Aufgabensammlung

Differentialrechnung

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

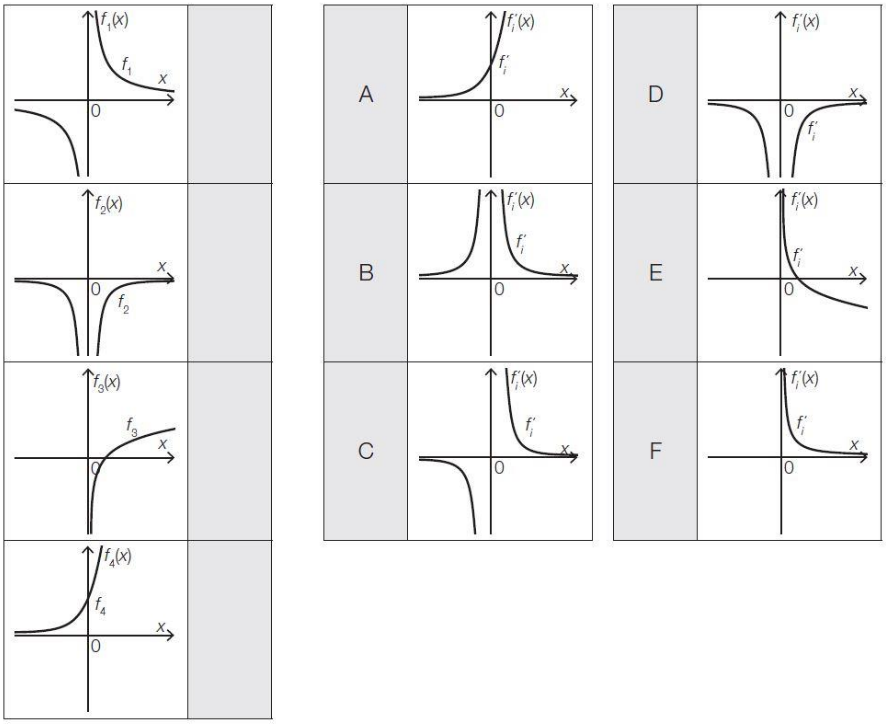
Differentialrechnung

Grundkompetenzen

Graphen von Ableitungsfunktionen* - 1_749, AN3.2, Zuordnungsformat

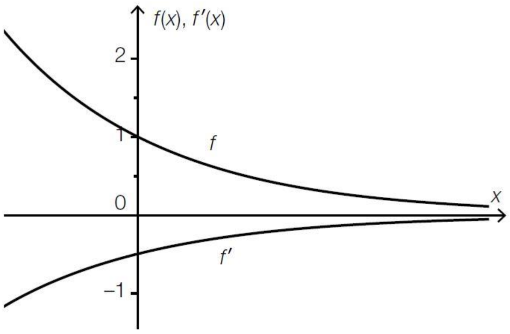
Unten stehend sind die vier Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 sowie die Graphen von sechs Funktionen (A bis F) abgebildet.

Ordnen Sie den vier Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 jeweils denjenigen Graphen (aus A bis F) zu, der die Ableitung dieser Funktion darstellt.



Differenzieren einer Exponentialfunktion* - 1_581, AN3.2, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = e^{\lambda \cdot x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'.

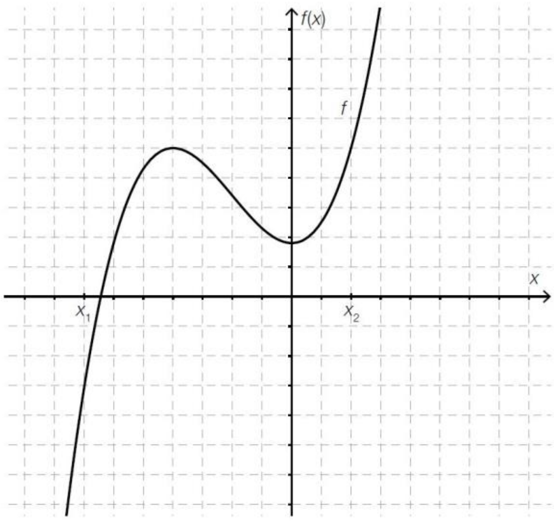


Geben Sie den Wert des Parameters λ an!

$\lambda =$ ______________________________

Grafisch differenzieren* - 1_549, AN3.2, Konstruktionsformat

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f.

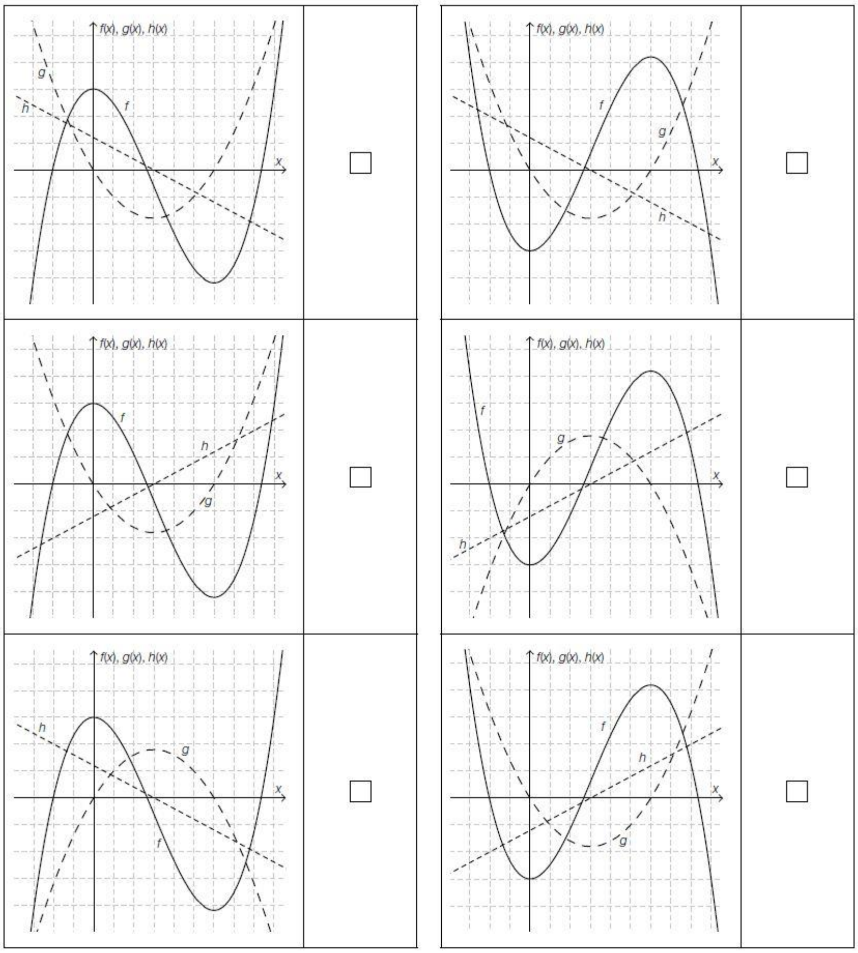


Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[x_1; x_2]$ und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!

Graphen von Ableitungsfunktionen* - 1_503, AN3.2, 1 aus 6

In den unten stehenden Abbildungen sind jeweils die Graphen der Funktionen f, g und h dargestellt.

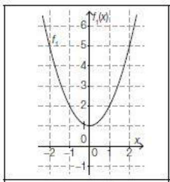
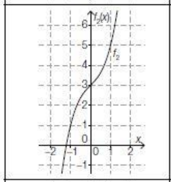
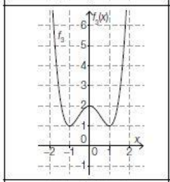
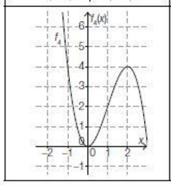
In einer der sechs Abbildungen ist g die erste Ableitung von f und h die zweite Ableitung von f. Kreuzen Sie diese Abbildung an!

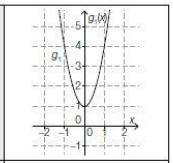
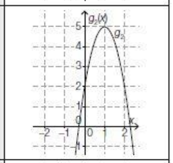
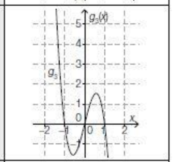
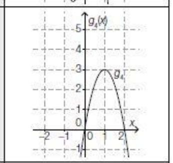
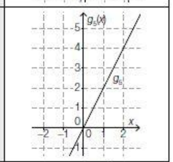
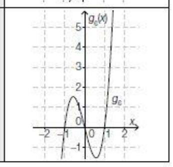


Funktionen und Ableitungsfunktionen* - 1_479, AN3.2, Zuordnungsformat

Links sind die Graphen von vier Polynomfunktionen (f_1, f_2, f_3, f_4) abgebildet, rechts die Graphen sechs weiterer Funktionen (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6).

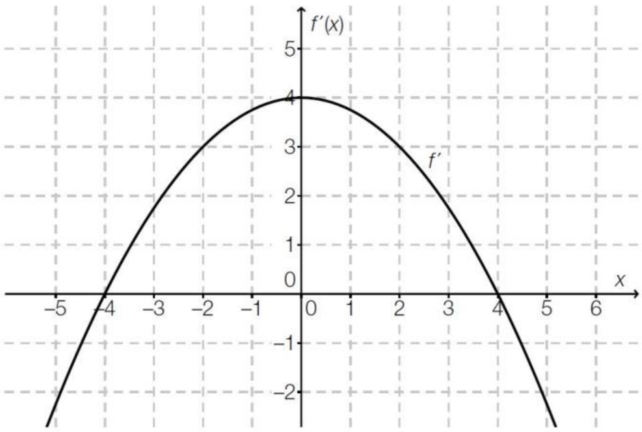
Ordnen Sie den Polynomfunktionen f_1 bis f_4 ihre jeweilige Ableitungsfunktion aus den Funktionen g_1 bis g_6 (aus A bis F) zu!

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Ableitung* - 1_358, AN3.2, Offenes Antwortformat

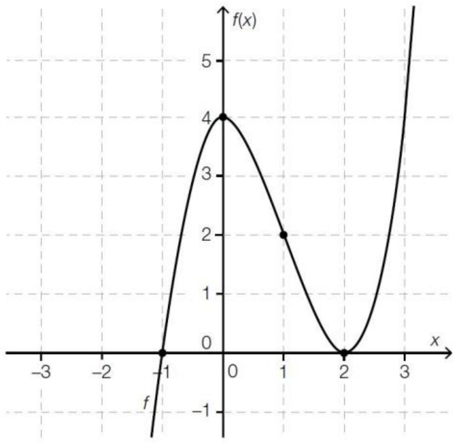
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.



Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion f im Intervall $(–5; 5)$ jedenfalls lokale Extrema hat! Die für die Bestimmung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.

Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades* - 1_455,AN3.2,2aus5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades.
Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.

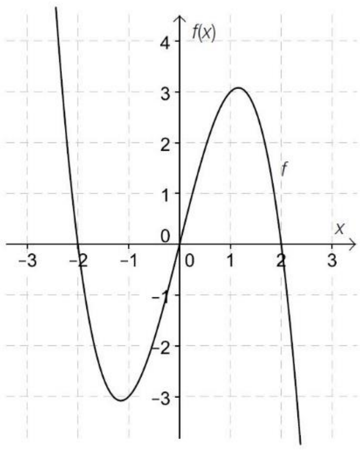


Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' der Funktion f zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	☐
Die Funktion f' ist im Intervall $(–1; 0)$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☐

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion* - 1_406, AN3.2, Lückentext

In der folgenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt:



Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die erste Ableitung der Funktion f ist ___①___, und daraus folgt: ___②___.

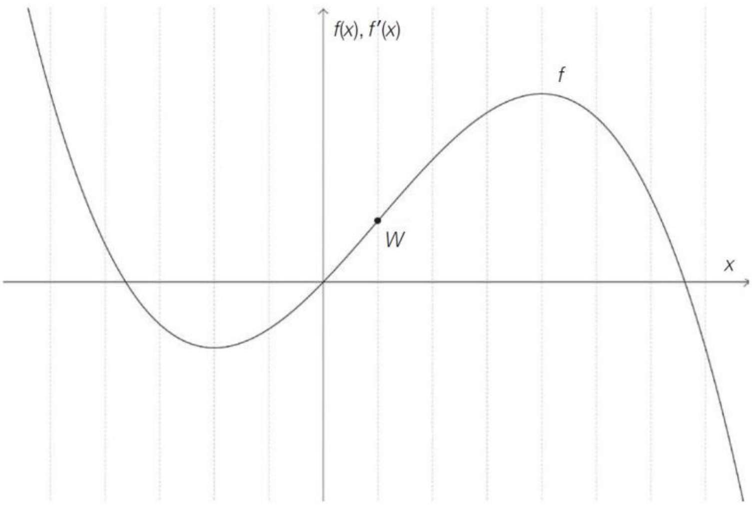
①	
im Intervall [–1; 1] negativ	☐
im Intervall [–1; 1] gleich null	☐
im Intervall [–1; 1] positiv	☐

②	
f hat im Intervall [–1; 1] eine Nullstelle	☐
f ist im Intervall [–1; 1] streng monoton steigend	☐
f hat im Intervall [–1; 1] eine Wendestelle	☐

Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_383, AN3.2, Konstruktionsformat

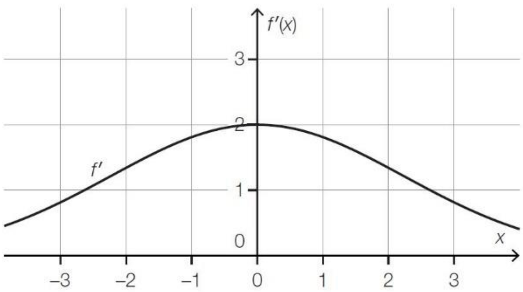
Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades, die den Wendepunkt W besitzt.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in das Koordinatensystem!



Funktionseigenschaften* - 1_846, AN3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.

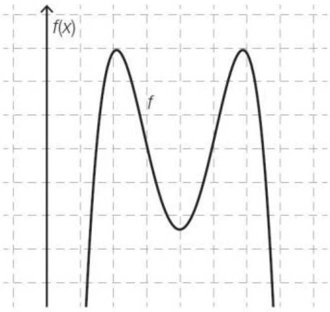


Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall [–3; 3] ist die Funktion f streng monoton steigend.	☐
Der Graph von f ist im Intervall [–3; 3] symmetrisch zur senkrechten Achse.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine Wendestelle.	☐
Im Intervall [–3; 3] sind alle Funktionswerte von f positiv.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine lokale Extremstelle.	☐

Polynomfunktion* - 1_798, AN3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades $f: x \mapsto f(x)$ dargestellt. Die x-Achse ist nicht eingezeichnet.



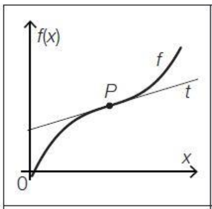
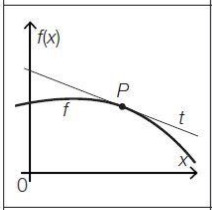
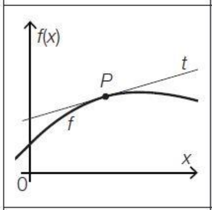
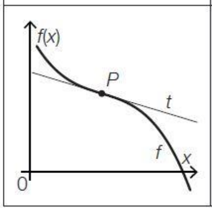
Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die dargestellte Polynomfunktion f bei jeder Lage der x-Achse zutreffen.

Es gibt genau zwei Stellen x_1 und x_2 mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$.	☐
Es gibt genau zwei Stellen x_1 und x_2 mit $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f''(x_1) = 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) > 0$ und $f''(x_1) = 0$.	☐

Kurvenverlauf* - 1_774, AN3.3, Zuordnungsformat

Die unten links stehenden Abbildungen zeigen jeweils die Tangente t in einem Punkt $P = (x_P|f(x_P))$ des Graphen einer Polynomfunktion f. Dabei ist P der einzige gemeinsame Punkt des Graphen von f und der Tangente t. In der unten rechts stehenden Tabelle sind Aussagen über $f'(x_P)$ und $f''(x_P)$ gegeben.

Ordnen Sie den vier Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage (aus A bis F) zu.

A	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) > 0$
B	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) < 0$
C	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) > 0$
D	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) < 0$
E	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) = 0$
F	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) = 0$

Eigenschaften einer Polynomfunktion* - 1_750, AN3.3, Lückentext

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn für alle $x \in (a; b)$ ______①______ gilt, dann ist die Funktion f im Intervall $(a; b)$ ______②______.

①	
$f(x) > 0$	☐
$f'(x) < 0$	☐
$f''(x) > 0$	☐

②	
streng monoton fallend	☐
rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt)	☐
streng monoton steigend	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_725, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. An den beiden Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ gelten folgende Bedingungen:

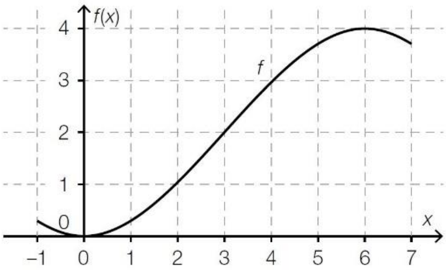
$f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) < 0$
$f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) > 0$

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die Funktion f auf jeden Fall zutreffen.

$f(x_1) > f(x_2)$	☐
Es gibt eine weitere Stelle x_3 mit $f'(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f(x_3) > f(x_1)$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f'(x_3) > 0$.	☐

Polynomfunktion* - 1_702, AN3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 im Intervall $[-1; 7]$ dargestellt. Alle lokalen Extremstellen sowie die Wendestelle von f im Intervall $[-1; 7]$ sind ganzzahlig und können aus der Abbildung abgelesen werden.

