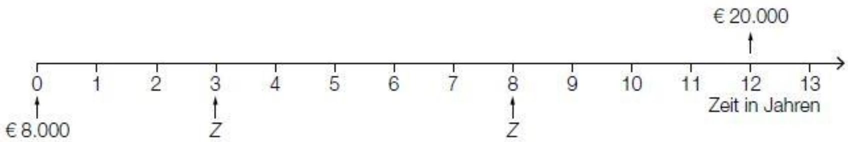
a2) $(1 + i)^{12} = 1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}0191...$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 1,9 %.
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)

a3) $\dfrac{20\,000}{1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2} = 15\,934{,}786...$

Monika muss € 15.934,79 anlegen, damit sie in 12 Jahren € 20.000 angespart hat.

b1)



b2) $8000 \cdot 1{,}02^{12} + Z \cdot 1{,}02^9 + Z \cdot 1{,}02^4 = 20\,000 \quad \Rightarrow \quad Z = 4\,326{,}655…$

Die Höhe einer Einzahlung Z beträgt € 4.326,66.

c1) $20\,000 = R \cdot \dfrac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \cdot 1{,}02 \quad \Rightarrow \quad R = 1\,461{,}952...$

Der jährliche Ansparbetrag beträgt € 1.461,95.

c2) Sie wird damit ihr Sparziel nicht erreichen, da die Zahlungen großteils später erfolgen und sie somit weniger Zinsen erhält.

Pro Level

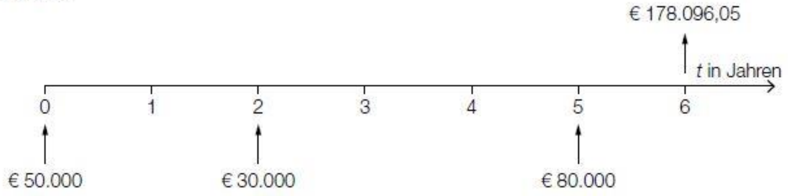
Liftgesellschaft (1) * (B_434) Lösung

a) $1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 24{,}81...$
Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$\left(1\,400\,000 \cdot 1{,}04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04}\right) \cdot 1{,}04 = 1\,264\,478{,}834...$
Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

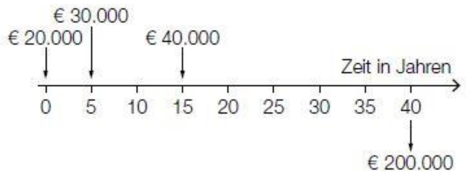
b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p.a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p.a. verzinst.



Pensionsvorsorge * (B_420) Lösung

a) $400 \cdot 1{,}0027 \cdot \frac{1{,}0027^{180} - 1}{0{,}0027} = 92\,803{,}312...$
$92\,803{,}312... \cdot 1{,}0027^{300} = 208\,385{,}722...$
Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

b)



$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}02514...$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p.a.

c) $200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} \cdot \frac{1}{1{,}02^n}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$n = 20{,}4...$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Seegrundstueck * (B_415) Lösung

a) $865\,000 = 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^n - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 13{,}42...$
Der Kreditnehmer muss 13 volle Raten bezahlen.

$\left(865\,000 - 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^{13} - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^{13}}\right) \cdot 1{,}0675^{14} = 43\,077{,}457...$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 43.077,46.

b) Annuität im Jahr 1: 51 467,50 + 53 532,50 = 105 000
Restschuld im Jahr 1: 865 000 – 53 532,50 = 811 467,50
Im Jahr 1 beträgt die Annuität € 105.000 und die Restschuld € 811.467,50.

Die Restschuld erhöht sich um die anfallenden Zinsen.

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.
Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

Restschuld zum Zeitpunkt t = 4 Jahre:
$865\,000 \cdot 1{,}06^4 - 100\,000 \cdot 1{,}06^3 - 80\,000 \cdot 1{,}06 - 110\,000 = 778\,140{,}970...$

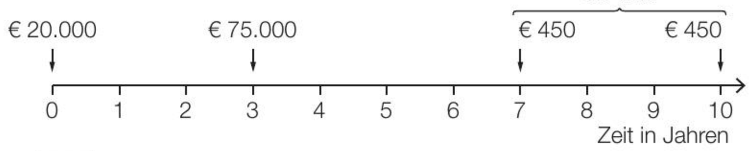
$778\,140{,}970... = R \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^6}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244{,}793...$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Startkapital (B_146) Lösung

a)



$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}021}$

$K_{10} = 20\,000 \cdot 1{,}021^{10} + 75\,000 \cdot 1{,}021^7 + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128\,094{,}522...$

Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128\,094{,}52 \quad \Rightarrow \quad R = 961{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

b) fehlende Zahl:
2. Zeile Annuität: € 10.332 (aus $Z + T = 1\,332 + 9\,000$)

$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5}$

$R = 10\,108{,}220...$
Die Ratenhöhe beträgt € 10.108,22.