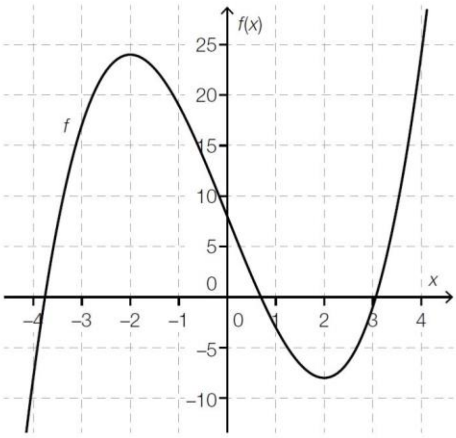


Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(3) = 0$	☐
$f'(1) > f'(3)$	☐
$f''(1) = f''(5)$	☐
$f''(1) > f''(4)$	☐
$f'(3) = 0$	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_677, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von f.

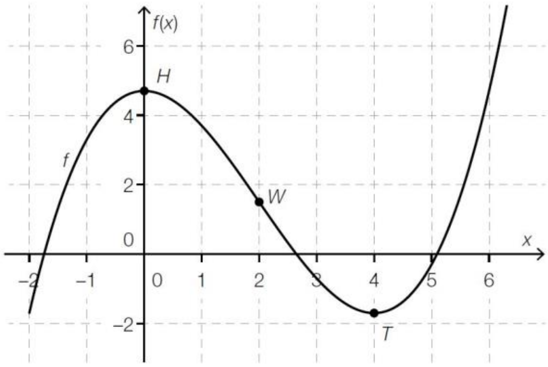


Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(0) = 0$	☐
$f''(1) > 0$	☐
$f'(-3) < 0$	☐
$f'(2) = 0$	☐
$f''(-2) > 0$	☐

Zweite Ableitung* - 1_653, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.



Die eingezeichneten Punkte sind der Hochpunkt $H = (0|f(0))$, der Wendepunkt $W = (2|f(2))$ und der Tiefpunkt $T = (4|f(4))$ des Graphen.

Nachstehend sind fünf Aussagen über die zweite Ableitung von f gegeben.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

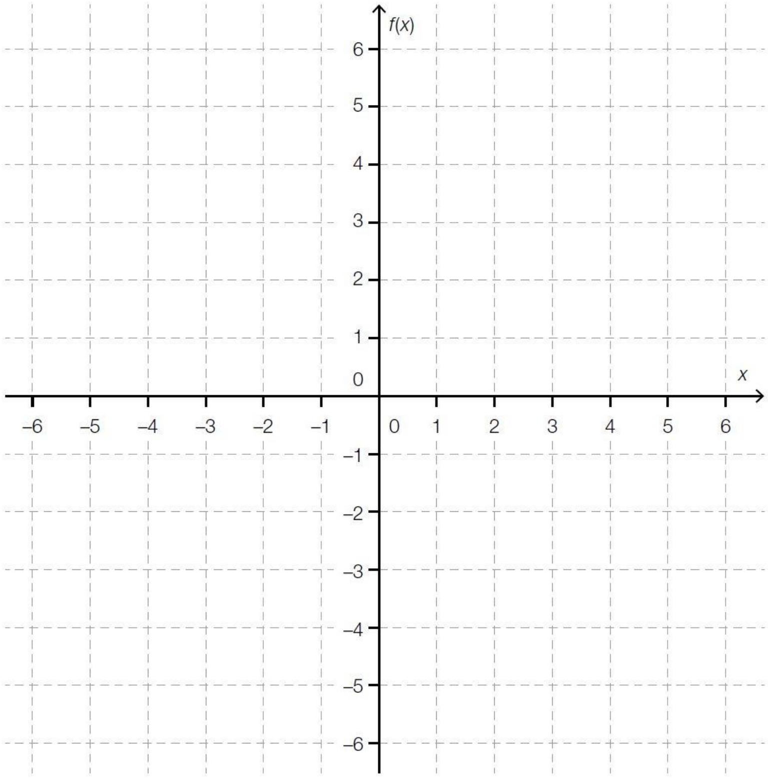
Für alle x aus dem Intervall $[-1; 1]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall $[1; 3]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall $[3; 5]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
$f''(0) = f''(4)$	☐
$f''(2) = 0$	☐

Funktionsgraph* - 1_630, AN3.3, Konstruktionsformat

Eine nicht konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die folgenden Eigenschaften:

$f(4) = 2$
$f'(4) = 0$
$f''(4) = 0$
$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f!



Steigung einer Funktion - 1_036, AN3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$.

Berechnen Sie den Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$!

Wendestelle* - 1_605, AN3.3, Offenes Antwortformat

Eine Polynomfunktion dritten Grades f hat die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 8$.

Geben Sie an, ob die Funktion f an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lokale Extremstellen* - 1_454, AN3.3, Offenes Antwortformat

In der nachstehenden Tabelle sind Funktionswerte einer Polynomfunktion f dritten Grades sowie ihrer Ableitungsfunktionen f' und f'' angegeben.

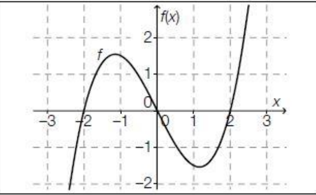
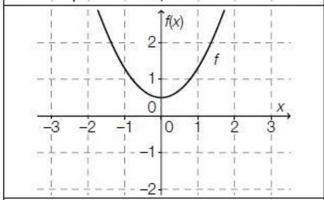
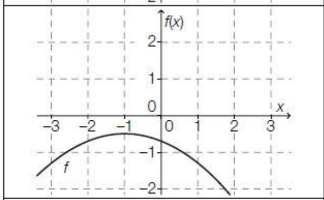
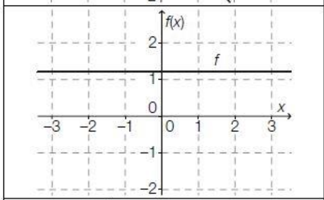
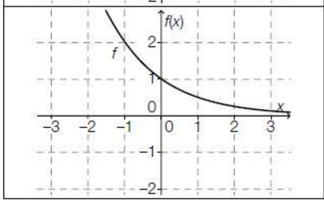
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	–2	2	0	–2	2
$f'(x)$	9	0	–3	0	9
$f''(x)$	–12	–6	0	6	12

Geben Sie an, an welchen Stellen des Intervalls (0; 4) die Funktion f jedenfalls lokale Extremstellen hat!

Eigenschaften der zweiten Ableitung* - 1_526, AN3.3, 2 aus 5

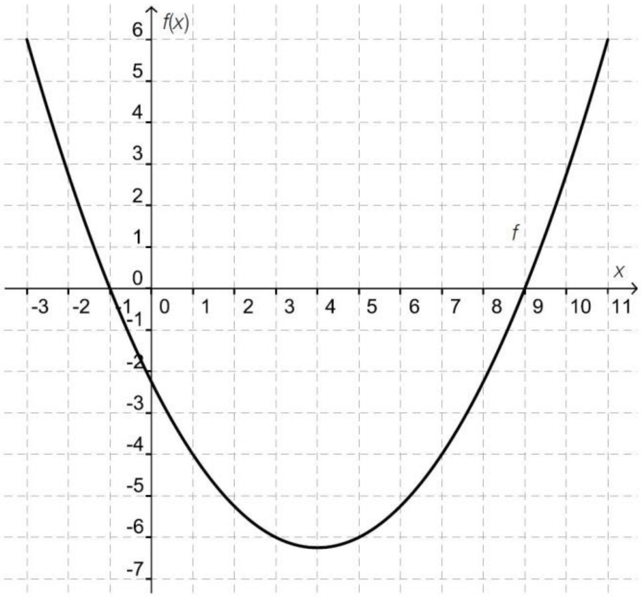
Gegeben sind die Graphen von fünf reellen Funktionen.

Für welche der angegebenen Funktionen gilt $f''(x) > 0$ im Intervall $[-1; 1]$?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Graphen an!

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Negative erste Ableitung* - 1_382, AN3.3, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[-3; 11]$ dargestellt. An der Stelle $x = 4$ hat die Funktion ein lokales Minimum.

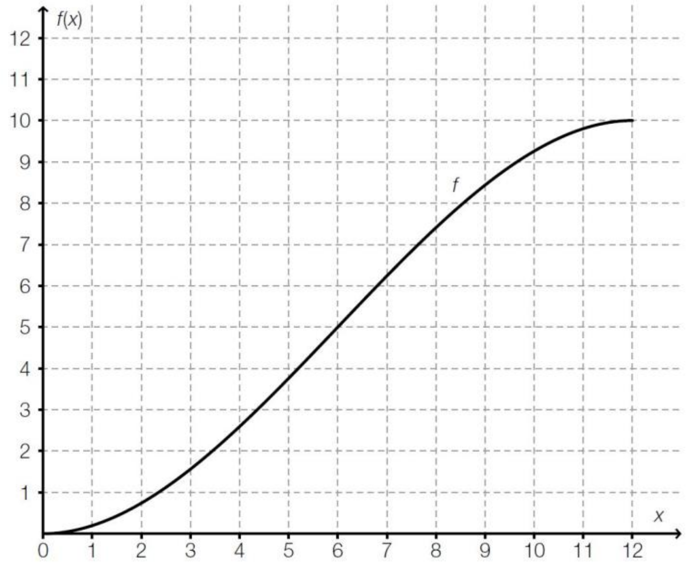


Geben Sie das Intervall I für diejenigen Stellen $x \in [-3; 11]$ an, für die gilt: $f'(x) < 0$!

I = ______________________________

Differenzierbare Funktion* - 1_502, AN3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f.
Die Tangentensteigung an der Stelle $x = 6$ ist maximal.



Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(6) = 0$	☐
$f''(11) < 0$	☐
$f''(2) < f''(10)$	☐
$f'(6) = 0$	☐
$f'(7) < f'(10)$	☐

Nachweis eines lokalen Minimums* - 1_478, AN3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Polynomfunktion p mit $p(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$. Die erste Ableitung p' mit $p'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$ hat an der Stelle $x = 1$ den Wert null.

Zeigen Sie rechnerisch, dass p an dieser Stelle ein lokales Minimum (d.h. ihr Graph dort einen Tiefpunkt) hat!

Extremstelle* - 1_357, AN3.3, 2 aus 5

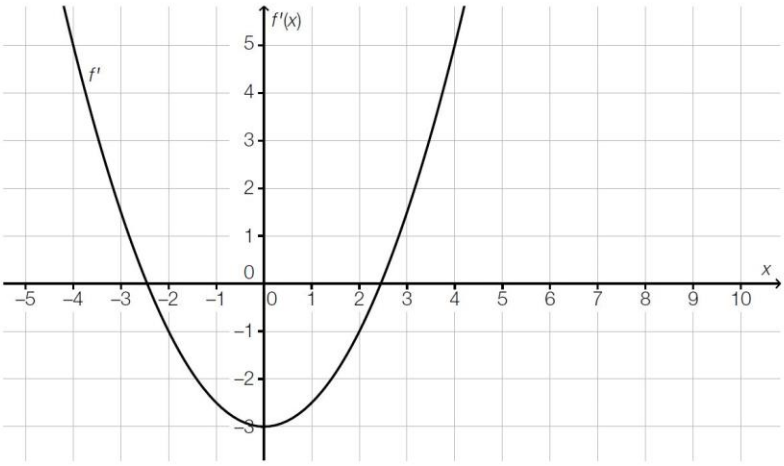
Die Ermittlung lokaler Extremstellen einer Polynomfunktion f erfolgt häufig mithilfe der Differenzialrechnung.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die stets zutreffend sind!

Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann wechselt die Funktion an der Stelle x_0 das Krümmungsverhalten.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f''(x_0) = 0$.	☐
Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x)$ für $x < x_0$ immer negativ und für $x > x_0$ immer positiv.	☐

Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_430, AN3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Die Funktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.

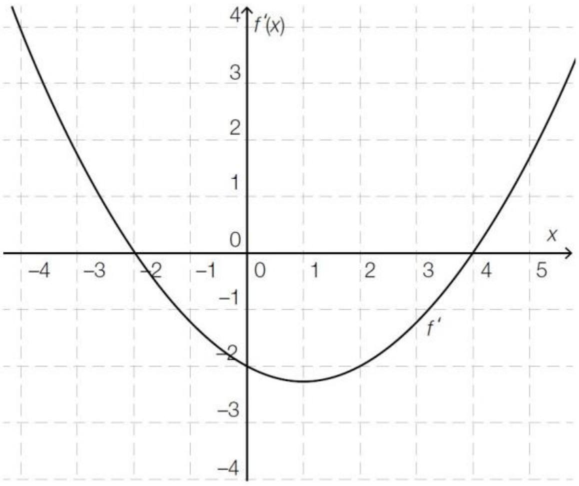


Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 4] streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; –3] streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; 4] linksgekrümmt.	☐

Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_405, AN3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 2$ einer Polynomfunktion f.

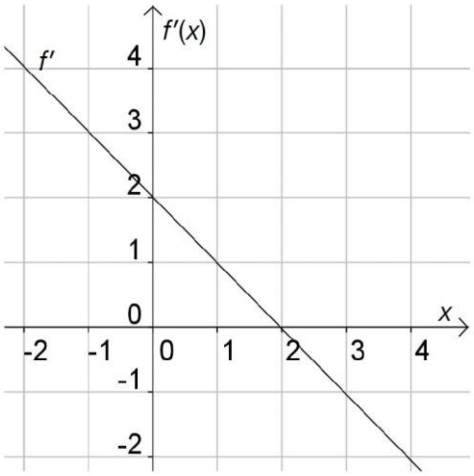


Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind richtig?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f hat im Intervall $[-4; 5]$ zwei lokale Extremstellen.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[1; 2]$ monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; -2]$ monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; 0]$ linksgekrümmt (d. h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [-4; 0]$).	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.	☐

Eigenschaften einer Funktion* - 1_334, AN3.3, 2 aus 5

Von einer reellen Polynomfunktion f sind der Graph und die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' gegeben: $f'(x) = -x + 2$.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Stelle $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von f.	☐
Im Intervall $[0; 1]$ ist f streng monoton fallend.	☐
Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0 \mid f(0))$ hat die Steigung 2.	☐
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f.	☐
Der Graph der Funktion f weist im Intervall $[2; 3]$ eine Linkskrümmung (positive Krümmung) auf.	☐

Polynomfunktion dritten Grades* - 1_1195, AN3.3, 2 aus 5

Vom Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f sind der Tiefpunkt $T = (-1 \mid 2)$ sowie der Hochpunkt $H = (1 \mid 4)$ bekannt.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die Funktion f ist im Intervall $(1; 3)$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f weist im Intervall $(-1; 1)$ einen Monotoniewechsel auf.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $(-3; 1)$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $(-1; 1)$ durchgehend rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Die Funktion f weist im Intervall $(0; 2)$ einen Monotoniewechsel auf.	☐

Regeln des Differenzierens* - 1_1193, AN2.1, 2 aus 5

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen f und g und die positive reelle Zahl a.

Kreuzen Sie die beiden Funktionen an, die auf jeden Fall mit $(a^2 \cdot (f + g))'$ übereinstimmen.
[2 aus 5]

$2 \cdot a \cdot f' + 2 \cdot a \cdot g'$	☐
$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	☐
$2 \cdot a \cdot (f + g)'$	☐
$a^2 \cdot (f + g)'$	☐
$f' + g'$	☐

Monotonie- und Krümmungsverhalten* - 1_893, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben sind eine Polynomfunktion f und zwei Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$.
Für die 1. Ableitung f' von f gilt:
$f'(x_1) < 0$ und $f'(x_2) > 0$

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall $(x_1; x_2)$ gibt es mindestens eine Stelle x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine Wendestelle.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ schneidet der Graph von f mindestens einmal die x-Achse.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ ändert sich das Monotonieverhalten von f.	☐

Traubensaft* - 1_891, AN3.1, 2 aus 5

Ein bestimmter Behälter wird mit Traubensaft befüllt. Die Funktion f beschreibt den Füllstand des Traubensafts im Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t. Dabei gilt:

- Der Füllvorgang erfolgt ohne Unterbrechung.
- Die Zunahme des Füllstands nimmt laufend (d. h. streng monoton) ab.

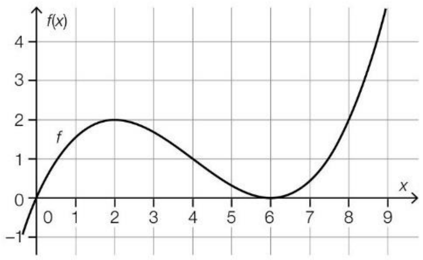
t ... Zeit seit Beginn des Füllvorgangs in s
$f(t)$ ... Füllstand des Traubensafts im Behälter zur Zeit t in cm
t_1, t_2 ... zwei bestimmte Zeitpunkte während des Füllvorgangs mit $t_1 < t_2$

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☐
Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☐
Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 den gleichen Wert wie die 1. Ableitung von f an der Stelle t_2.	☐
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☐
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☐

Ableitungs- und Stammfunktion* - 1_1235, AN3.2, Lückentext

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades f dargestellt. Alle lokalen Extremstellen und die Wendestelle von f sind ganzzahlig.



Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Graph der 1. Ableitung von f ___①___ und die Graphen aller Stammfunktionen von f ___②___.

①	
schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$	☐
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ streng monoton fallend	☐
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt)	☐

②	
haben an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente	☐
schneiden die x-Achse an der Stelle $x = 6$	☐
sind im Intervall $(2; 6)$ streng monoton fallend	☐

Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_1236, AN3.3, 2 aus 5

Eine Polynomfunktion 3. Grades f hat an der Stelle $x_1 = -2$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = 2$ ein lokales Minimum.
Die Funktion hat die 1. Ableitungsfunktion f'.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

f' ist im gesamten Intervall $(-2; 2)$ positiv.	☐
f' hat an der Stelle x_1 den gleichen Wert wie an der Stelle x_2.	☐
f' ist im gesamten Intervall $(-3; -2)$ negativ.	☐
f' hat an der Stelle $x = 4$ einen positiven Wert.	☐
f' hat an der Stelle $x = 0$ den Wert 0.	☐

Erste Ableitung* - 1_1234, AN2.1, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Es gilt: $f'(0) = 2$

Für die zwei Zahlen $a, k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = a \cdot f(k \cdot x)$ gegeben.