Kredit fuer einen Wohnungskauf * (B_223) Lösung

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466... \approx 0{,}247\ \%$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = i_{12} + 1$

Barwertformel für nachschüssige Monatsrente:

$$120\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}} \quad \Rightarrow \quad R \approx 663{,}088...$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 663,09.

b) Auszahlungsbetrag: $120\,000 \cdot 0{,}98 = 117\,600$

Äquivalenzgleichung: $117\,600 = 2\,650 \cdot \frac{q_4^{60} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_4 = 1{,}010475...$
$q = q_4^4 = 1{,}042566...$

Die effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,257 %.

c) Den Quartalszinssatz erhält man, indem man den Zinsanteil im Quartal 1 durch die Kreditsumme dividiert, d. h.:

$$i_4 = \frac{1\,200}{120\,000} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Die Kreditsumme ist der Barwert einer nachschüssigen Rente, die Annuität deren Rate.
Äquivalenzgleichung:

$$120\,000 = 2\,186{,}26 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^n}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 80{,}00...$
Die Laufzeit des Kredits beträgt 80 Quartale.

Die Annuität ist die Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil.

Hotelerweiterung * (B_106) Lösung

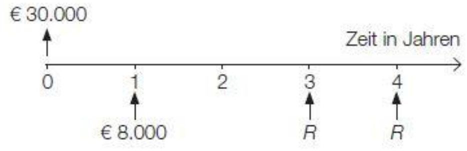
d) $800\,000 = 38\,100 \cdot \frac{q_2^{30} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{30}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}02476...$
$i = q_2^2 - 1 = 0{,}05013...$

Für dieses Finanzierungsmodell beträgt der zugrunde liegende effektive Jahreszinssatz rund 5,01 %.

Renovierungskredit * (B_349) Lösung

a)



$30\,000 = 8\,000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11\,872{,}921...$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$q_{12} = 1 + i_{12}$

$B_{\text{nach}} = 559{,}11 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}} = 30\,000{,}132\ldots$

$B_{\text{vor}} = B_{\text{nach}} \cdot q_{12} = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung, da der Barwert der Raten in diesem Fall der Kreditsumme entspricht.

c) $3480 \cdot 0{,}9 = 3132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$30\,000 = 3132 \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{10}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}007906\ldots$

$i = (q_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

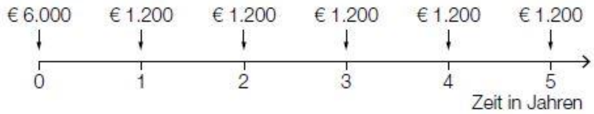
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10} = €\ 3.000$ betragen.
Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

Segelboot (B_117) Lösung

a) Zeitlinie:



$B = 6000 + 1200 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$

b) Ansatz mit Berechnung des Endwerts nach 7 Jahren:

$6000 \cdot 1{,}08^7 + 1200 \cdot \frac{1{,}08^3 - 1}{0{,}08} \cdot 1{,}08^4 + R \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 10\,800 \cdot 1{,}08^7 \quad \Rightarrow \quad R = 649{,}412$

Die Ratenhöhe beträgt € 649,41.

c) € 5.000 ist der Barwert der nachschüssigen Quartalsrate.

$q_4 = \sqrt[4]{1{,}06}$

$5000 = 300 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $n = 19{,}2\ldots$

Es sind 19 volle Quartalsraten zu bezahlen.

Restzahlung am Ende des 20. Quartals:

$\text{Rest} = 5000 \cdot q_4^{20} - 300 \cdot \frac{q_4^{19} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4 = 76{,}262\ldots$

Ein Quartal nach der letzten Einzahlung ist noch ein Restbetrag in Höhe von € 76,26 zu bezahlen.

Sparbuch * (B_222) Lösung

a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}015} = 1{,}00124...$

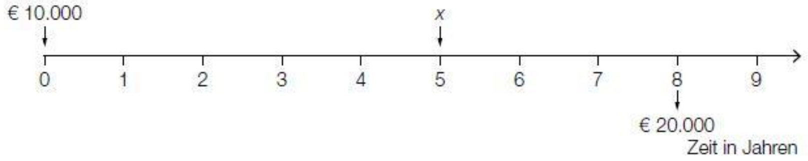
Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284{,}999...$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1{,}015^{10}} = 1\,292{,}500...$

$22\,284{,}999... + 1\,292{,}500... = 23\,577{,}500...$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.

b)



$10\,000 \cdot 1{,}015^8 + x \cdot 1{,}015^3 = 20\,000$
$x = 8\,353{,}499...$
Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$
$q = 1{,}01555...$
Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Interneteinkaeufe (B_216) Lösung

b) In der Finanzmathematik fallen der Beginn des 2. Monats und das Ende des 1. Monats zusammen. Man kann daher die vorschüssige Rente mit Beginn im 2. Monat gleichsetzen mit einer nachschüssigen Rente mit Beginn zum Zeitpunkt 0 = Kaufabschluss.

q_{12} … monatlicher Aufzinsungsfaktor

$250 = 13 \cdot \frac{q_{12}^{22} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{22}} + \frac{17{,}22}{q_{12}^{23}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0165…$
$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}21716…$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 21,72 % p.a.

Kuechenkauf * (B_453) Lösung

a1) $3000 \cdot (1 + i)^7 + 3000 \cdot (1 + i)^4 + 3000 \cdot (1 + i) = 10\,000$

$i = 0{,}02617...$

Der zugrunde liegende Jahreszinssatz beträgt rund 2,62 %.

a2) $\frac{0{,}02617...}{0{,}75} = 0{,}0349...$

Der Jahreszinssatz vor Abzug der KESt beträgt rund 3,5 %.

b1) $i_2 = \sqrt{1{,}04} - 1 = 0{,}01980...$

Der äquivalente Semesterzinssatz beträgt rund 1,98 %.

b2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1	€ 396,08	€ 0	€ 396,08	€ 20.000
2	€ 396,08	€ 1.603,92	€ 2.000	€ 18.396,08

b3) Der Tilgungsanteil berechnet sich aus der Differenz von Semesterrate und Zinsanteil. Wenn die Semesterrate verdoppelt wird, bleibt der Zinsanteil trotzdem gleich hoch. Somit ist der neue Tilgungsanteil mehr als doppelt so hoch wie der alte Tilgungsanteil.

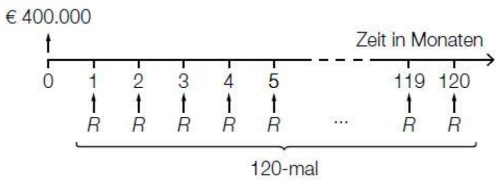
c1) $S = 20000 \cdot (1+i)^t - 3000 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$

oder:

$S = 20000 \cdot q^t - 3000 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$ mit $q = 1 + i$

Erweiterung der Produktpalette (B_142) Lösung

b)



$400000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$ mit $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}037}$

$R = 3981{,}476...$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 3.981,48.

Kaffeeautomat * (B_285) Lösung

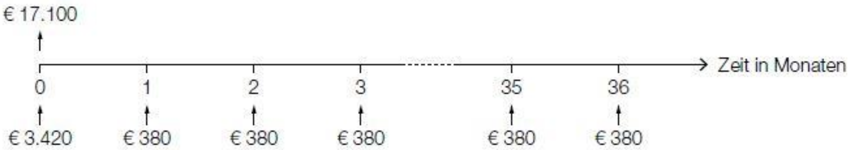
a1) $5500 = 1000 + 100 \cdot \frac{q_{12}^{48} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{48}} + \frac{900}{q_{12}^{48}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}0087...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}1099... \approx 11{,}0\ \%$

Autokauf (1) * (B_459) Lösung

a1)



a2) $3420 + 36 \cdot 380 = 17100$

Die Summe aller Zahlungen ergibt den Listenpreis. Daher ist die Behauptung des Händlers richtig.

b1) $17100 = R + \frac{R}{1{,}02^2} + \frac{R}{1{,}02^3}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 5889{,}461...$

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1	**€ 256,50**	**€ 5.743,50**	**€ 6.000,00**	**€ 11.356,50**
2	**€ 170,35**	**€ 5.829,65**	**€ 6.000,00**	**€ 5.526,85**

c2) $5526{,}85 \cdot 1{,}015 = 5609{,}75$

d1) $17100 \cdot 0{,}92 = 15732$

Bei Barzahlung beträgt der Preis des Autos € 15.732.

d2) $15732 = 3420 + 380 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0058...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}0719...$

Der Jahreszinssatz ist rund 7,2 %.

Lagerhalle * (B_484) Lösung

a1) $X = 180000 - 50000 \cdot (1 + i)^4 - 70000 \cdot (1 + i)^3$

a2) $X = 180000 - 50000 \cdot 1{,}025^4 - 70000 \cdot 1{,}025^3 = 49427{,}011...$
Es fehlt ein Betrag in Höhe von € 49.427,01.

b1) $180000 = R \cdot \frac{1{,}01^{40} - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^{40}} \quad \Rightarrow \quad R = 5482{,}007...$
Die Höhe einer Quartalsrate beträgt € 5.482,01.

c1) $i = \frac{5400}{180000} = 0{,}03$
Der Jahreszinssatz beträgt 3 %.

c2) Das Unternehmen bezahlt im Jahr 1 nichts, die Annuität ist gleich null.
Da die Summe aus Zinsanteil und Tilgungsanteil gleich null ist, muss der Tilgungsanteil negativ sein.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2	€ 5.562	**€ 5.400**	**€ 10.962**	€ 180.000