Stellen Sie mithilfe von a und k eine Formel zur Berechnung von $g'(0)$ auf.

$g'(0) =$ ____________________

Ableitungsregeln* - 1_1258, AN2.1, 2 aus 5

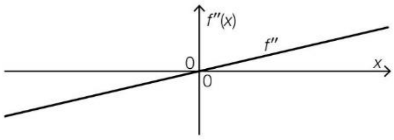
Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{R}$.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

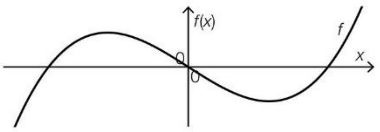
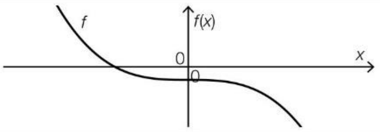
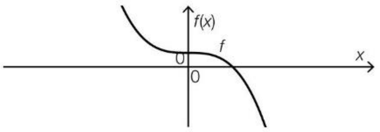
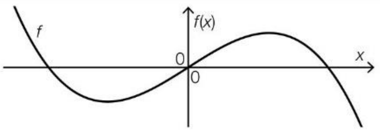
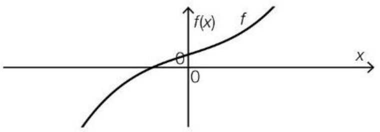
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) - h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) - h'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = h(k \cdot x)$ gilt: $f'(x) = h'(k \cdot x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot g'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + k$ gilt: $f'(x) = g'(x) + k \cdot x$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$	☐

Zweite Ableitung* - 1_1260, AN3.2, 2 aus 5

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der 2. Ableitung f'' einer Polynomfunktion 3. Grades f. Der Graph von f'' ist eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung verläuft.

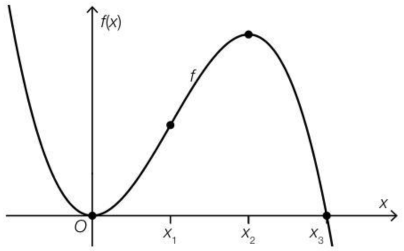


Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, die den Graphen einer solchen Polynomfunktion f darstellen können. *[2 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Punkte auf einem Graphen* (1_1284) - AN3.3 - Zuordnungsformat

Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades f dargestellt. Zusätzlich sind vier Punkte mit den x-Koordinaten 0, x_1, x_2 und x_3 eingezeichnet. Diese vier Punkte sind charakteristische Punkte des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkt).



Ordnen Sie den vier Stellen 0, x_1, x_2 und x_3 jeweils die zutreffende Aussage aus A bis F zu.

0	
x_1	
x_2	
x_3	

A	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung negativ.
B	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung negativ.
C	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung positiv.
D	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung positiv.
E	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung gleich null.
F	An dieser Stelle ist die erste Ableitung positiv und die zweite Ableitung gleich null.

Eigenschaften einer Polynomfunktion* (1_1308) - AN3.3 - 1 aus 6

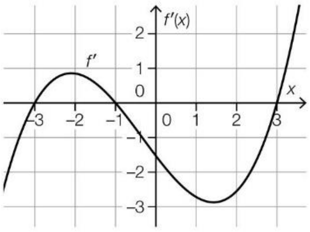
Eine Polynomfunktion 4. Grades f hat an den Stellen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ jeweils ein lokales Maximum. Unten stehend sind sechs Aussagen zu $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ angeführt.

Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die jedenfalls zutrifft. *[1 aus 6]*

Es gibt genau ein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt genau ein c, für das $f''(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt genau ein c, für das $f(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f''(c) = 0$ gilt.	☐

Graph einer Ableitungsfunktion* (1_1331) - AN3.2 - 2 aus 5

Nachstehend ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt. Die Ableitungsfunktion f' ist eine Polynomfunktion 3. Grades und hat 3 ganzzahlige Nullstellen.



Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Polynomfunktion f jedenfalls zutreffen. *[2 aus 5]*

f ist im Intervall [2; 3] streng monoton steigend.	☐
f ist im Intervall [2; 3] linksgekrümmt (positiv gekrümmt).	☐
Es gilt: $f(-3) \leq f(3)$	☐
f hat genau 2 Wendestellen.	☐
f hat genau 2 lokale Maximumstellen.	☐

Polynomfunktion dritten Grades* (1_1332) - AN3.3 - Lückentext

Gegeben ist eine Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $d \neq 0$.

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Stelle $x = 0$ ist für $b = 0$ und $c \neq 0$ jedenfalls eine ___①___ und für $c = 0$ und $b \neq 0$ jedenfalls eine ___②___.

①	
Nullstelle	☐
Extremstelle	☐
Wendestelle	☐

②	
Nullstelle	☐
Extremstelle	☐
Wendestelle	☐

Rookie Level

Fussballspielen im Park * (A_250)

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

Kraftstoffverbrauch (B_176)

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$K(v) = 0{,}005 \cdot v^2 - 0{,}4 \cdot v + 14{,}3$

– Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

Rollladen (B_013)

b) Der innere Kantenverlauf einer Nut kann näherungsweise durch die Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 9{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 8{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot x$

x … Koordinaten in mm ($0 \leq x \leq 100$)
$g(x)$ … Koordinaten in mm

– Berechnen Sie die Stelle, an der der Funktionsgraph g die maximale Steigung aufweist.

Simulation eines Golfballflugs (A_026)

In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines in ebenem Gelände geschlagenen Golfballs dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{216\,000} \cdot x^3 + \frac{x}{5}, \ x \geq 0$$

x … waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls in Metern (m), wenn der Ball sich in x Metern Entfernung vom Abschlag befindet (Annahme: Der Golfball bewegt sich in einer Ebene.)

b) Der Ball fällt in einen Teich, der sich in derselben Höhe wie der Abschlag befindet. Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung des Winkels, unter dem der Ball eintaucht, ohne die Berechnung auszuführen.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Flugbahn mithilfe der Differenzialrechnung.

d) Begründen Sie, warum die gegebene Funktion höchstens einen Hochpunkt (lokales Maximum) haben kann.

Riesenpizza * (A_238)

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

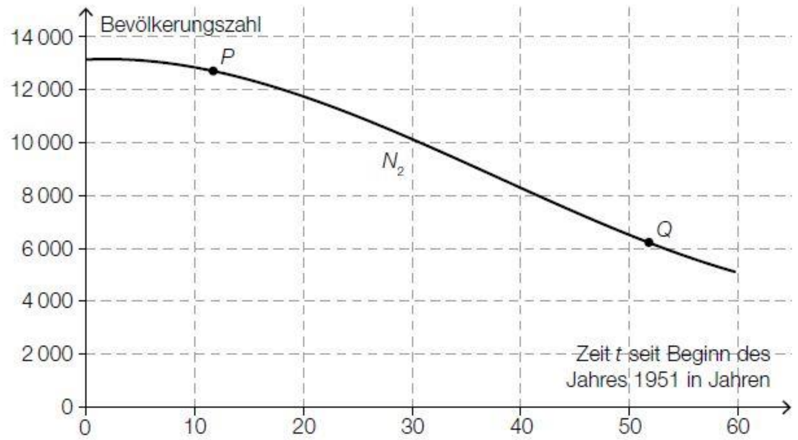
$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

– Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am geringsten ist.
– Berechnen Sie, wie viel diese Pizza kostet.

Bevoellkerungsentwicklung * (A_218)

b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



– Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

Puppenrutsche * (B_373)

b) Das seitliche Profil einer anderen Spielzeugrutsche kann durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

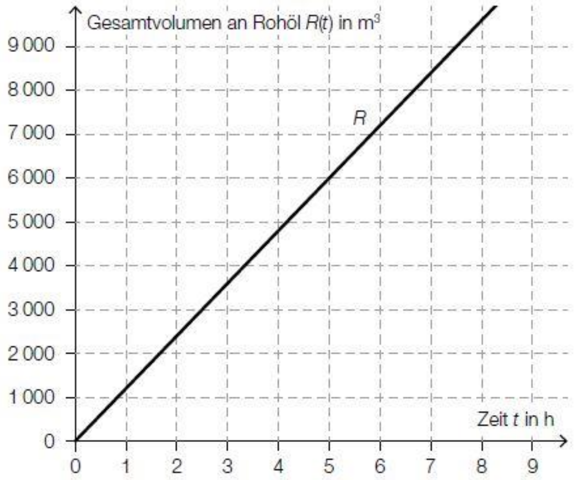
$g(x) = \frac{1}{108} \cdot (x^3 - 18 \cdot x^2 + 864)$ mit $0 \leq x \leq 12$
$x, g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist.

2) Begründen Sie allgemein, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

Die Adria-Wien-Pipeline* (A_280)

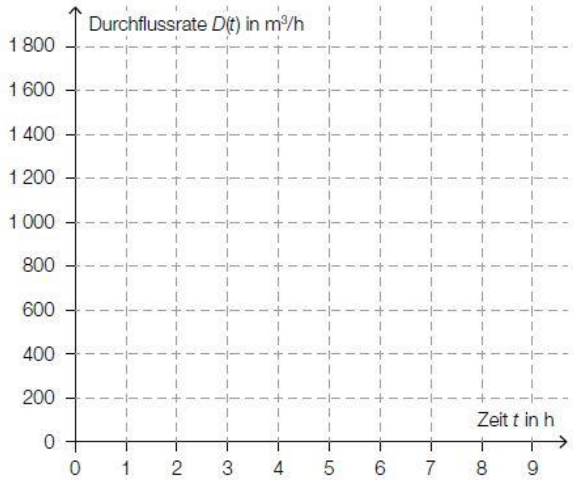
c) Das Gesamtvolumen an Rohöl, das im Zeitintervall [0; t] einen Kontrollpunkt in der Pipeline passiert, kann näherungsweise durch die Funktion R in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Der Graph der Funktion R ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen eine Gleichung der Funktion R.

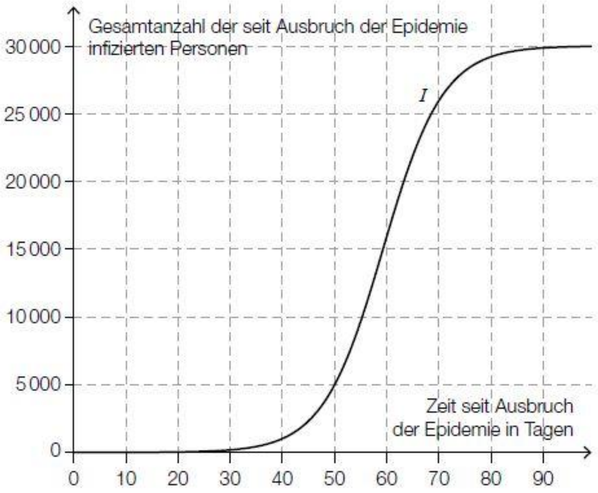
Die Durchflussrate $D(t)$ zum Zeitpunkt t ist die momentane Änderungsrate der Funktion R.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Durchflussrate ein.



Epidemie * (A_255)

c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

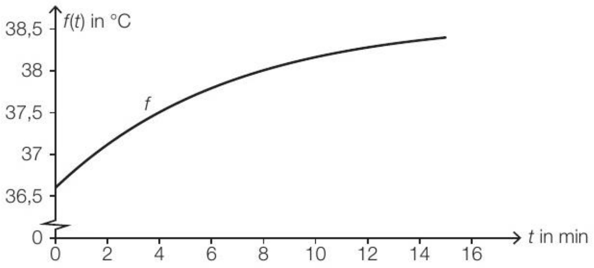


– Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, bei dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie der Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist, mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann, wenn eine Gleichung von I bekannt ist.

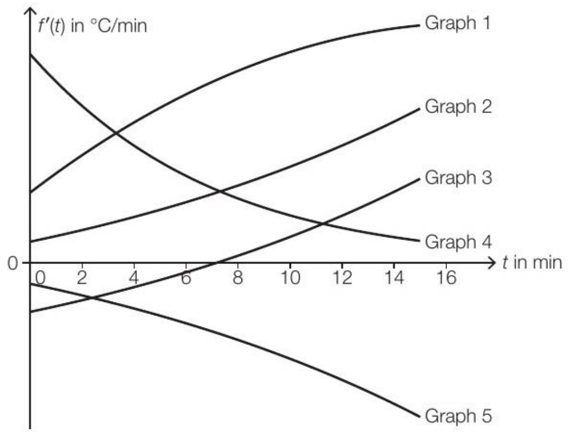
Sauna * (A_297)

a) Der Graph der Funktion f in der nachstehenden Abbildung zeigt die Körpertemperatur eines Saunagasts während eines Saunagangs.

t ... Zeit seit Betreten der Sauna in min
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C



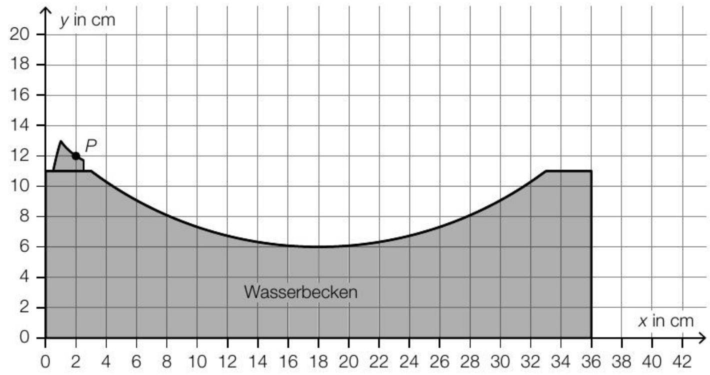
1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f' an. *[1 aus 5]*



Graph 1	☐
Graph 2	☐
Graph 3	☐
Graph 4	☐
Graph 5	☐

Trinkwasser * (A_311)

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Trinkbrunnens mit Wasserbecken schematisch dargestellt.



Der Wasserstrahl kann vom Austritt im Punkt *P* bis zum Auftreffen auf das Wasserbecken näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion *f* beschrieben werden.

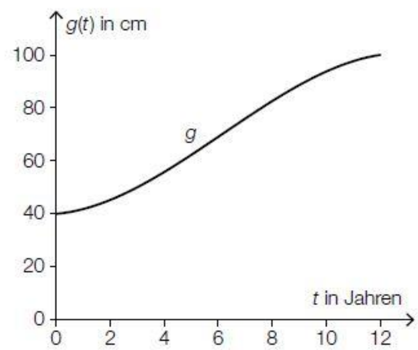
1) Skizzieren Sie den Graphen einer solchen Funktion *f* vom Austritt bis zum Auftreffen auf das Wasserbecken, wenn gilt: $f'(10) = 0$ und $f''(10) < 0$. *[0/1 P.]*

Buchsbaeume * (A_186)

b) In den ersten 12 Jahren nach der Auspflanzung kann die Höhe eines Buchsbaums der Sorte *B* näherungsweise durch die Funktion *g* beschrieben werden:

$g(t) = -0{,}053 \cdot t^3 + 0{,}98 \cdot t^2 + 0{,}872 \cdot t + 40$ mit $0 \leq t \leq 12$

t ... Zeit nach der Auspflanzung des Buchsbaums in Jahren
$g(t)$ ... Höhe des Buchsbaums zur Zeit t in cm



– Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums.
– Beschreiben Sie, was mit folgendem Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$g(5) - g(0)$

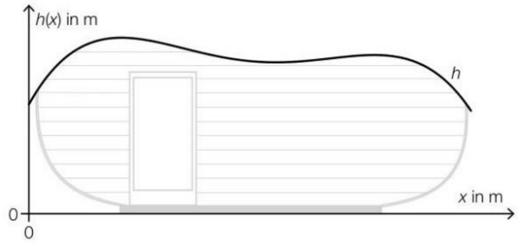
Gartensauna * (A_328)

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Gartensauna dargestellt. Die obere Begrenzungslinie des Daches wird durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$h(x) = -0{,}0207 \cdot x^4 + 0{,}265 \cdot x^3 - 1{,}14 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x + 1{,}54 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 6{,}2$

x ... horizontale Entfernung vom linken Dachrand in m

$h(x)$ ... Höhe über dem waagrechten Boden an der Stelle x in m

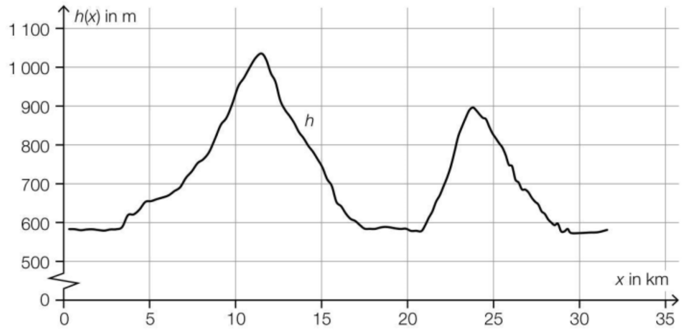


An der Stelle x_P gilt: $h'(x_P) = 0$ und $h''(x_P) > 0$

1) Berechnen Sie die Stelle x_P.

Straßenrad-WM * (A_340)

b) Für einen bestimmten Teilabschnitt kann die Höhe über dem Meeresspiegel in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg x durch die Funktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



Im Intervall [5; 15] gibt es genau eine Stelle x_1, an der gilt: $h'(x_1) = 0$ und $h''(x_1) < 0$

1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den zugehörigen Punkt $P = (x_1 | h(x_1))$ auf dem Graphen von h.

Pro Level

Flusslaeufe und Pegelstaende * (A_266)

a) Während eines Hochwassers wurde über den Zeitraum von einer Woche der Pegelstand eines Flusses ermittelt. Den Messergebnissen zufolge kann der zeitliche Verlauf des Pegelstands näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden:

$p(t) = -3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661$ mit $0 \leq t \leq 168$

t ... Zeit in h
$p(t)$ ... Pegelstand zur Zeit t in m

– Berechnen Sie die Abweichung des höchsten Pegelstands während des Hochwassers vom „üblichen" Pegelstand von 2,5 m.

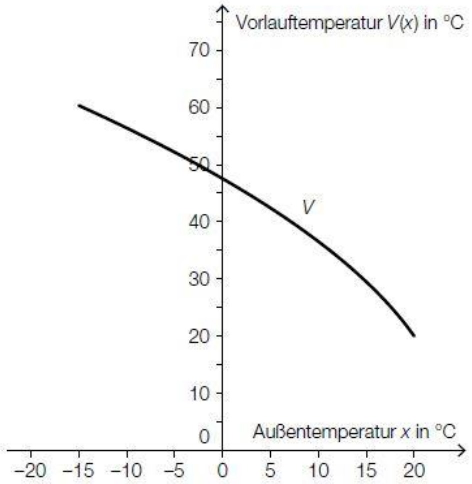
Zur Zeit t_1 gilt: $p''(t_1) = 0$

– Interpretieren Sie die Bedeutung von t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

Pelletsheizung * (A_068)

b) Die Temperatur, auf die das Wasser eines Heizsystems erwärmt wird, bezeichnet man als *Vorlauftemperatur*. Bei einer Pelletsheizung ist die Vorlauftemperatur abhängig von der Außentemperatur.

Den Graphen der zugehörigen Funktion V nennt man *Heizkurve*. In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Heizkurve für Außentemperaturen von –15 °C bis 20 °C dargestellt.



1) Kreuzen Sie die auf die Funktion V im Intervall]0; 20[zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$V(x) > 0$ und $V'(x) > 0$	☐
$V'(x) > 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) > 0$	☐

Die Funktion V soll im Intervall [–15; 20] durch eine lineare Funktion ersetzt werden. Diese soll an den Randpunkten des Intervalls die gleichen Funktionswerte wie V haben.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen dieser linearen Funktion ein.

3) Geben Sie an, um wie viel Grad Celsius die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C geringer ist, wenn anstelle der Funktion V die lineare Funktion verwendet wird.

Fressverhalten von Furchenwalen * (A_288)

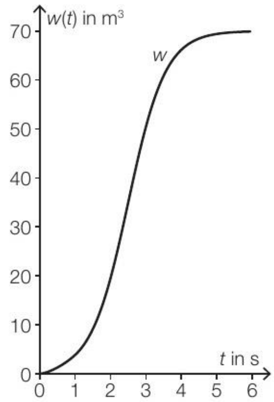
b) Die Größe der Maulöffnung bei einem Beutestoß eines Furchenwals kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1\,863 \cdot t) \text{ mit } 0 \leq t \leq 6$$

t ... Zeit seit Beginn des Öffnens des Mauls in s
$m(t)$ ... Größe der Maulöffnung zur Zeit t in m²

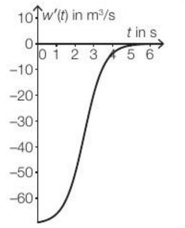
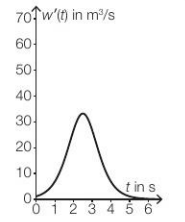
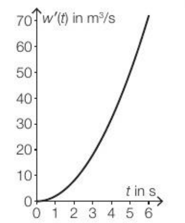
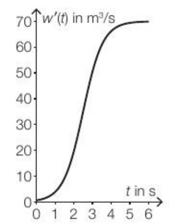
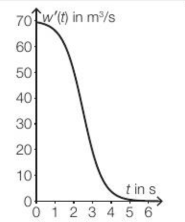
1) Ermitteln Sie die maximale Größe der Maulöffnung.

c) Die Funktion w beschreibt näherungsweise das gesamte Wasservolumen, das ein Furchenwal während eines Beutestoßes aufnimmt (siehe nachstehende Abbildung).



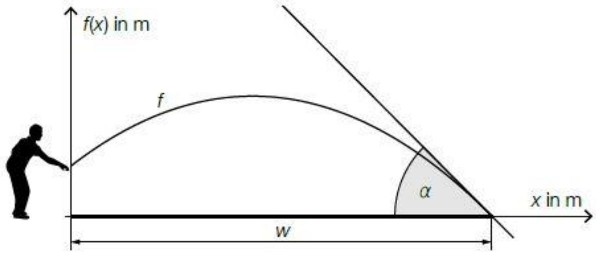
t ... Zeit seit Beginn der Wasseraufnahme in s
$w(t)$ ... gesamtes aufgenommenes Wasservolumen bis zur Zeit t in m^3

1) Kreuzen Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion w' an. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Boule* (B_444)

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

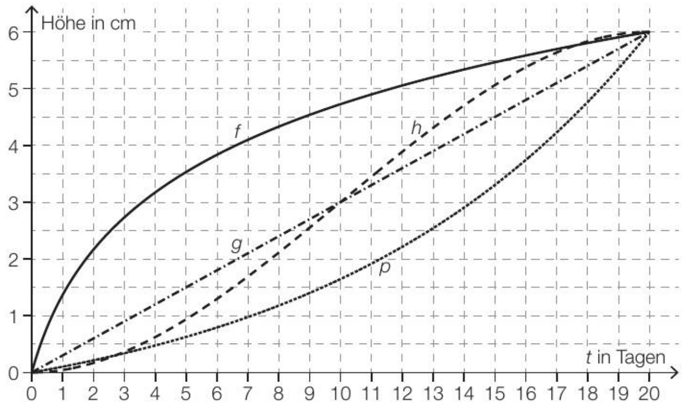
3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

Pflanzenwachstum * (A_292)

a) Die Entwicklung der Höhe von vier verschiedenen Pflanzen wurde über einen Zeitraum von 20 Tagen beobachtet und lässt sich jeweils näherungsweise durch die Funktion f, g, h bzw. p beschreiben.

t ... Zeit ab Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $p(t)$ ... Höhe der entsprechenden Pflanze zur Zeit t in cm

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen dieser vier Funktionen.



Zur Zeit $t = 20$ sind diese vier Pflanzen gleich hoch.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag im Zeitintervall [0; 20].

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Funktion aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	

A	f
B	g
C	h
D	p

Kuehe auf der Weide * (A_141)

c) Die Körpergröße von Rindern wird durch die sogenannte *Widerristhöhe* beschrieben.

Eine Landwirtin züchtet eine Rinderrasse, für die die Widerristhöhe in Abhängigkeit vom Alter modellhaft durch die Funktion h beschrieben wird.

$h(t) = 0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73$ mit $1 \leq t \leq 24$

t … Alter in Monaten
$h(t)$ … Widerristhöhe eines Rindes im Alter t in cm

1) Berechnen Sie das Alter, in dem gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht wird.

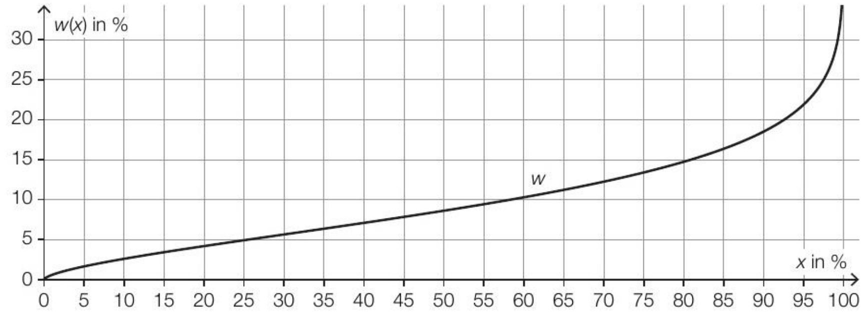
2) Weisen Sie mithilfe der 2. Ableitung von h nach, dass der Graph von h im gesamten Definitionsbereich [1; 24] negativ gekrümmt ist.

Es gilt: $h'(12) \approx 2{,}2$

3) Interpretieren Sie den Wert 2,2 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Holzfeuchte und Holztrocknung * (A_307)

c) Im nachstehenden Diagramm ist der Zusammenhang zwischen der relativen Luftfeuchtigkeit x (in Prozent) und dem Wassergehalt $w(x)$ (in Prozent) einer bestimmten Holzsorte bei der Lagerung dargestellt.



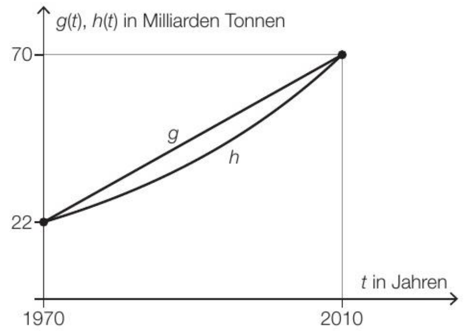
1) Kennzeichnen Sie im obigen Diagramm denjenigen Punkt $P = (x_0 | w(x_0))$, für den gilt: $w'(x_0) = 1$

Der im obigen Diagramm dargestellte Zusammenhang soll im Intervall [45; 55] mithilfe der Punkte $A = (45 | 7{,}8)$ und $B = (55 | 9{,}4)$ durch eine lineare Funktion modelliert werden.

2) Stellen Sie eine Gleichung dieser linearen Funktion auf.

Ressourcen * (B_512)

b) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch die streng monoton steigende lineare Funktion g oder durch die streng monoton steigende Exponentialfunktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für ______①______ von g und h gilt: ______②______.

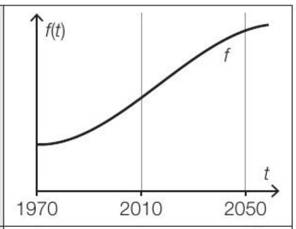
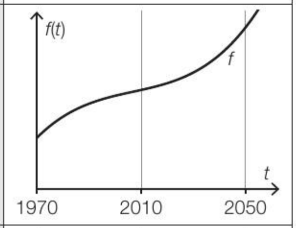
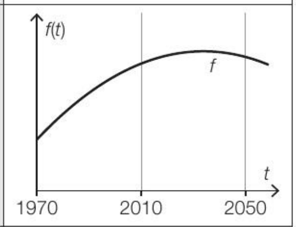
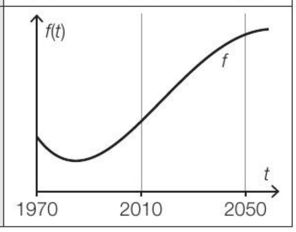
①	
genau 1 Stelle	☐
genau 2 Stellen	☐
mehr als 2 Stellen	☐

②	
$g(t) = h(t) = 0$	☐
$g'(t) = h'(t)$	☐
$g''(t) = h''(t)$	☐

c) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch verschiedene Polynomfunktionen modelliert werden.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den entsprechenden Funktionsgraphen aus A bis D zu.

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	

A	
B	
C	
D	

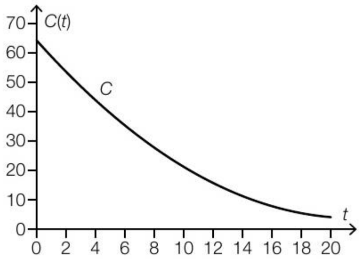
Papier * (A_316)

d) Zur Papierherstellung wird gebleichter Zellstoff benötigt. Dieser wurde lange Zeit hauptsächlich mit Chlor gebleicht.

Die weltweite Produktionsmenge von Zellstoff, der mit Chlor gebleicht wurde, kann in den Jahren ab 1990 durch die Funktion C modelliert werden.

t … Zeit ab 1990 in Jahren
$C(t)$ … weltweite Produktionsmenge zur Zeit t in Millionen Tonnen pro Jahr

Der Graph der Funktion C ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

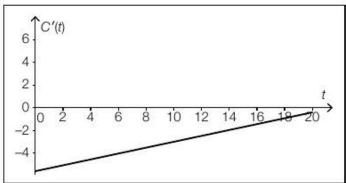


1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Wert des nachstehenden Ausdrucks.

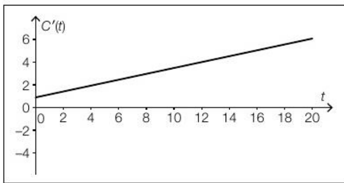
$|C(10) - C(0)| \approx$ __________________ Millionen Tonnen pro Jahr *[0/1 P.]*

Die Funktion C ist eine quadratische Funktion. Eine der unten stehenden Abbildungen zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion C'.

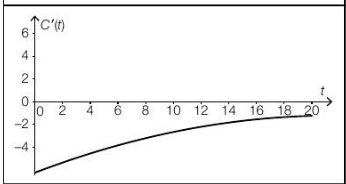
2) Kreuzen Sie die zutreffende Abbildung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*



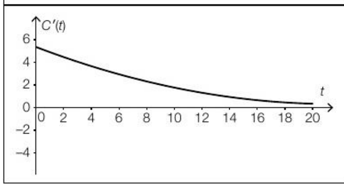
☐



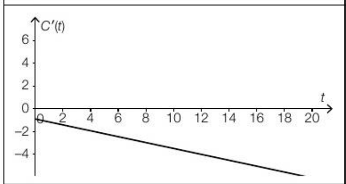
☐



☐



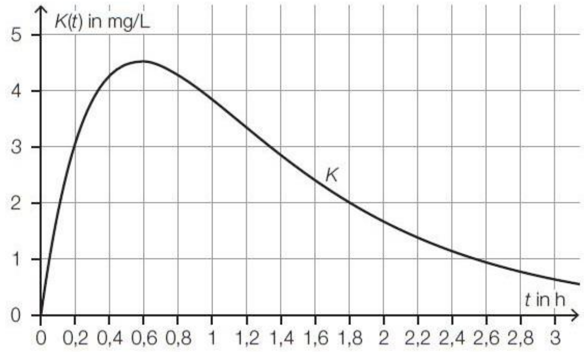
☐



☐

Koffein* (a) - 2_101, FA1.5 AN3.3, Halboffenes Antwortformat Lückentext

a) Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, wie viele Minuten nach dem Trinken des Kaffees die maximale Konzentration von Koffein im Blut auftritt.

______________________ min

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

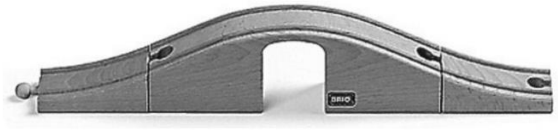
Die Funktion K hat im Intervall (0; 0,8) ____①____ und in diesem Intervall ändert sich das Vorzeichen der ____②____.

①	
eine Wendestelle	☐
eine Extremstelle	☐
eine Nullstelle	☐

②	
Krümmung	☐
Steigung	☐
Funktionswerte	☐

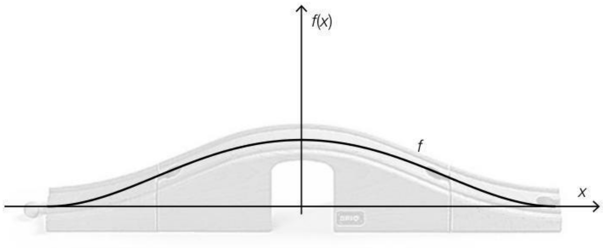
Holzzug * (B_560)

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Brücke für einen Holzzug dargestellt.



© Ravensburger AG

Der Verlauf der oberen Begrenzungslinie soll durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie denjenigen Funktionstyp an, der auf f zutreffen kann. *[1 aus 5]*

quadratische Funktion	☐
Polynomfunktion 3. Grades	☐
Polynomfunktion 4. Grades	☐
lineare Funktion	☐
Logarithmusfunktion	☐

2) Geben Sie die Anzahl der Stellen von f an, für die sowohl $f''(x) = 0$ als auch $f'(x) \neq 0$ gilt.

Anzahl der Stellen: ____________________

Mit Pfeil und Bogen * (A_323)

a) Für die Beschreibung der Flugbahn eines Pfeiles beim Bogenschießen wird die Bewegung der Pfeilspitze beobachtet. Die Flugbahn kann näherungsweise durch die quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in m
$f(x)$ ... Höhe der Pfeilspitze in der horizontalen Entfernung x in m

Beim ersten Schuss beträgt der Steigungswinkel der Flugbahn im Abschusspunkt 45°.

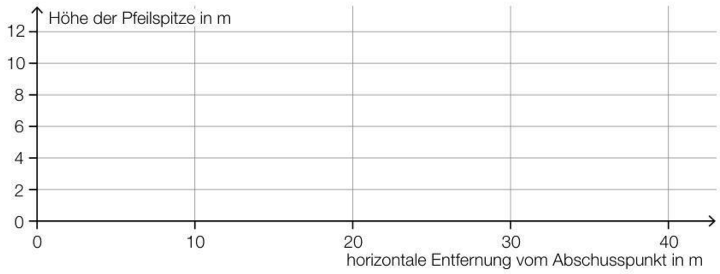
1) Ermitteln Sie den Koeffizienten b.

Beim zweiten Schuss befindet sich die Pfeilspitze beim Abschuss in einer Höhe von 2 m. Sie erreicht ihre maximale Höhe von 10 m in einer horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt von 20 m. Die Flugbahn beim zweiten Schuss kann ebenfalls durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.

2) Geben Sie die Höhe H der Pfeilspitze bei einer horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt von 40 m an.

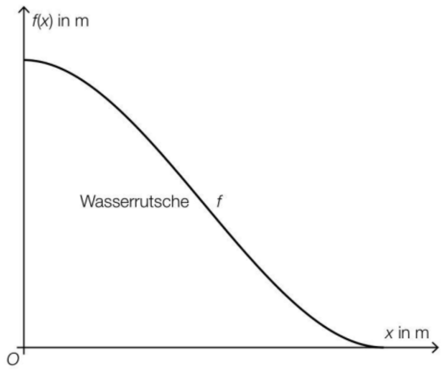
$H =$ ____________________ m

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Flugbahn beim zweiten Schuss im Intervall [0; 40] ein.