Produktionserweiterung (2) * (B_337) Lösung

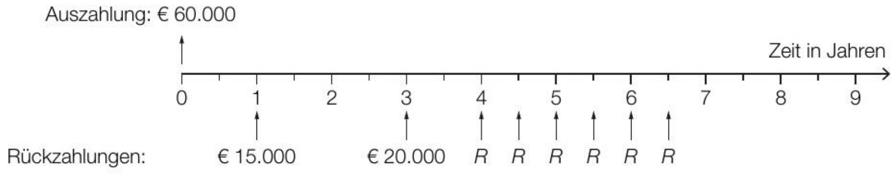
b) Der Zinsanteil eines Jahres berechnet sich stets basierend auf der verbleibenden Restschuld des Vorjahres. Im 5. Jahr erfolgt eine positive Tilgung. Damit ist die Restschuld am Ende des Jahres 5 geringer als am Ende Jahres 4. Trotzdem ist der Zinsanteil im Jahr 5 geringer als jener im Jahr 6. Der Zinssatz i' muss daher größer als der Zinssatz i sein.

Restschuld im Jahr 11: $3705{,}01 + 9472{,}88 = 13177{,}89$
Zinssatz i': $527{,}12 = 13177{,}89 \cdot i' \quad \Rightarrow \quad i' = 0{,}0400... \approx 4{,}0\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
13	$3705{,}01 \cdot i'$ **€ 148,20**	**€ 3.705,01**	$148{,}20 + 3705{,}01$ **€ 3.853,21**	**€ 0**

Obsthaendler * (B_489) Lösung

a1)



a2) $60\,000 = \frac{15\,000}{1{,}03^2} + \frac{20\,000}{1{,}03^6} + R \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{13}} \quad \Rightarrow \quad R = 6\,609{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 6.609,20.

b1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$60\,000 = 2\,400 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00353...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}04319...$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,32 %.

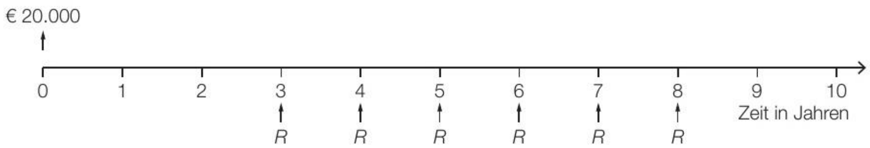
b2) Im Falle vorschüssiger Einzahlungen wird jede Einzahlung 1 Monat länger verzinst. Da der Endwert gleich hoch ist, muss im Vergleich zu nachschüssigen Einzahlungen der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger sein.

Wohnanlage * (B_502) Lösung

a1) $52\,647{,}60 \cdot \frac{102}{52 + 60 + 78 + 102} = 18\,390{,}60$

Der Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung beträgt € 18.390,60.

b1)



b2) $20\,000 \cdot (1 + i)^3 = R \cdot \frac{(1 + i)^6 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^5}$

Auch eine Verwendung des Aufzinsungsfaktors q = *1* + i *ist als richtig zu werten.*

b3) Da das Geld früher zurückgezahlt wird, fallen weniger Zinsen an, und damit sind die Raten weniger als doppelt so hoch.

c1) $i = \frac{600}{20\,000} = 0{,}03 = 3\ \%$

c2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00	**€ 0,00**	€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5	€ 145,64	€ 4.854,59	€ 5.000,23	€ 0,00

Anschaffungen (B_134) Lösung

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$

$$50\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \Rightarrow \quad R = 516{,}020\ldots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

b) Semesterzinssatz $i_2 = \frac{1\,112{,}62}{50\,000} = 0{,}02225\ldots$

effektiver Jahreszinssatz $i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}04499\ldots \approx 4{,}50\ \%$

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

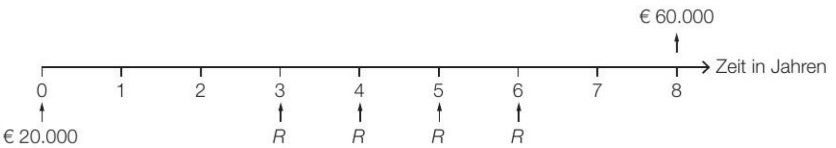
Die Restschuld vom Ende des 4. Semesters wird ein weiteres Semester aufgezinst. Es sind daher am Ende des 5. Semesters noch € 2.972,11 fällig.

c) Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Semesterrate gezahlt wird (also am Ende des Semesters), wurde die 1. bezahlte Quartalsrate bereits 1 Semester lang verzinst. Der Endwert der beiden Quartalsraten ist daher etwas höher als die Semesterrate.

Der Endwert der Quartalsraten ist etwas höher als der Endwert der Semesterraten. Daher ist die Restzahlung bei der 1. Variante höher.