Schwimmbecken* (2_125)

c) In der nachstehenden Abbildung ist das seitliche Profil einer bestimmten Wasserrutsche modellhaft dargestellt.

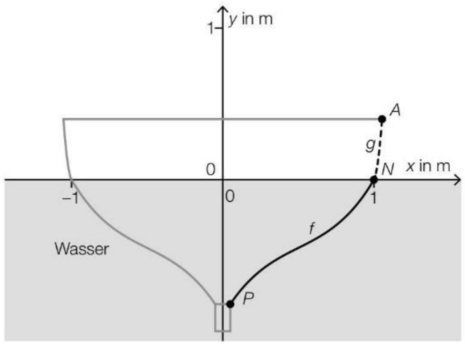


Das seitliche Profil der Wasserrutsche ist durch den Graphen der Funktion $f: [0; 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{8}{125} \cdot x^3 - \frac{12}{25} \cdot x^2 + 4$ gegeben (x in m, $f(x)$ in m).

1) Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der die Wasserrutsche am steilsten bergab verläuft.

Ruderboot * (A_343)

In der nachstehenden Abbildung ist der zur y-Achse symmetrische Querschnitt eines Ruderboots modellhaft dargestellt.



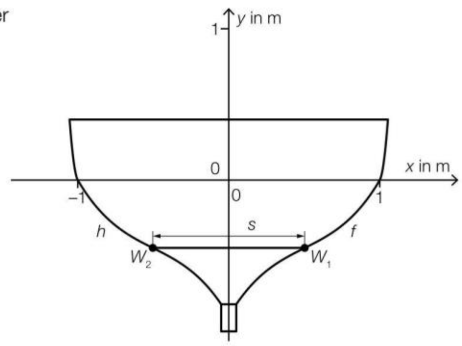
Der Graph der Funktion f ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt P bis zum Punkt N.

Der Graph der quadratischen Funktion g ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt N bis zum Punkt A.

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 1{,}7 \cdot x - 0{,}9$

b) In der nebenstehenden Abbildung sind der Wendepunkt W_1 der Funktion f sowie der Wendepunkt W_2 der zu f symmetrischen Funktion h eingezeichnet.
Zwischen den Punkten W_1 und W_2 soll eine horizontale Verbindung s angebracht werden.



1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die Länge von s.

All Star Level

Leistung einer Solaranlage * (A_212)

a) Die Leistung einer Solaranlage lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion P beschreiben:

$$P(t) = \frac{7}{648} \cdot t^4 - \frac{7}{27} \cdot t^3 + a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung zur Zeit t in Kilowatt (kW)

Die Leistung ist um 13 Uhr am höchsten.

– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

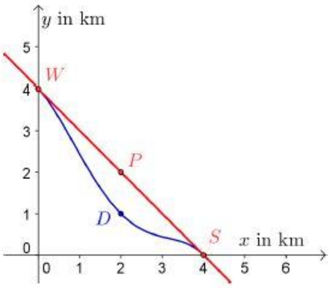
Ortsumfahrung (A_013)

Eine große Ortschaft $P = (2|2)$ liegt auf einer geraden Straße zwischen den Dörfern $W = (0|4)$ und $S = (4|0)$. Es soll um die Ortschaft P eine Umfahrungsstraße gebaut werden, die über den Punkt $D = (2|1)$ führt und bei W bzw. S wieder in die gerade Straße einmündet. Die Koordinatenwerte sind in Kilometern angegeben.

a) Eine Umfahrungsstraße, die durch die Funktion

$$f(x) = -0{,}0625x^4 + 0{,}5x^3 - x^2 - x + 4$$

beschrieben werden kann, hat den Vorteil, dass sie in den Punkten S und W tangential in die ursprüngliche Straße einmündet.



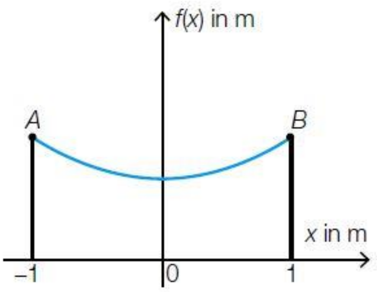
– Zeigen Sie durch Berechnung, dass die Gerade durch die Punkte S und W in diesen beiden Punkten eine Tangente an die Funktion f ist.

Durchhaengende Kette (A_214)

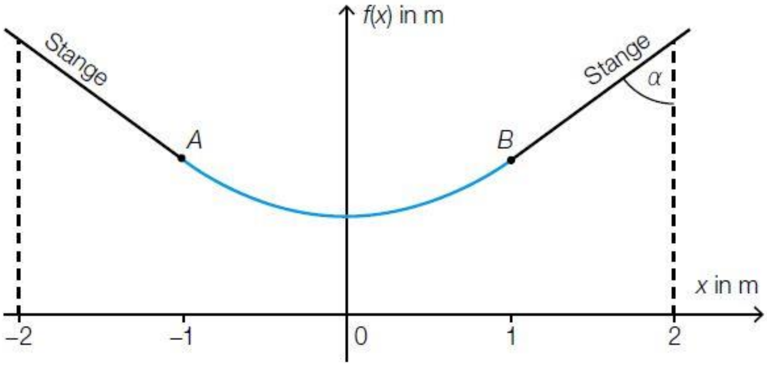
Eine durchhängende Kette zwischen 2 Masten gleicher Höhe, die 2 m voneinander entfernt sind, kann mit der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = e^x + e^{-x}$

$|x|$ ... Abstand von der vertikalen Achse in m
$f(x)$ ... Höhe der Kette über dem Boden in m



b) Die oben beschriebene Kette soll an den Punkten A und B an 2 Stangen befestigt werden, die an den 2 Punkten die gleichen Steigungswinkel wie die Kette haben.



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die Stangen mit der Senkrechten einschließen.

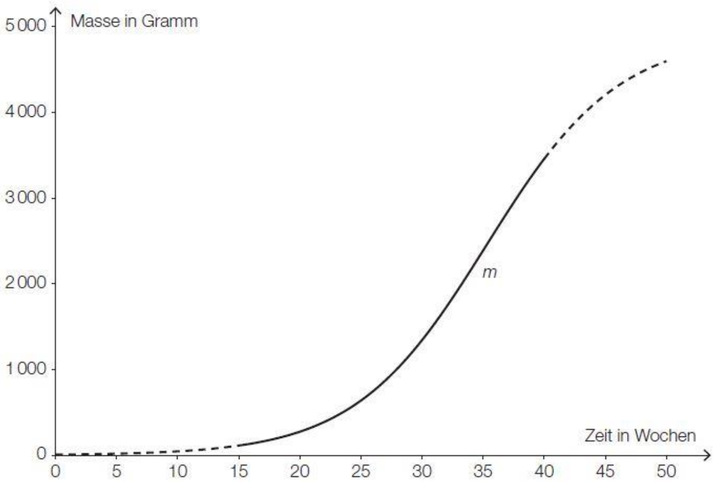
Schwangerschaft * (B_322)

b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \quad \text{mit } 15 \leq t \leq 40$$

t ... Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ ... Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

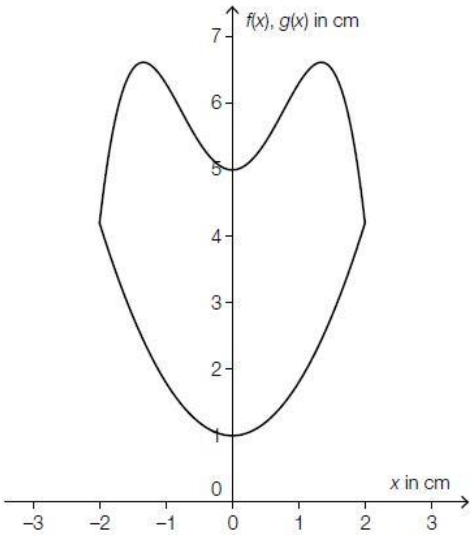
Bastelarbeit im Kindergarten * (B_336)

Als Werkarbeit in einem Kindergarten sollen Katzenköpfe aus Modelliermasse gestaltet werden. Als Vorlage dazu dient eine Ausstechform. Die Begrenzungslinien dieser Ausstechform können durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^4 + 1{,}8 \cdot x^2 + 5$
$g(x) = 0{,}8 \cdot x^2 + 1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Graphen dieser Funktionen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



c) Um die Werkarbeit der Kinder schön verpacken zu können, sollen Schachteln mit rechteckiger Grundfläche gefaltet werden. Jeder Katzenkopf soll in eine solche Schachtel gelegt werden. Eine Seite der Schachtel-Grundfläche muss mindestens 4 cm lang sein.

1) Berechnen Sie die Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche.

Skatepark (1) * (A_194)

b) Der Verlauf einer anderen Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden:

$f(x) = \frac{1}{320} \cdot x^2$ mit $0 \leq x \leq 160$

x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

– Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

Vitamin C* (A_281)

c) Nach der Einnahme einer Vitamin-C-Tablette steigt die Vitamin-C-Konzentration im Blut zunächst an und sinkt danach wieder ab.

Die Funktion c beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf der Vitamin-C-Konzentration im Blut einer bestimmten Person.

$c(t) = 24 \cdot (e^{-0{,}0195 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t}) + 3$

t ... Zeit seit der Einnahme der Vitamin-C-Tablette in h
$c(t)$ ... Vitamin-C-Konzentration im Blut zur Zeit t in Mikrogramm pro Milliliter (µg/ml)

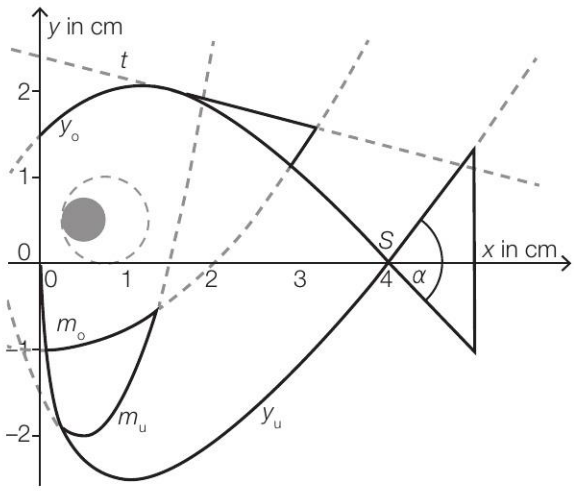
1) Zeigen Sie, dass die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut der Person gerundet 25,18 µg/ml beträgt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die maximale Vitamin-C-Konzentration in mg/L angibt. *[1 aus 5]*

0,02518 mg/L	☐
25,18 mg/L	☐
25 180 mg/L	☐
0,00002518 mg/L	☐
25 180 000 mg/L	☐

Nemo (B_364)

Eine Schülerin hat mithilfe mathematischer Funktionen den Fisch *Nemo* gestaltet:



Die Funktionen y_u und y_o sind definiert durch:

$y_u(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(x - 2 \cdot \sqrt{x}\right)$ und $y_o(x) = \frac{11}{256} \cdot x^3 - \frac{33}{64} \cdot x^2 + x + \frac{3}{2}$

x, $y_u(x)$, $y_o(x)$ … Koordinaten in cm

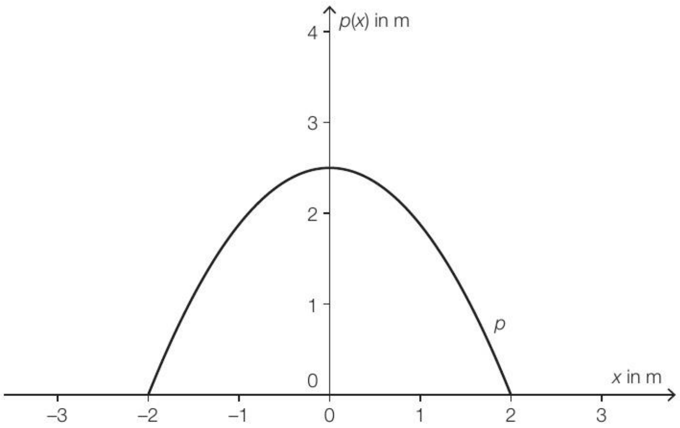
a) – Berechnen Sie den Winkel α.

b) Die obere Begrenzungslinie der Rückenflosse ist durch eine Tangente t an die Funktion y_o im Punkt $x = 1{,}5$ cm erzeugt.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Tangente t auf.

Tunnelzelte (A_131)

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Außenhülle eines Zeltes, die durch den Graphen einer geraden Funktion p modelliert wurde, dargestellt.



In einer Höhe von 2 m werden an der linken und an der rechten Seite der Außenhülle Seile angebracht. Diese werden so gespannt und am Boden befestigt, dass sie wie eine Tangente an die Außenhülle verlaufen.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Seile ein.

Eine Funktion f wird *gerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = f(-x)$
Eine Funktion f wird *ungerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = -f(-x)$

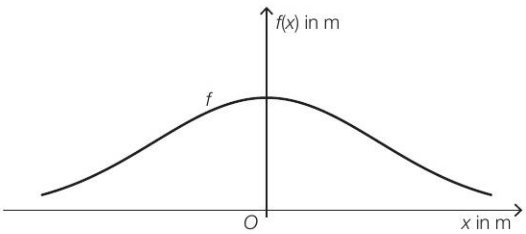
Mit der folgenden Rechnung wird gezeigt, dass die Ableitung jeder geraden Funktion f ungerade ist:

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \overset{(1)}{=} f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

– Erklären Sie den mit (1) gekennzeichneten Rechenschritt unter Angabe der entsprechenden Ableitungsregel.

Gruenbruecken * (B_495)

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Grünbrücke modellhaft dargestellt.



Die Höhe der Grünbrücke kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$

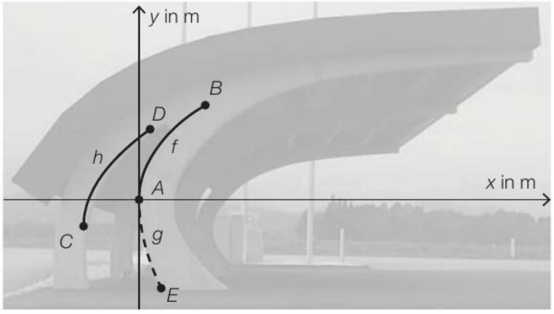
x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... positive Parameter

Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 0$ m eine Höhe von 10 m.
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 20$ m eine Höhe von 6 m.

1) Geben Sie den Parameter a an.
2) Berechnen Sie den Parameter b.
3) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Steigung von f am größten ist.

Carport * (B_522)

a) Im Modell A wird ein Teil des Carports durch die Graphen der Funktionen f, g und h beschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Bildquelle: BMBWF

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ beschreibt zwischen den Punkten $A = (0|0)$ und B den Verlauf einer Begrenzungslinie.

Der Graph der Funktion h ergibt sich durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um 1 m nach links und um 0,5 m nach unten.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen und Rechenzeichen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$h(x) = a \cdot \sqrt{x \,\square\, \square} \,\square\, \square$$

Der Graph der Funktion g mit $g(x) = b \cdot \sqrt{x}$ beschreibt zwischen den Punkten $A = (0|0)$ und $E = (0{,}4|-1{,}62)$ den Verlauf einer weiteren Begrenzungslinie.

2) Ermitteln Sie den Parameter b.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$h'(0{,}1) > f'(0{,}1)$	☐
$f'(0{,}1) - g'(0{,}1) = 0$	☐
$f'(0) = 1$	☐
$f'(0{,}1) = h'(-0{,}9)$	☐
$g'(0{,}4) < g'(0{,}1)$	☐

Auslastung von Flügen* (b) - 2_111, FA1.5 AG2.1, Offenes Antwortformat

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2000; 10000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1000} \cdot e^{-\frac{s}{4000}} \quad \text{mit} \quad 2000 \leq s \leq 10000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist.

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist.

Weltbevölkerung* - 2_115, FA5.3, Offenes Antwortformat

c) In einem anderen Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion g modelliert.

$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$

t ... Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t)$ ... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Maximum der Weltbevölkerung: rund ____________________ Milliarden

Kalenderjahr: ____________________

Spezielle Polynomfunktionen vierten Grades* - 2_123, AN3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) 1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Gleichung zur Berechnung der Wendestellen von f auf.

b) 1) Weisen Sie rechnerisch mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f nach, dass auf der senkrechten Achse ein Extrempunkt P des Graphen von f liegt.

Genau einer der Koeffizienten a, b und c ist ausschlaggebend dafür, ob es sich beim ermittelten Extrempunkt P um einen Hochpunkt handelt.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Damit dieser Extrempunkt P ein Hochpunkt ist, muss für den Koeffizienten ______①______ gelten, dass dieser ______②______ ist.

①	
a	☐
b	☐
c	☐

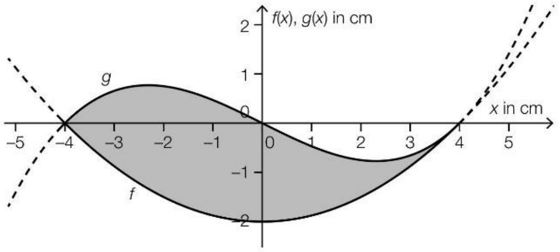
②	
kleiner als 0	☐
gleich 1	☐
größer als 0	☐

c) Gegeben ist eine Polynomfunktion g mit $g(x) = d \cdot (x + e)^2 \cdot (x - e)^2$ mit $d \neq 0$ und $e \in \mathbb{R}$.
Der Graph von g verläuft durch den Punkt $N = (2|0)$.

1) Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle möglichen Werte von e.

Firmenlogos* (a) - 2_117, AN1.3, Offenes Antwortformat

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Firmenlogo grau markiert dargestellt.



Die untere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion f beschrieben:
$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 2$

Die obere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion g beschrieben:
$g(x) = a \cdot (x^3 - 16 \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

An der Stelle $x = 4$ haben f und g die gleiche Steigung.

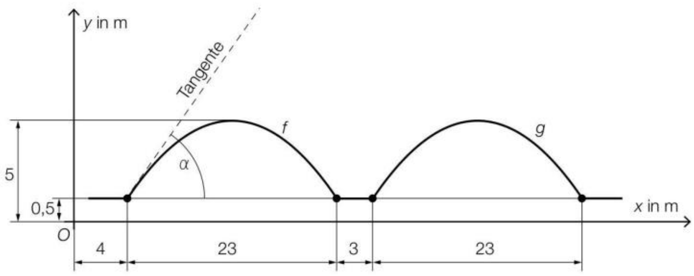
1) Berechnen Sie den Parameter a.

Der Punkt $(0|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

2) Begründen Sie, warum der Graph der Funktion g keinen weiteren Wendepunkt haben kann.

Pferdesport * (B_578)

b) In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung *Schlangenlinie an der langen Seite* modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Dieser Weg kann durch 3 Geradenstücke und die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.
2) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung dargestellten Winkel α.

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f.

3) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von g an. *[1 aus 5]*

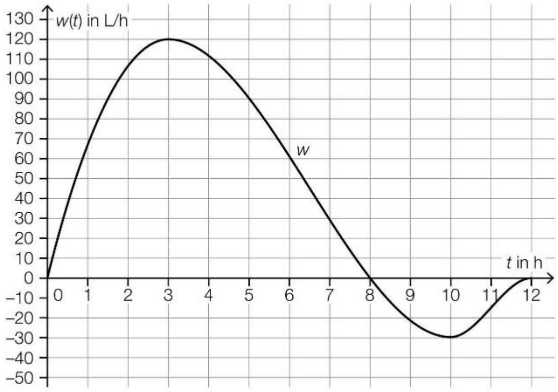
$g(x) = f(x - 30) + 5$	☐
$g(x) = f(x + 30) + 5$	☐
$g(x) = f(x - 26)$	☐
$g(x) = f(x + 26)$	☐
$g(x) = f(x + 27)$	☐

Teich* (2_132)

c) Durch Regen und Verdunstung ändert sich die Wassermenge im Teich.

Die Funktion w: $[0;12] \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt näherungsweise die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $w(t)$ in L/h).

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von w dargestellt.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen jeweils das passende größtmögliche Zeitintervall aus A bis F zu.

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

Kompensationsprüfungsaufgaben

BHS Jänner 2022 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

b) Die Schaumhöhe in Abhängigkeit von der Zeit t für die Biersorte B lässt sich näherungsweise durch die nachstehende Funktion h beschreiben.

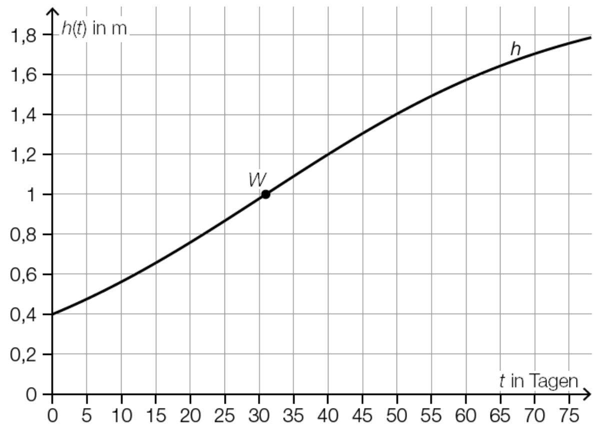
$h(t) = 6 \cdot 0{,}81^t$

t ... Zeit nach Versuchsbeginn in min
$h(t)$ ... Schaumhöhe zur Zeit t in cm

1) Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Versuchsbeginn die Schaumhöhe mit einer Geschwindigkeit von 1 cm/min abnimmt.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Höhe einer bestimmten Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch den Graphen der Funktion h modellhaft dargestellt.



Die Funktion h hat den Wendepunkt $W = (31\,|\,1)$.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung der Tangente im Wendepunkt.
2) Interpretieren Sie die Steigung der Tangente im Wendepunkt im gegebenen Sachzusammenhang.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 3

a) Der Ammoniumgehalt in einem bestimmten Klärbecken kann näherungsweise durch die Funktion c beschrieben werden.

$c(t) = 24 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 4 \quad \text{mit} \quad t \geq 0$

t ... Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden
$c(t)$ ... Ammoniumgehalt zur Zeit t in mg/L

1) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Funktion c zur Zeit $t = 0$.
2) Begründen Sie mathematisch, warum die Funktionswerte der Funktion c immer größer als 4 sind.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 4 Aufgabe 2

b) Für die Funktion g gilt:

$g(x) = \frac{1}{4608} \cdot x^3 - \frac{1}{288} \cdot x^2 - \frac{5}{24} \cdot x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 40$
x, $g(x)$ ... Koordinaten in m

2) Zeigen Sie, dass das Gefälle der Funktion g im gesamten Intervall [0; 24] kleiner als 15° ist.

BHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 2

In einem bestimmten Schmerzmittel ist der Wirkstoff *Acetylsalicylsäure* enthalten.
Die Wirkstoffmenge im Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach der Einnahme einer Tablette dieses Schmerzmittels kann durch die nachstehende Funktion m modelliert werden.

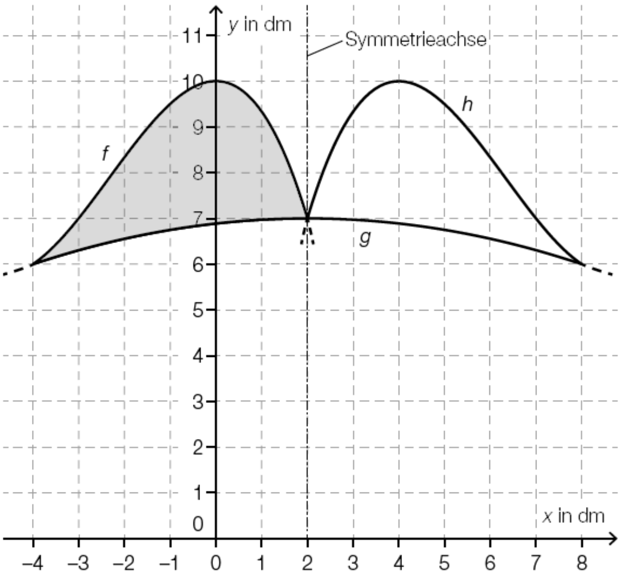
$m(t) = 250 \cdot (1 - e^{-0,05 \cdot t}) - 0,5 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 450$

t ... Zeit nach der Einnahme in min
$m(t)$ ... Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg

a) 1) Ermitteln Sie die maximale Wirkstoffmenge im Blut.

b) 1) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Tangente an m auf, deren Steigung –0,49 beträgt.

BHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 2



– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel α, für den gilt:
$\alpha = 2 \cdot (90° - \arctan(h'(2)))$ (R)

AHS Jänner 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

In einem Labor wird eine Probe mit Bakterien untersucht.

Die Anzahl der Bakterien beträgt zu Beobachtungsbeginn 1 200.
Nach 6 Tagen beträgt die Anzahl der Bakterien 1 800.

b) Die zeitliche Entwicklung der Anzahl dieser Bakterien wird in einem anderen Modell durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Beobachtungsbeginn
$g(t)$ ... Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t

1) Tragen Sie jeweils das fehlende Zeichen (<, > oder =) in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$g'(t) \; \square \; g'(t+1)$

$g''(t) \; \square \; 0$

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

c) Für ein bestimmtes x_0 gilt:

$E'(x_0) = 0$
$E''(x_0) < 0$

x ... verkaufte Spielgeräte in ME
$E(x)$ ... Erlös bei x verkauften Spielgeräten in GE

1) Interpretieren Sie die Bedeutung von x_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 2

b) Die Anschaffungskosten in Abhängigkeit von der Zeit t können in einem einfachen Modell durch die Polynomfunktion 3. Grades K beschrieben werden.

$K(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2010
$K(t)$ … Anschaffungskosten zur Zeit t in \$

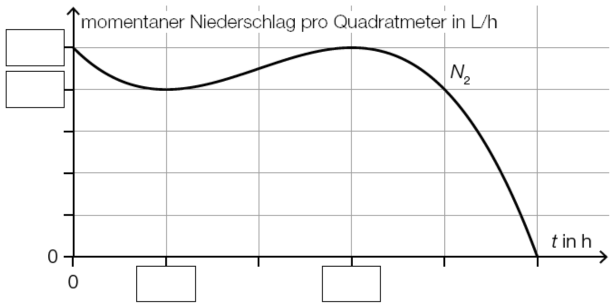
1) Begründen Sie mithilfe der 2. Ableitung der Funktion K, warum die Funktion K genau 1 Wendestelle hat.

BHS Jänner 2024 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

c) Auch in einer benachbarten Gemeinde wurde der momentane Niederschlag pro Quadratmeter gemessen.
Mithilfe der gemessenen Werte wurde der Graph der Polynomfunktion 3. Grades N_2 erstellt.

- $t_w = 1$ ist die Wendestelle der Funktion N_2.
- An der Minimumstelle t_m der Funktion N_2 gilt: $f(t_m) = 32$ und $f'(t_m) = 0$

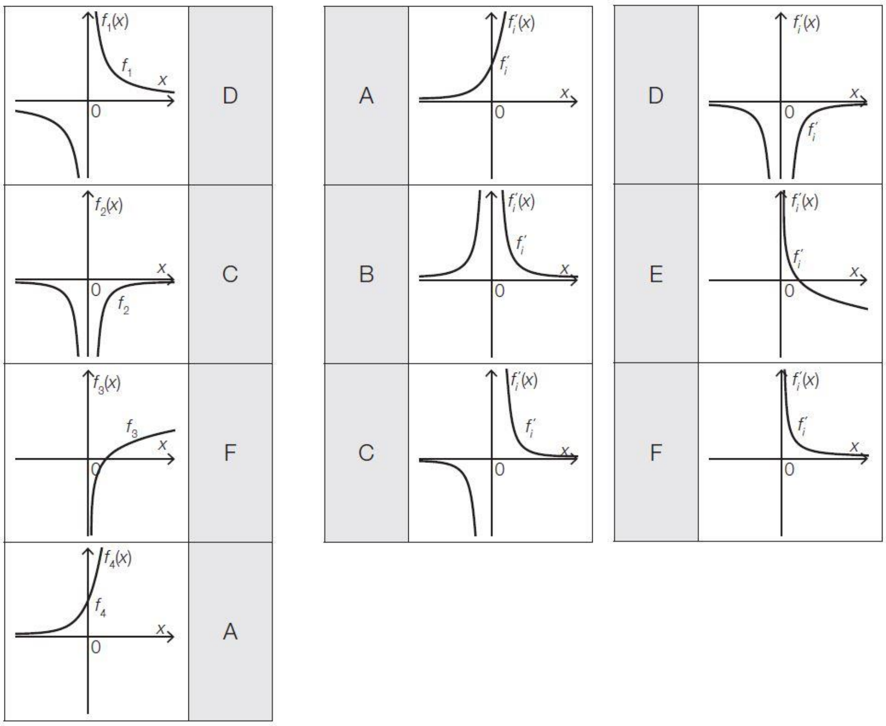
1) Tragen Sie in der nachstehenden Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Lösungen

Grundkompetenzen

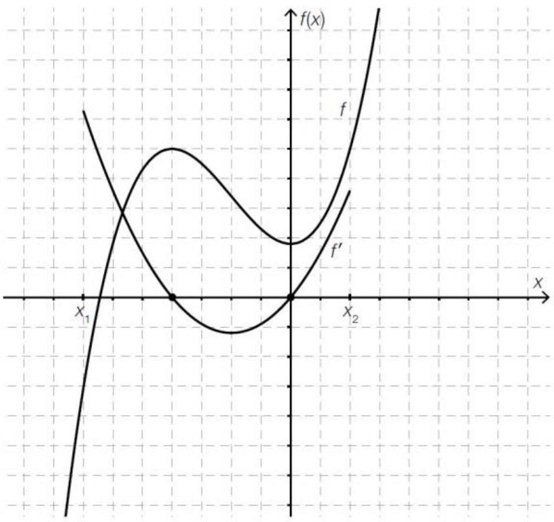
Lösungserwartung: Graphen von Ableitungsfunktionen* - 1_749, AN3.3, 2 aus 5



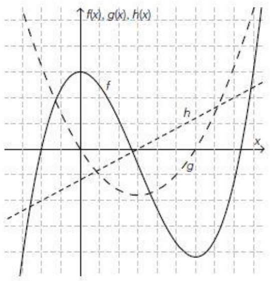
Lösungserwartung: Differenzieren einer Exponentialfunktion* - 1_581, AN3.3, 2 aus 5

$\lambda = -0,5$

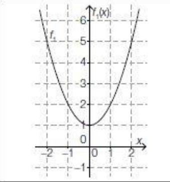
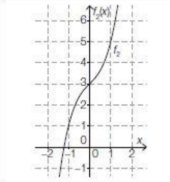
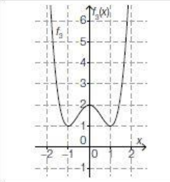
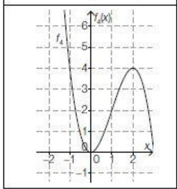
Lösungserwartung: Grafisch differenzieren* - 1_549, AN3.3, 2 aus 5

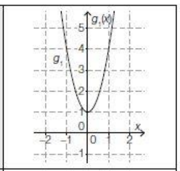
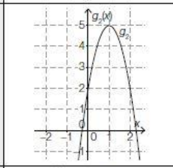
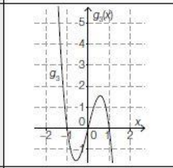
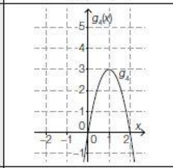
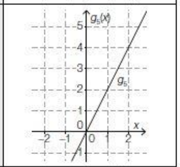
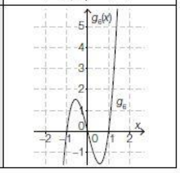


Lösungserwartung: Graphen von Ableitungsfunktionen* - 1_503, AN3.3, 2 aus 5

	⊠		

Lösungserwartung: Funktionen und Ableitungsfunktionen* - 1_479, AN3.3, 2 aus 5

	E
	A
	F
	D

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungserwartung: Ableitung* - 1_358, AN3.3, 2 aus 5

An den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ hat f lokale Extrema.

Lösungserwartung: Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades* - 1_455, AN3.3, 2 aus 5

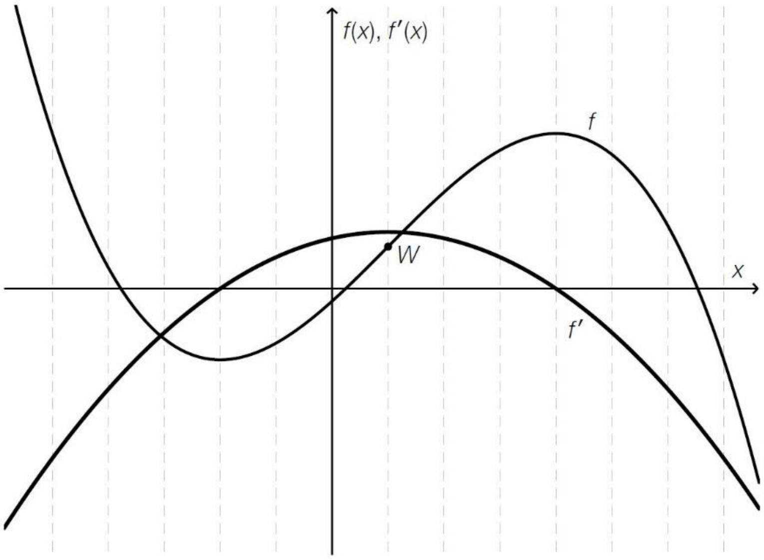
Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	☒
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☒

Lösungserwartung: Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion* - 1_406, AN3.3, 2 aus 5

①	
im Intervall [–1; 1] positiv	☒

②	
f ist im Intervall [–1; 1] streng monoton steigend	☒

Lösungserwartung: Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_383, AN3.3, 2 aus 5



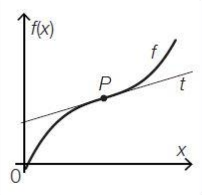
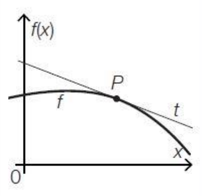
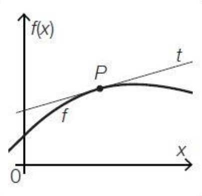
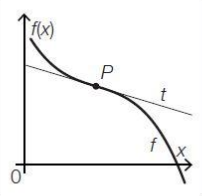
Lösungserwartung: Funktionseigenschaften* - 1_846, AN3.3, 2 aus 5

Im Intervall [–3; 3] ist die Funktion f streng monoton steigend.	☒
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine Wendestelle.	☒

Lösungserwartung: Polynomfunktion* - 1_798, AN3.3, 2 aus 5

Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$.	☒
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) > 0$ und $f''(x_1) = 0$.	☒

Lösungserwartung: Kurvenverlauf* - 1_774, AN3.3, 2 aus 5

	E
	D
	B
	F

A	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) > 0$
B	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) < 0$
C	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) > 0$
D	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) < 0$
E	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) = 0$
F	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) = 0$

Lösungserwartung: Eigenschaften einer Polynomfunktion* - 1_750, AN3.3, 2 aus 5

①	
$f'(x) < 0$	☒

②	
streng monoton fallend	☒

Lösungserwartung: Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_725, AN3.3, 2 aus 5

$f(x_1) > f(x_2)$	☒
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☒

Lösungserwartung: Polynomfunktion* - 1_702, AN3.3, 2 aus 5

$f''(3) = 0$	☒
$f''(1) > f''(4)$	☒

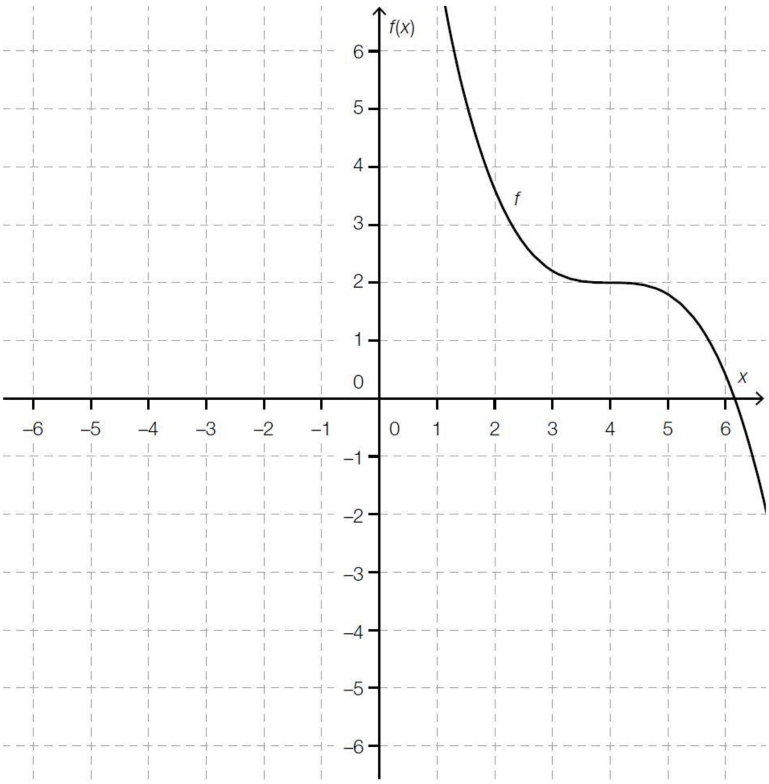
Lösungserwartung: Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_677, AN3.3, 2 aus 5

$f''(1) > 0$	☒
$f'(2) = 0$	☒

Lösungserwartung: Zweite Ableitung* - 1_653, AN3.3, 2 aus 5

Für alle x aus dem Intervall $[-1; 1]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☒
$f''(2) = 0$	☒

Lösungserwartung: Funktionsgraph* - 1_630, AN3.3, 2 aus 5



Lösungserwartung: Steigung einer Funktion - 1_036, AN3.3, 2 aus 5

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4$

$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 13$

Der Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$ ist 13.