Reisebus * (B_516) Lösung

b1)



b2) $R = (60\,000 - 20\,000 \cdot 1{,}021^8) \cdot \frac{1{,}021 - 1}{(1{,}021^4 - 1) \cdot 1{,}021^2} = 8\,455{,}200\ldots$

Die Höhe von R beträgt € 8.455,20.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07	**€ 3.500,00**	

c2) $35\,331 = 3\,500 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{1{,}03 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}03^n}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 12{,}204\ldots$

$\left(35\,331 - 3\,500 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{1{,}03 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}03^{12}}\right) \cdot 1{,}03^{13} = 722{,}498\ldots$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 722,50.

Zinsentwicklung * (B_528) Lösung

b1) Zinssatz im Jahr 1: $\frac{2\,100}{50\,000} = 0{,}042$

Zinssatz im Jahr 2: $\frac{1\,894{,}2}{45\,100} = 0{,}042$

Zinssatz im Jahr 3: $\frac{1\,399{,}8}{39\,994{,}2} = 0{,}035...$

Der Zinssatz hat sich im Jahr 3 verändert.

b2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80	**€ 5.600,20**	€ 7.000,00	**€ 34.394,00**

c1) $E = B \cdot (1 + i_0)^2 \cdot (1 + i_1)^3$

c2) $B \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}01^3 = B \cdot (1 + i)^5$

$i = 0{,}01795... = 1{,}795...\ \%$

Eine Berechnung von i *mithilfe eines arithmetischen Mittels ist als falsch zu werten.*

Abfindung * (B_538) Lösung

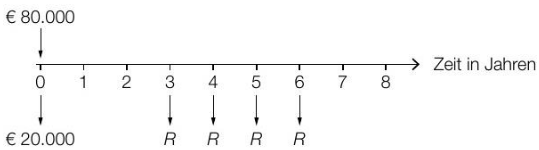
a1) $80\,000 = \frac{25\,000}{(1+i)^3} + \frac{30\,000}{(1+i)^6} + \frac{35\,000}{(1+i)^9}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}01893...$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 1,89 %.

b1)



c1) Der (äquivalente) Quartalszinssatz beträgt rund 0,4962... %.

c2) Quartalsaufzinsungsfaktor $q_4 = 1{,}02^{\frac{1}{4}}$

$80\,000 \cdot 1{,}02 = 4\,000 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{n-1}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 21{,}4...$

Es werden 21 volle Quartalsraten ausgezahlt.

c3) $\left(80\,000 \cdot 1{,}02 - 4\,000 \cdot \frac{q_4^{21} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{20}}\right) \cdot q_4^{21} = 1\,799{,}003...$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 1.799,00.

d1) Restschuld im Jahr 14: $966{,}95 + 9\,680{,}57 = 10\,647{,}52$

Zinssatz: $i = \frac{319{,}43}{10\,647{,}52} = 0{,}030... \approx 3\ \%$

d2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16	**€ 29,01**	**€ 966,95**	**€ 995,96**	€ 0,00

Autokauf (3) * (B_546) Lösung

a1) $15000 = 216 \cdot \frac{q_{12}^{84} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{84}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}00463...$
$i_{12} = 0{,}46...\ \%$

a2) X ist die Restschuld nach 24 Monaten (2 Jahren) in Euro.

b1) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}062} - 1 = 0{,}005025...$
Der zu 6,2 % p. a. äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,503 %.

Eine Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes als $\frac{6{,}2\ \%}{12} = 0{,}5166...\ \%$ ist als falsch zu werten.

b2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 15.000,00
1	**€ 75,38**	**€ 143,97**	**€ 219,35**	**€ 14.856,03**

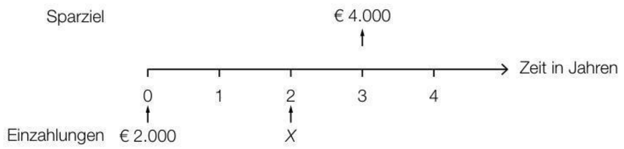
c1)

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	A
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	D

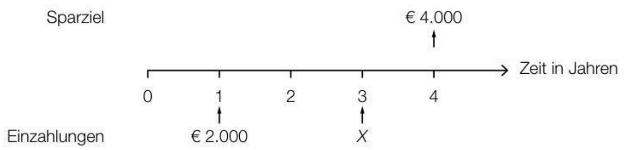
A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

Esszimmereinrichtung * (B_558) Lösung

a1)



oder:



a2) $X = \frac{4000}{1 + i} - 2000 \cdot (1 + i)^2$

b1) „Monatlich € 1,65 pro € 100" bedeutet, dass der Zinssatz 1,65 % p. m. beträgt.
$i = 1{,}0165^{12} - 1 = 0{,}2169...$
Der Jahreszinssatz beträgt also rund 21,7 %.

b2) $X = 4000 \cdot 1{,}217 - 370 \cdot \frac{1{,}217^{\frac{12}{12}} - 1}{1{,}217^{\frac{1}{12}} - 1} = 2{,}053...$
Der Restbetrag hat eine Höhe von € 2,05.

b3)

$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☒

c1) Die Zinsen im Jahr 3 sind (trotz gleichbleibender Annuität) höher als im Jahr 2.

c2) $i = \frac{Z_5}{K_4} = \frac{36{,}13}{903{,}24} = 0{,}0400...$

Der Zinssatz im Jahr 5 beträgt rund 4 %.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13	**€ 903,24**	**€ 939,37**	€ 0,00

Niedrigzinsphase * (B_568) Lösung

a1) $K_6 = 78\,030{,}55 + 8\,371{,}13 = 86\,401{,}68$

$i = \frac{3\,628{,}87}{86\,401{,}68} = 0{,}0419...$

Der Zinssatz beträgt rund 4,2 % p. a.

a2) $K_0 \cdot 1{,}042^7 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}042^7 - 1}{0{,}042} + 78\,030{,}55$

$K_0 = 130\,000{,}001...$

Die Höhe des Kredits betrug € 130.000.

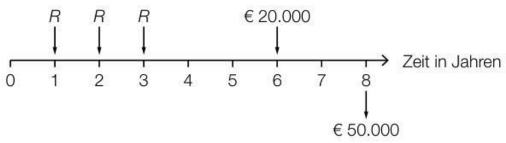
a3) $Z_{neu} < Z_8 \qquad T_{neu} > T_8 \qquad K_{neu} < K_8$

b1)

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	C
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	D

A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

c1)

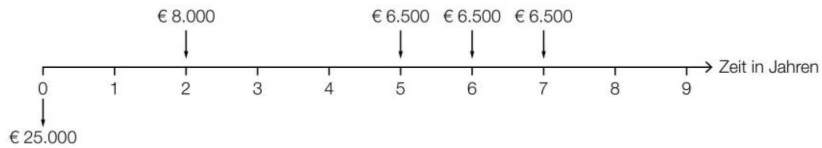


c2) $R \cdot 3 + 20\,000 = 50\,000$

$R = € 10.000$

Lösung: Umbaufinanzierung * (B_581)

a1)



a2) $25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot (1 + i)^2 + 6\,500 \cdot (1 + i) + 6\,500$

oder:

$25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i}$

Auch ein Aufstellen der Gleichung unter Verwendung des Aufzinsungsfaktors q ist als richtig zu werten.

b1) $\left(25\,000 \cdot 1{,}03^5 - 5\,000 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03}\right) \cdot 1{,}03 = 2\,509{,}257...$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 2.509,26.

c1) $\frac{26{,}06}{9\,998{,}09 + 423{,}94} = 0{,}00250...$

Der Monatszinssatz für den Monat 37 beträgt rund 0,25 %.

c2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38	**€ 20,00**	**€ 430,00**	€ 450,00	**€ 9.568,09**

d1) $25\,000 \cdot 1{,}00375^n = 30\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 48{,}7...$

Nach 49 Monaten würde die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen.

Für die Punktevergabe ist eine Rundung auf ganze Monate nicht erforderlich.

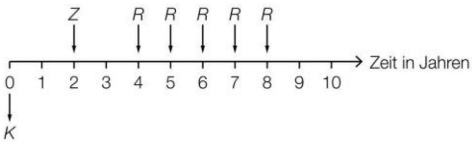
d2) $25\,000 \cdot 0{,}00375 = 93{,}75$

Die monatlichen Rückzahlungen müssen € 93,75 betragen.

Lösung: Tischlerei * (B_593)

a1) $A = \frac{K}{1{,}02^{-1} + 1{,}02^{-3}}$

a2)



a3) $60\,000 \cdot 1{,}02^3 = 20\,000 \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$R = 9\,180{,}619...$

Die Ratenhöhe beträgt € 9.180,62.

b1) Der Betrag B_3 ist kleiner als B_2, weil dieser früher gezahlt wird und damit weniger Zinsen anfallen.

Auch eine rechnerische Argumentation ist als richtig zu werten.

b2)

$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☒

c1)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	**€ 41.860**

c2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	**€ 2.162,50**
14	€ 17,30	**€ 2.162,50**	**€ 2.179,80**	€ 0,00

Wird der Tilgungsplan vollständig oder mithilfe der Restschuld im Semester 12 durchgerechnet, ergeben sich aufgrund der Rundung geringfügig abweichende Werte.

c3) Es wird der (äquivalente) Monatszinssatz berechnet.