Lösungserwartung: Wendestelle* - 1_605, AN3.3, 2 aus 5

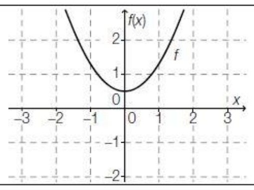
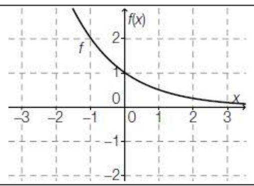
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle.

Mögliche Begründung:
$f''(x) = 24 \cdot x - 4$
$f''(6) = 140 \neq 0 \Rightarrow$ Die Funktion f kann an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle haben.

Lösungserwartung: Lokale Extremstellen* - 1_454, AN3.3, 2 aus 5

Die Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sind lokale Extremstellen der Funktion f.

Lösungserwartung: Eigenschaften der zweiten Ableitung* - 1_526, AN3.3, 2 aus 5

	☒
	☒

Lösungserwartung: Negative erste Ableitung* - 1_382, AN3.3, 2 aus 5

$I = (-3; 4)$

oder:

$I = [-3; 4)$

Lösungserwartung: Differenzierbare Funktion* - 1_502, AN3.3, 2 aus 5

$f''(6) = 0$	☒
$f''(11) < 0$	☒

Lösungserwartung: Nachweis eines lokalen Minimums* - 1_478, AN3.3, 2 aus 5

Möglicher rechnerischer Nachweis:

$p''(x) = 6x$
$p''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle 1 liegt ein lokales Minimum vor.

Lösungserwartung: Extremstelle* - 1_357, AN3.3, 2 aus 5

Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☒
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☒

Lösungserwartung: Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_430, AN3.3, 2 aus 5

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☒

Lösungserwartung: Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_405, AN3.3, 2 aus 5

Die Funktion f hat im Intervall $[-4; 5]$ zwei lokale Extremstellen.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.	☒

Lösungserwartung: Eigenschaften einer Funktion* - 1_334, AN3.3, 2 aus 5

Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0\|f(0))$ hat die Steigung 2.	☒
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f.	☒

Lösungserwartung: Polynomfunktion dritten Grades* - 1_1195, AN4.3, 2 aus 5

Die Funktion f ist im Intervall $(1; 3)$ streng monoton fallend.	☒
Die Funktion f weist im Intervall $(0; 2)$ einen Monotoniewechsel auf.	☒

Lösungserwartung: Regeln des Differenzierens* - 1_1193, AN4.3, 2 aus 5

$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	☒
$a^2 \cdot (f + g)'$	☒

Lösungserwartung: Monotonie- und Krümmungsverhalten* - 1_893, AN4.3, 2 aus 5

Im Intervall $(x_1; x_2)$ gibt es mindestens eine Stelle x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.	☒
Im Intervall $(x_1; x_2)$ ändert sich das Monotonieverhalten von f.	☒

Lösungserwartung: Traubensaft* - 1_891, AN4.3, 2 aus 5

Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☒
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☒

Lösungserwartung: Ableitungs- und Stammfunktion* - 1_1235, AN1.3, 1 aus 6

①	
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ streng monoton fallend	☒

②	
haben an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente	☒

Lösungserwartung: Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_1236, AN1.3, 1 aus 6

f' hat an der Stelle x_1 den gleichen Wert wie an der Stelle x_2.	☒
f' hat an der Stelle $x = 4$ einen positiven Wert.	☒

Lösungserwartung: Erste Ableitung* - 1_1234, AN1.3, 1 aus 6

$g'(0) = 2 \cdot a \cdot k$

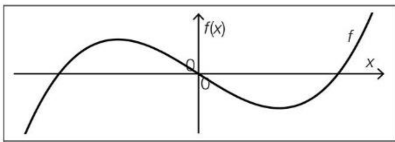
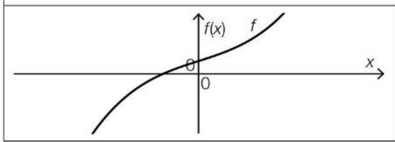
oder:

$g'(0) = f'(0) \cdot a \cdot k$

Lösungserwartung: Ableitungsregeln* - 1_1258, AN3.2, 2 aus 5

Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) - h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) - h'(x)$	☒
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot g'(x)$	☒

Lösungserwartung: Zweite Ableitung* - 1_1260, AN3.2, 2 aus 5

<table>
<tr><td>
</td><td>☒</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>☒</td></tr>
</table>

Lösung: Punkte auf einem Graphen* (1_1284)

0	C
x_1	F
x_2	A
x_3	B

A	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung negativ.
B	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung negativ.
C	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung positiv.
D	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung positiv.
E	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung gleich null.
F	An dieser Stelle ist die erste Ableitung positiv und die zweite Ableitung gleich null.

Lösung: Eigenschaften einer Polynomfunktion* (1_1308)

Es gibt genau ein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☒

Lösung: Graph einer Ableitungsfunktion* (1_1331)

f ist im Intervall [2; 3] linksgekrümmt (positiv gekrümmt).	☒
f hat genau 2 Wendestellen.	☒

Lösung: Polynomfunktion dritten Grades* (1_1332)

①	
Wendestelle	☒

②	
Extremstelle	☒

Rookie Level

Fussballspielen im Park * (A_250) Lösung

a) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \Rightarrow x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

$h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \Rightarrow x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04... \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

Kraftstoffverbrauch (B_176) Lösung

b) $K'(v) = 0{,}01 \cdot v - 0{,}4 = 0$
$v = 40$
$K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.

Rollladen (B_013) Lösung

b) Stelle der maximalen Steigung:
$g(x) = -6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 9{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 8{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot x$
$g''(x) = -3{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot x + 1{,}875 \cdot 10^{-2}$
$g''(x) = 0 \Rightarrow x = 50$

Der Funktionsgraph g hat bei $x = 50$ mm die maximale Steigung.

Simulation eines Golfballflugs (A_026) Lösung

b) Um den Winkel zu ermitteln, unter dem der Ball in den Teich eintaucht, sind folgende Schritte notwendig:

1. Eintauchstelle x_E ermitteln: $h(x_E) = 0$, $x_E \neq 0$
2. Steigung der Funktion an der Stelle x_E ermitteln: $k = h'(x_E)$
3. Eintauchwinkel α ermitteln: $\tan \alpha = k \Rightarrow \alpha = \arctan k$

(Hinweis: Auch andere, analoge Lösungswege sind zulässig.)

c) Ermittlung des Maximums:

$h'(x) = -\frac{x^2}{72\,000} + \frac{1}{5}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 120$

$h(120) = 16 \Rightarrow M = (120|16)$

Der höchste Punkt der Flugbahn ist der Punkt $M = (120|16)$. Der Golfball erreicht seine maximale Flughöhe von 16 m in einer waagrechten Entfernung von 120 m vom Abschlag.

d) $h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, ihre 1. Ableitung $h'(x)$ ist daher eine quadratische Funktion. Die Gleichung $h'(x) = 0$ hat höchstens 2 Lösungen, es gibt also maximal 2 lokale Extremwerte. Nur einer davon kann – da $h(x)$ stetig ist – ein Maximum sein.

(Auch andere Argumentationen sind möglich, z. B.:
$h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, mit maximal 3 Nullstellen, also höchstens einem lokalen Maximum.)

Riesenpizza * (A_238) Lösung

c) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \;\Rightarrow\; d = 25$

Die Pizza mit dem geringsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

$P(25) = 0{,}0744$
$P(25) \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi = 36{,}521\ldots$

Gemäß diesem Modell kostet diese Pizza 36,52 US-Dollar.

Bevoelkerungsentwicklung * (A_218) Lösung

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

Puppenrutsche * (B_373) Lösung

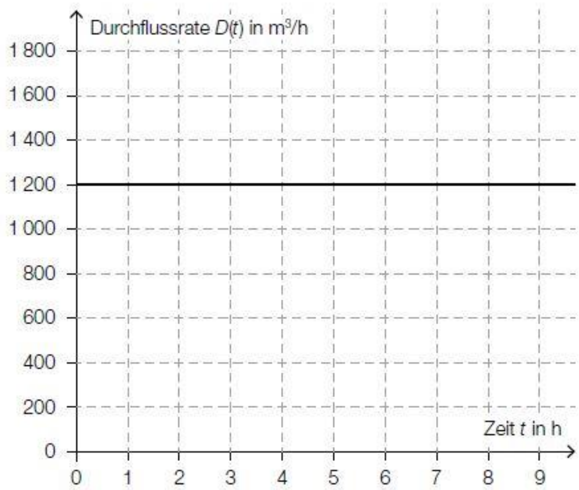
b1) Berechnung der Wendestelle:
Lösen der Gleichung: $g''(x_0) = 0$
$x_0 = 6$ cm

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Die Extremstellen der Polynomfunktion 3. Grades entsprechen den Nullstellen der 1. Ableitung. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann die Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben.

Die Adria-Wien-Pipeline* (A_280) Lösung

c1) $R(t) = 1\,200 \cdot t$

c2)



Epidemie * (A_255) Lösung

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ±5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

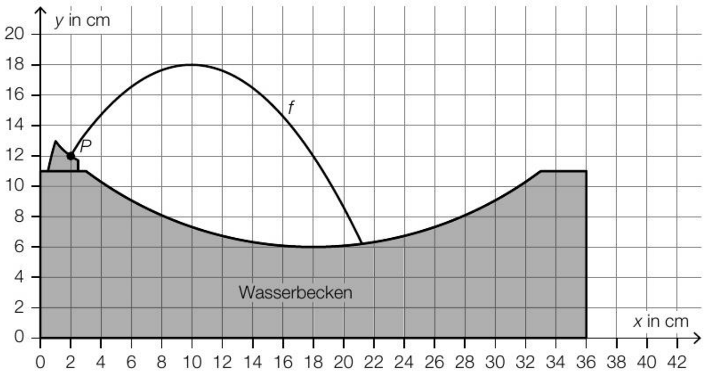
Sauna * (A_297) Lösung

a1)

Graph 4	☒

Trinkwasser * (A_311) Lösung

c1)



Der Graph der quadratischen Funktion muss durch den Punkt P *verlaufen und an der Stelle* x = *10 ein lokales Maximum haben.*

Buchsbaeume * (A_186) Lösung

b) Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums: $g''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}16... \approx 6{,}2$

Etwa 6,2 Jahre nach der Auspflanzung ist das Höhenwachstum am größten.

Mit dem Ausdruck $g(5) - g(0)$ wird der (absolute) Höhenzuwachs in cm in den ersten 5 Jahren nach der Auspflanzung berechnet.

Gartensauna * (A_328) Lösung

c1) $h'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0828 \cdot x^3 + 0{,}795 \cdot x^2 - 2{,}28 \cdot x + 1{,}8 = 0$

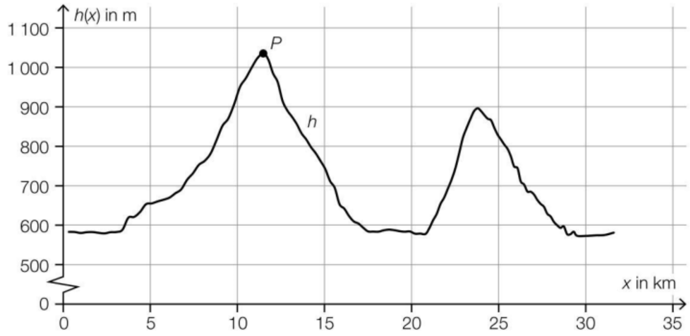
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 1{,}29...$ $x_2 = 3{,}46...$ $x_3 = 4{,}84...$

Wegen $h''(x_P) > 0$ handelt es sich bei x_P um eine lokale Minimumstelle.
Aus der Abbildung ist daher ersichtlich: $x_P = x_2 = 3{,}46...$

Lösung: Straßenrad-WM * (A_340)

b1)



Pro Level

Flusslaeufe und Pegelstaende * (A_266) Lösung

a) Berechnung des Hochpunkts H von p im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$p'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (110{,}52...\,|\,9{,}41...)$
Abweichung: $9{,}41... - 2{,}5 = 6{,}91...$
Die Abweichung betrug rund 6,9 m.

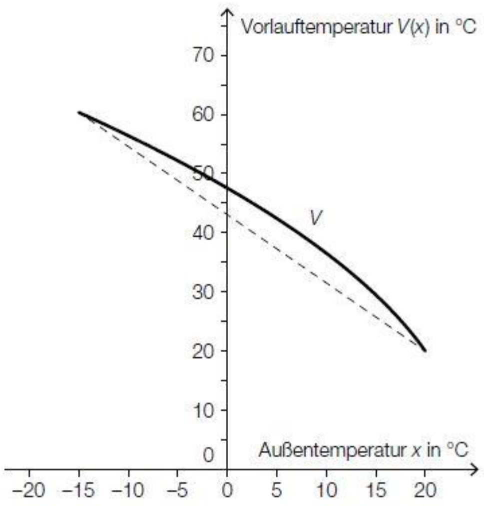
Zur Zeit t_1 ist der Pegelstand am stärksten gestiegen.

Pelletsheizung * (A_068) Lösung

b1)

$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☒

b2)



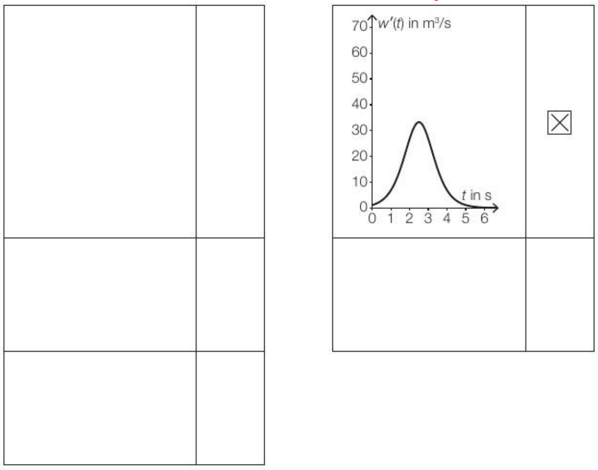
b3) Die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C ist um rund 5 °C geringer.
Toleranzbereich: [3,5 °C; 6,5 °C]

Fressverhalten von Furchenwalen * (A_288) Lösung

b1) Berechnung des Hochpunkts H von m im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$m'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (3\,|\,8{,}1)$

Die maximale Größe der Maulöffnung beträgt 8,1 m^2.

c1)



Boule * (B_444) Lösung

a1) Die Abwurfhöhe beträgt 1,1 m.

a2) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -1{,}241...$)
$x_2 = 9{,}239...$

Die Wurfweite w beträgt rund 9,24 m.

a3) $\alpha = |\arctan(f'(9{,}239...))| = 45{,}1...°$

Der Aufprallwinkel α liegt also nicht im gegebenen Intervall.

Pflanzenwachstum * (A_292) Lösung

a1) mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag: $\frac{6}{20} = 0{,}3$

a2)

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	D
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	A

A	f
B	g
C	h
D	p

Kuehe auf der Weide * (A_141) Lösung

c1) $h(t) = 115$

oder:

$0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73 = 115$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 10{,}50...$

Im Alter von rund 10,5 Monaten wird gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht.