Lösung: Swimmingpool (2) * (B_605)

a1) $i = 1{,}02\ \%$ p. a.

a2) $Z \cdot (1 + 1{,}0102^2 + 1{,}0102^4 + 1{,}0102^5) = 2\,468{,}39$
$Z = 599{,}999...$

Die Höhe von Z beträgt € 600,00.

b1)

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	A
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	B

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c1) $20\,000 = 198{,}71 \cdot \frac{(1 + i_{12})^{120} - 1}{i_{12}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{120}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $i_{12} = 0{,}0030...$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3 %.

d1) Der Tilgungsanteil im Monat 14 beträgt € 0, weil die Restschuld am Ende des Monats 14 gleich groß wie am Ende des Monats 13 ist.

d2) $A_{15} = 6\,492{,}13 - 6\,217{,}55 + 6\,492{,}13 \cdot i_{12}$

oder:

$A_{15} = 274{,}58 + 6\,492{,}13 \cdot i_{12}$

All Star Level

Autokauf (2) (B_143) Lösung

a) Die Kontoüberziehung verursacht bei einem Jahreszinssatz von 12 % für 16 Tage Kosten in Höhe von $\frac{16}{360} \cdot 0{,}12 = 0{,}005\dot{3} \approx 0{,}53$ % von € 65.699,50.
Diese sind viel geringer als der angebotene Skonto von 1,5 % der Kaufsumme.
Herr Maier sollte das Angebot des Verkäufers annehmen.

b) $13340 + 922 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}} + \frac{26000}{q_{12}^{36}} = 66700$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00401...$

$q = (q_{12})^{12} = 1{,}0492...$

Der Zinssatz beträgt rund 4,9 % p. a.

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}0506} = 1{,}00412...$

$66700 - 13560 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

$53140 = R \cdot 53{,}0598...$

$R = 1001{,}51$

Die monatlichen Raten betragen jeweils € 1.001,51.

Geraetekauf (B_211) Lösung

b) $10000 = 200 + 185 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

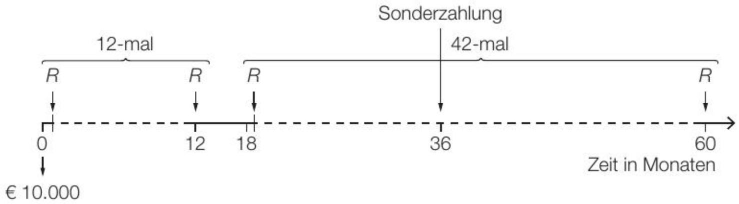
$q_{12} = 1{,}00417...$

$q = (q_{12})^{12} = 1{,}05130...$

effektiver Jahreszinssatz:

$i \approx 5{,}13$ %

c)



vereinbarte Ratenhöhe R:

$10000 = R \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} \cdot \frac{1}{1{,}0025^{60}} \Rightarrow R \approx € \, 179{,}69$

Wert der 6 versäumten Monatsraten zum Zeitpunkt 18: $179{,}69 \cdot \frac{1{,}0025^{6} - 1}{0{,}0025} = 1084{,}90$

aufgezinst zum Zeitpunkt 36: $1084{,}90 \cdot 1{,}0025^{18} \approx 1134{,}77$

Die Sonderzahlung muss € 1.134,77 betragen.

Kreditkonditionen (B_122) Lösung

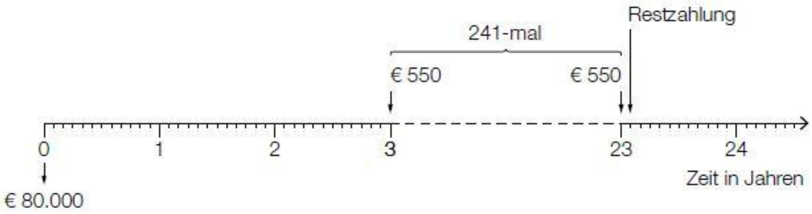
a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}042}$

$100000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{119}} \Rightarrow R = 1014{,}739...$

Die Höhe der Rate beträgt € 1.014,74.

b) $80000 \cdot 1{,}042^3 = 550 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 241{,}61...$
Frau Mitter muss 241 vorschüssige Monatsraten zahlen.
Die Restzahlung erfolgt daher 241 Monate (= 20 Jahre und 1 Monat) nach Beginn der Rückzahlung.
Das bedeutet, 23 Jahre und 1 Monat nach Kreditaufnahme ist die Schuld beglichen.



c) Das erste Angebot zeigt 12 jährliche vorschüssige Rückzahlungsraten R.

Das zweite Angebot zeigt die Rückzahlung mit 6 jährlichen vorschüssigen Raten R, der Endwert dieser 6 Raten wird 6 Jahre weiterverzinst, 3 Jahre sind ohne Rückzahlung und anschließend folgen 3 jährliche vorschüssige Raten Z, die die Rückzahlung abschließen.

Es wird 3-mal Z statt 6-mal R eingezahlt. Jedes Z steht demnach für 2 Zahlungen von R mit jeweils 3 Jahren zwischen den Einzahlungen. Wegen der jährlichen Verzinsung, die noch jeweils dazukommt, muss für jedes einzelne Z gelten:
$Z = R + R \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad$ daher ist $Z = R \cdot (1 + q^3)$

Man kommt auch mit anderen Überlegungen zu diesem Ergebnis (z. B.: der Endwert von 6 R-Raten entspricht jenem der letzten 3 Z-Raten).

Photovoltaik (1) (B_201) Lösung

b) Gebühren: 3 % von € 12.560 = € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

Äquivalenzgleichung: $12183{,}20 = 98 \cdot \frac{q_{12}^{180} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{180}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$i_{eff} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}05388...$
$q_{12} = 1{,}00438...$
Der effektive Jahreszinssatz ist rund 5,39 %.

Ruecklage (B_125) Lösung

a) Der äquivalente Monatszinssatz führt bei monatlicher Verzinsung innerhalb eines Jahres zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.
Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:
$E = K_0 \cdot (1 + i)$
Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:
$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$
Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:
$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$
Aus diesem Ansatz lässt sich der äquivalente Monatszinssatz i_{12} berechnen.

b) Martin bekommt bar € 22.500.
Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.
Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:
{375; 374,25; 373,5; ...}
Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22500
Lisa: $375 \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} \cdot \frac{1}{1{,}002^{59}} = 21\,224{,}8\ldots \approx 21\,225$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KESt:
$2{,}5\ \% \cdot 0{,}75 = 1{,}875\ \%$
$22\,500 \cdot 1{,}01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q = 1{,}046457\ldots$

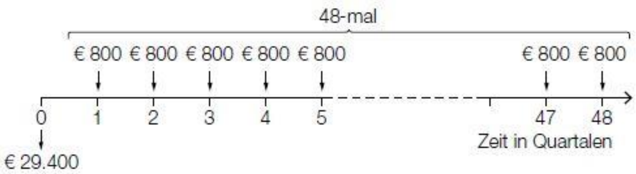
Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KESt berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Wohnungsrenovierung (B_139) Lösung

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}01^4} - 1 = \sqrt[3]{1{,}01} - 1 = 0{,}00332\ldots$
Der äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,33 %.

$30\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$ mit $q_{12} = \sqrt[3]{1{,}01}$
$R = 303{,}546\ldots$
Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

b)



$30\,000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$

$q_4 = 1{,}01147\ldots$
$i_{\text{eff}} = 1{,}01147\ldots^4 - 1 = 0{,}04669\ldots$
Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p. a.

c) Zusammenhang:

Den **Zinsanteil** einer Periode berechnet man durch Multiplikation der Restschuld der vorangegangenen Periode mit dem angegebenen Zinssatz.

Der **Tilgungsanteil** ist derjenige Teil der Annuität, der zur Tilgung der Schuld beiträgt. (Zinsanteil und Tilgungsanteil ergeben in Summe die Annuität.)

Berechnung des Zinssatzes: $i = \frac{1\,350}{30\,000} = 0{,}045 = 4{,}5\ \%$

Sparkonto (B_120) Lösung

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$E = K$,
$n = t$,
$R = € 500$,
$q = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:

$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}012}$

$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10\,000$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 51{,}3...$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

Restbetrag $= 10\,000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62{,}257...$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

c) Karin hebt zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 ab. Im Jahr 4 und im Jahr 5 wird nichts abgehoben.
Ab dem 6. Jahr hebt Karin 5-mal jeweils am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

$B = R_1 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^2} + R_2 \cdot \frac{(1 + i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^{10}}$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Stallbaufinanzierung (B_170) Lösung

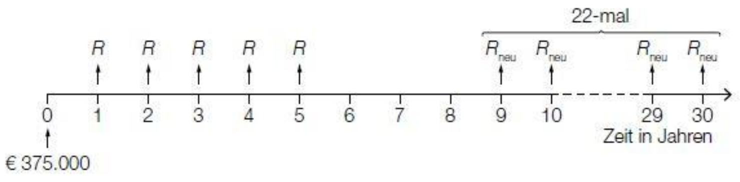
a) $2800 \cdot 1{,}023 \cdot \frac{1{,}023^{14} - 1}{0{,}023} \approx 46\,684{,}89$

$65\,000 \cdot 1{,}018^{22} \approx 96\,241{,}96$

$375\,000 - 46\,684{,}89 - 96\,241{,}96 = 232\,073{,}15$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.

b)



$375\,000 = 23\,841 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} + R_{neu} \cdot \frac{1{,}048^{22} - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^{30}} \Rightarrow R_{neu} = 29\,436{,}1...$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

c) Ansatzformel:

$q = 1 + i$

$$375000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$$

Andere richtige Formeln sind ebenfalls zu akzeptieren.
Die Berechnungsformel für x kann man unter Umständen auch direkt – ohne einen Ansatz – angeben. Ist die Formel korrekt, so gilt das auch als richtig angesetzt.