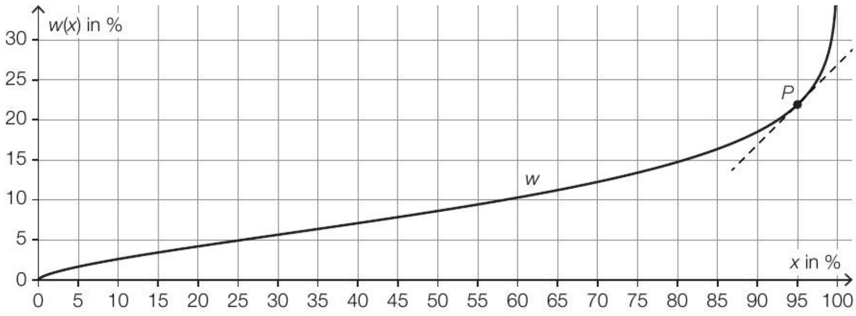
c2) $h''(t) = 0{,}0144 \cdot t - 0{,}38$

h'' ist eine steigende lineare Funktion mit der Nullstelle $t_0 = 26{,}38...$
Für alle $t < t_0$ ist $h''(t)$ negativ. Der Graph von h ist daher für alle $t < t_0$ (und somit insbesondere für alle $t \in [1; 24]$) negativ gekrümmt.

c3) Die Widerristhöhe nimmt im Alter von 12 Monaten um rund 2,2 cm/Monat zu.

Holzfeuchte und Holztrocknung * (A_307) Lösung

c1)



Toleranzbereich für x_0: [92; 97]

c2) $f(x) = k \cdot x + d$
x ... relative Luftfeuchtigkeit in %
$f(x)$ ... Wassergehalt von Holz dieser Holzsorte bei der relativen Luftfeuchtigkeit x in %

$k = \frac{9{,}4 - 7{,}8}{55 - 45} = 0{,}16$

$d = 7{,}8 - 0{,}16 \cdot 45 = 0{,}6$

$f(x) = 0{,}16 \cdot x + 0{,}6$

Ressourcen * (B_512) Lösung

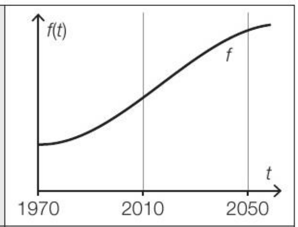
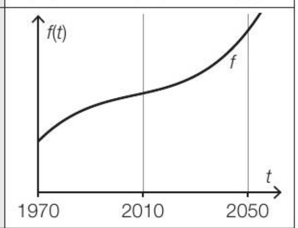
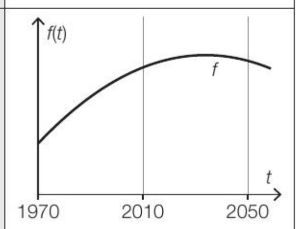
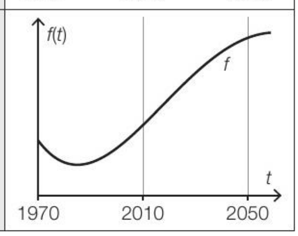
b1)

①	
genau 1 Stelle	☒

②	
$g'(t) = h'(t)$	☒

c1)

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	B
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	C

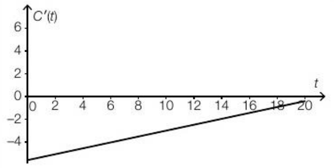
A	
B	
C	
D	

Papier * (A_316) Lösung

d1) $|C(10) - C(0)| \approx 43$ Millionen Tonnen pro Jahr

Toleranzbereich: [40; 46]

d2)

	☒

Lösungserwartung: Koffein* (c) - 2_101, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

a1) 36 min

a2)

①	
eine Extremstelle	☒

②	
Steigung	☒

Holzzug * (B_560) Lösung

b1)

Polynomfunktion 4. Grades	☒

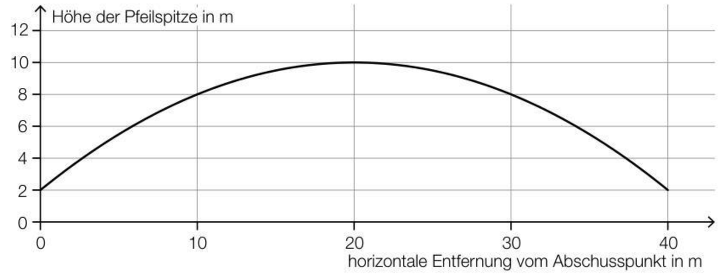
b2) Anzahl der Stellen: 2

Mit Pfeil und Bogen * (A_323) Lösung

a1) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$f'(0) = \tan(45°)$
$b = 1$

a2) $H = 2$ m

a3)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass der Graph der quadratischen Funktion durch die Punkte $(0|2)$, $(20|10)$ *und* $(40|2)$ *verläuft.*

Lösung: Schwimmbecken* (2_125)

c1) $f''(x) = 0$
$x_1 = 2{,}5$

Lösung: Ruderboot * (A_343)

b1) $f''(x) = 0$ *oder* $9{,}6 \cdot x - 4{,}8 = 0$
$x = 0{,}5$
$s = 2 \cdot 0{,}5 \text{ m} = 1 \text{ m}$

All Star Level

Leistung einer Solaranlage * (A_212) Lösung

a) $P'(6) = 0$

$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$

$a = \frac{14}{9}$

Ortsumfahrung (A_013) Lösung

a) Anstieg der Geraden g durch S und W: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $k = -1$

Gleichung der Geraden: $g(x) = -x + 4$

Die Steigungen (der Tangenten) von f in den Punkten W ($x = 0$) und S ($x = 4$) erhält man über die 1. Ableitung:

$f'(x) = -0{,}25 \cdot x^3 + 1{,}5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1$
$f'(0) = -1$ und $f'(4) = -1$

Der Anstieg ist in beiden Punkten gleich, nämlich $k = -1$.
Die Punkte $(0|4)$ und $(4|0)$ liegen auf den Graphen von f und g, daher gilt:

Die Tangente in beiden Punkten hat die Gleichung $y = -x + 4$ und dies entspricht der Geraden $g(x)$, die die alte Straßenführung beschreibt.

Durchhaengende Kette (A_214) Lösung

b) Der Steigungswinkel am Punkt B ist $\arctan(f'(1))$.
$f'(x) = e^x - e^{-x}$
$f'(1) = 2{,}350\ldots$, Steigungswinkel $= \arctan(2{,}350\ldots) = 66{,}952\ldots°$
$\alpha = 180° - 90° - 66{,}952\ldots° = 23{,}047\ldots° \approx 23{,}05°$

Schwangerschaft * (B_322) Lösung

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Bastelarbeit im Kindergarten * (B_336) Lösung

c1) Der Tiefpunkt $(0|1)$ von g kann der Abbildung entnommen werden: $g(0) = 1$.

Berechnung der Maximumstellen von f:
$f'(x) = -2 \cdot x^3 + 3{,}6 \cdot x$

Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$:
$x_1 = 0$ (Minimumstelle)
$x_{2,3} = \pm\sqrt{1{,}8}$ (Maximumstellen)

Mindestabmessung in cm: $f(\sqrt{1{,}8}) - g(0) = \frac{281}{50} = 5{,}62$
Die andere Seite der Grundfläche muss mindestens 5,62 cm lang sein.

Skatepark (1) * (A_194) Lösung

b) Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat:

$\tan(30°) = f'(x)$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{160} \cdot x \;\Rightarrow\; x = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{80}{3} \approx 26{,}7$

Die Rampe hat in einer Höhe von rund 26,7 cm einen Steigungswinkel von 30°.

Vitamin C * (A_281) Lösung

c1) $c'(t) = 0$ *oder* $24 \cdot (-0{,}0195 \cdot e^{-0{,}0195 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3{,}279...$

$c(3{,}279...) = 25{,}175...$

Die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut dieser Person beträgt also rund 25,18 µg/ml.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, sowie eine Überprüfung von Randstellen sind für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c2)

25,18 mg/L	☒

Nemo (B_364) Lösung

a) $y_o'(x) = \frac{33}{256} \cdot x^2 - \frac{33}{32} \cdot x + 1$ und $y_u'(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$k_1 = y_o'(4) = -\frac{17}{16} = 1{,}0625$ und $k_2 = y_u'(4) = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\alpha_1 = \arctan(k_1) = -46{,}735...°$ und $\alpha_2 = \arctan(k_2) = 51{,}340...°$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 98{,}075...° \approx 98{,}08°$

b) $t(x) = k \cdot x + d$

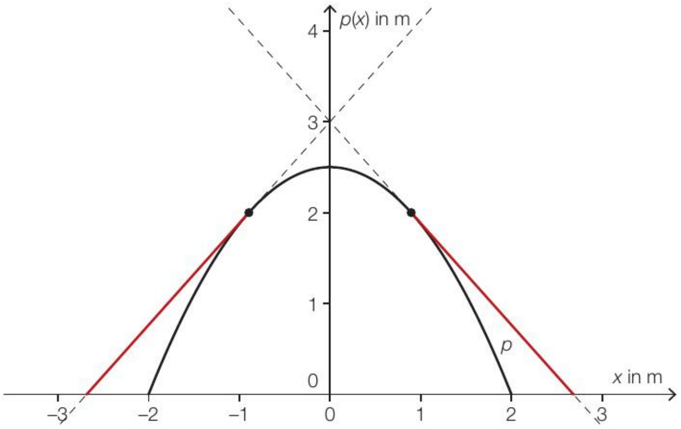
$k = y_o'(1{,}5) = -\frac{263}{1024}$

$t(1{,}5) = y_o(1{,}5) \;\Rightarrow\; -\frac{263}{1024} \cdot 1{,}5 + d = \frac{4065}{2048} \;\Rightarrow\; d = \frac{2427}{1024}$

$t(x) = -\frac{263}{1024} \cdot x + \frac{2427}{1024} \approx -0{,}26 \cdot x + 2{,}37$

Tunnelzelte (A_131) Lösung

d)



Es wurde die Kettenregel angewendet („äußere Ableitung × innere Ableitung“).
Der Faktor (–1) ist die Ableitung der inneren Funktion: $(-x)' = -1$

Gruenbruecken * (B_495) Lösung

a1) $a = 10$

a2) $f(20) = 6$ *oder* $6 = 10 \cdot e^{-400 \cdot b}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$b = 0{,}001277...$

a3) $f''(x) = 0$ *oder* $-2 \cdot a \cdot b \cdot e^{-b \cdot x^2} \cdot (1 - 2 \cdot b \cdot x^2) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = -19{,}78...;$ $x_2 = 19{,}78...$

Die Steigung von f ist an der Stelle $x \approx -19{,}8$ m am größten.

Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 \approx -19{,}8$ *die Lösung* $x_2 \approx 19{,}8$ *angegeben ist.*

Carport * (B_522) Lösung

a1) $h(x) = a \cdot \sqrt{x + 1} - 0{,}5$

a2) $-1{,}62 = b \cdot \sqrt{0{,}4}$
$b = -2{,}561...$

a3)

$f'(0{,}1) = h'(-0{,}9)$	☒

Lösungserwartung: Auslastung von Flügen* (b) - 2_111, AN4.3 FA1.7, Offenes Antwortformat

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507{,}5...$ km
$(V''(3\,507{,}5...) > 0)$

b2) $V(3\,507{,}5...) = 3{,}67...$
$3{,}67... \cdot 271 \cdot 35{,}0... = 34\,934{,}1...$

Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

Lösungserwartung: Weltbevölkerung* (b) - 2_115, AG2.4 AG2.5, Offenes Antwortformat

c1) Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden

Kalenderjahr: 2070

Lösungserwartung: Spezielle Polynomfunktionen vierten Grades* - 2_123, FA1.5, Offenes Antwortformat

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b = 0$

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$f''(0) = 2 \cdot b \neq 0$
$P = (0|y_P)$ ist ein Extrempunkt von f.

b2)

①	
b	☒

②	
kleiner als 0	☒

c1) $e = -2$ bzw. $e = 2$

Lösungserwartung: Firmenlogos* (c) - 2_117, AG4.1, Offenes Antwortformat

a1) $f'(x) = \frac{x}{4}$
$f'(4) = 1$
$g'(x) = a \cdot (3 \cdot x^2 - 16)$
$g'(4) = 32 \cdot a$
$32 \cdot a = 1$
$a = \frac{1}{32}$

a2) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

oder:

Die Funktion g'' ist linear und hat nur 1 Nullstelle.
(Die Funktion g kann also nur 1 Wendepunkt haben.)

Lösung: Pferdesport * (B_578)

b1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(4) = 0{,}5$
$f(15{,}5) = 5$
$f(27) = 0{,}5$

oder:

$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0{,}5$
$a \cdot 15{,}5^2 + b \cdot 15{,}5 + c = 5$
$a \cdot 27^2 + b \cdot 27 + c = 0{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{18}{529} = -0{,}0340...$
$b = \frac{558}{529} = 1{,}0548...$
$c = -\frac{3\,359}{1\,058} = -3{,}1748...$
$f(x) = -0{,}034 \cdot x^2 + 1{,}055 \cdot x - 3{,}175$ *(Koeffizenten gerundet)*

b2) $\alpha = \arctan(f'(4)) = \arctan\left(\frac{18}{23}\right) = 38{,}047...°$

b3)

$g(x) = f(x - 26)$	☒

Lösung: Teich* (2_132)

c1)

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	C
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	A
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	B
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	F

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

Kompensationsprüfungsaufgaben

BHS Jänner 2022 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

b1) $h'(t) = 6 \cdot 0{,}81^t \cdot \ln(0{,}81) = -1$

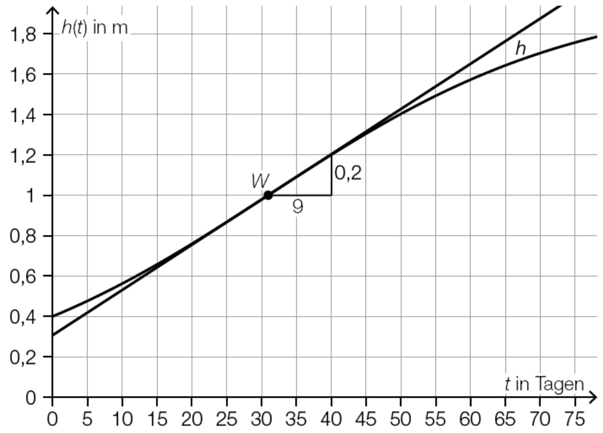
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$t = 1{,}11...$

Etwa 1,1 min nach Versuchsbeginn beträgt die Geschwindigkeit der Abnahme 1 cm/min.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

a1)



Steigung: $\frac{0{,}2}{9} = 0{,}022... \approx 0{,}02$

Toleranzintervall: [0,019; 0,025]

a2) Die Steigung entspricht der maximalen momentanen Änderungsrate der Höhe.

oder:

Die Steigung entspricht der momentanen Änderungsrate der Höhe nach 31 Tagen.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 3

a1) $c'(t) = 24 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} \cdot (-0{,}4)$
$c'(0) = -9{,}6$

Die momentane Änderungsrate beträgt $-9{,}6\ \frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{h}}$.

Die Angabe der Einheit ist für die Punktvergabe nicht relevant.

a2) $24 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$ ist für alle t positiv, und damit sind die Funktionswerte $24 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 4$ immer größer als 4.

BHS Oktober 2021 Kompensationsprüfung 4 Aufgabe 2

b2) Berechnung der Stelle des maximalen Gefälles: $g''(x_W) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_W = \frac{16}{3}$

$\alpha = \arctan\left(g'\left(\frac{16}{3}\right)\right) = -12{,}78...°$

Das maximale Gefälle beträgt rund 12,8° und somit ist das Gefälle im gesamten Intervall kleiner als 15°.

BHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 2

a1) $m'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 64{,}3...$
$m(64{,}3...) = 207{,}8...$
Die maximale Wirkstoffmenge im Blut beträgt rund 208 mg.

b1) Tangente:
$g(t) = k_T \cdot t + d$
$k_T = m'(t) = -0{,}49$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

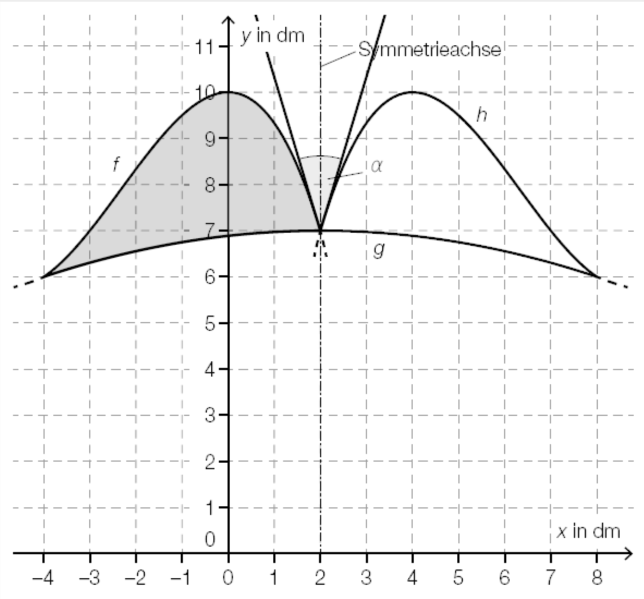
$t = 142{,}61...$

Aufstellen der Tangente an m an der Stelle 142,61... mittels Technologieeinsatz:

$g(t) = -0{,}49 \cdot t + 248{,}4$ *(Koeffizienten gerundet)*

BHS Mai 2020 Kompensationsprüfung 3 Aufgabe 2

(R):



AHS Jänner 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

b1) $g'(t)$ $\boxed{<}$ $g'(t+1)$

$g''(t)$ $\boxed{>}$ 0

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 2

c1) Der maximale Erlös wird bei x_0 (in ME) Spielgeräten erzielt.

BHS Mai 2023 Kompensationsprüfung 2 Aufgabe 2

b1) $K''(t) = 6 \cdot a \cdot t + 2 \cdot b$
Zur Berechnung von Wendestellen werden die Nullstellen von K'' berechnet.
Da K'' eine lineare Funktion ist, gibt es genau 1 Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel) von K'' und somit hat K genau 1 Wendestelle.

BHS Jänner 2024 Kompensationsprüfung 1 Aufgabe 3

c1)