

Aufgabensammlung

Differentialgleichungen

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram [@mathago.at](https://www.instagram.com/mathago.at)

Differentialgleichung

Rookie Level.....	3
Bakterienkultur * (B_049)	3
CO2-Gehalt der Luft * (B_398).....	3
Lichtwellenleiter * (B_379).....	3
Luftdruck_2 (B_052)	4
Solarzelle (B_262)	4
Kondensator * (B_496)	5
Meerwasser und mehr Wasser * (B_509)	5
Bewegung eines Bootes * (B_074)	5
Sandfang einer Klaieranlage * (B_555).....	6
Sedimente * (B_543)	6
Fischzucht * (B_566)	7
Nähmaschine * (B_591)	7
Pro Level	8
Differenzialgleichungen in der Technik (B_426).....	8
Kalt - warm (1) * (B_394).....	9
Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)	9
Newtonsches_Abkuehlungsgesetz (B_077).....	10
Magneten (B_081)	11
Gebaeudetechnik * (B_260)	11
Blut (B_372).....	11
Wein* (B_447)	11
Wirkstoffkonzentration (B_369)	12
Champagner * (B_215).....	12
Elektromagnetische Strahlung * (B_487)	12
Heizungstechnik * (B_579)	13
Sinkgeschwindigkeit von Faessern * (B_536)	13
Pilzkultur * (B_603)	14
All Star Level	15
Lösungen.....	16
Rookie Level	16
Pro Level.....	20
All Star Level.....	27

Rookie Level

Bakterienkultur * (B_049)

- a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N . Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.
- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
 - Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
 - Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
 - Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.

CO₂-Gehalt der Luft * (B_398)

- a) Die Luft in einem geschlossenen Raum mit einem Luftvolumen von 800 m³ hat einen CO₂-Gehalt von 1 100 ppm.
- Ermitteln Sie das CO₂-Volumen (in m³) in diesem Raum.

Eine Lüftungsanlage wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Es strömt nun gleichmäßig Frischluft mit einem CO₂-Gehalt von 400 ppm in den Raum. Die Durchflussrate beträgt dabei 2,5 m³/s. Gleichzeitig wird die durchmischte Luft mit derselben Durchflussrate abgesaugt.

- Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das CO₂-Volumen im Raum in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. $V(t)$ ist dabei das CO₂-Volumen (in m³) zum Zeitpunkt t (in s).

Lichtwellenleiter * (B_379)

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels

$I(x)$... Lichtintensität in der Entfernung x

I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels

λ ... positive Konstante

- a) Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.
- Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).
 - Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

Luftdruck_2 (B_052)

Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p, \quad k > 0$$

p ... Luftdruck in Hektopascal (hPa)

h ... Höhe in Metern (m)

- a) – Erklären Sie, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennung der Variablen* zur allgemeinen Lösung $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$ führt.
- b) Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen:
- in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck $p = 962$ hPa gemessen,
 - auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung $p = 790$ hPa.
- Berechnen Sie mit diesen Angaben und anhand der in Teilaufgabe a angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.

Solarzelle (B_262)

- b) Wenn keine elektrische Energie erzeugt wird, entladen sich die eingebauten Kondensatoren. Der zeitabhängige Spannungsverlauf kann dabei durch eine Exponentialfunktion u_c mit $u_c(t) = u_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschrieben werden.

t ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs in Millisekunden (ms)

$u_c(t)$... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)

u_0 ... Kondensatorspannung zur Zeit $t = 0$

λ ... positiver Parameter

Die Spannung wurde zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten gemessen. Für $t = 0$ ms beträgt die Spannung 10 V und für $t = 20$ ms beträgt die Spannung 5 V.

- Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion u_c , die die Entladung des Kondensators beschreibt.

Der Entladevorgang kann auch durch eine Differenzialgleichung 1. Ordnung beschrieben werden.

- Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, die den Entladevorgang richtig beschreibt. [1 aus 5]

$k > 0$... Proportionalitätsfaktor

$\frac{du_c(t)}{dt} = k \cdot u_c(t)$	<input type="checkbox"/>
$\frac{du_c(t)}{dt} = -k$	<input type="checkbox"/>
$\frac{du_c(t)}{dt} = -k \cdot u_c(t)$	<input type="checkbox"/>
$\frac{du_c(t)}{dt} = k \cdot t$	<input type="checkbox"/>
$\frac{du_c(t)}{dt} = -k \cdot t$	<input type="checkbox"/>

Kondensator * (B_496)

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in s

$u(t)$... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)

U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V

τ ... Zeitkonstante in s

a) Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$$

- 1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
 - 2) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ der oben angegebenen Funktion u entspricht.
- b) 1) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Kondensatorspannung für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen U_0 geht.

Meerwasser und mehr Wasser * (B_509)

a) Die Funktion V beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasservolumens eines bestimmten Sees. Dabei wird das Wasservolumen in Kubikmetern und die Zeit t in Tagen angegeben.

V erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = 0,001 \cdot (350 - V) \text{ mit } V > 0$$

- 1) Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von V das Wasservolumen dieses Sees gemäß diesem Modell zunimmt.
- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Wasservolumen 150 m^3 .

- 3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

Bewegung eines Bootes * (B_074)

a) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

m ... Masse des Bootes

$v > 0$... Geschwindigkeit des Bootes

$k > 0$... Konstante

t ... Zeit

- Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

Sandfang einer Klaieranlage * (B_555)

- c) Die Sinkgeschwindigkeit eines Steinchens in einer Flüssigkeit kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} = g - k \cdot v$$

t ... Zeit

$v(t) \geq 0$... Sinkgeschwindigkeit

g, k ... positive Konstanten

- 1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Die Sinkgeschwindigkeit des Steinchens nähert sich dabei dem Wert v_E .

- 2) Geben Sie v_E an.

$$v_E = \underline{\hspace{2cm}}$$

Die Eigenschaften der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a hängen unter anderem von der Anfangsbedingung ab.

- 3) Ordnen Sie den beiden Anfangsbedingungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.

$v(0) = 0$	
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	

A	v und a sind streng monoton steigend.
B	v ist streng monoton steigend und a ist streng monoton fallend.
C	v und a sind streng monoton fallend.
D	v ist streng monoton fallend und a ist streng monoton steigend.

Sedimente * (B_543)

- a) In einer Flüssigkeit sinkt ein Teilchen durch die Schwerkraft ab. Die Sinkgeschwindigkeit v kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 20 \cdot v$$

t ... Zeit in s

v ... Sinkgeschwindigkeit in m/s

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Differenzialgleichung diejenige Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. [0/1 P.]
- 3) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $v(0) = 0,2$. [0/1 P.]

Fischzucht * (B_566)

- d) Die maximale Anzahl der Fische, die in einem bestimmten Teich leben können, beträgt G . Die Anzahl der Fische zur Zeit t kann näherungsweise durch eine Funktion f beschrieben werden.

Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Fische ist proportional zur Differenz zwischen der maximalen Anzahl der Fische G und der Anzahl der vorhandenen Fische f .

- 1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für f auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k .

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung für eine bestimmte Anfangsbedingung lautet:

$$f(t) = 1000 - 900 \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

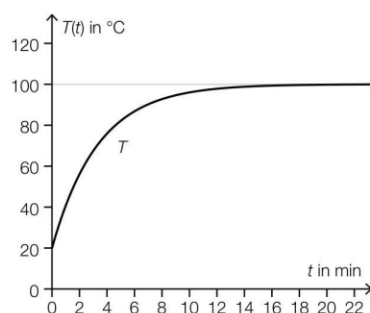
t ... Zeit in Tagen

$f(t)$... Anzahl der Fische zur Zeit t

- 2) Geben Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$ an.
 3) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Anzahl der Fische für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen 1000 geht.

Nähmaschine * (B_591)

- b) Während des Nähens erwärmt sich die Nadel. Die zeitliche Entwicklung der Temperatur der Nadel kann durch die Funktion T modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



$$T(t) = a - b \cdot e^{-k \cdot t}$$

t ... Zeit in min

$T(t)$... Temperatur der Nadel zur Zeit t in °C

a, b, k ... positive Parameter

- 1) Geben Sie die Parameter a und b an.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 2) Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, deren Lösung die oben angegebene Funktion T ist. [1 aus 5]

$\frac{dT}{dt} = k$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dT}{dt} = k \cdot T$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dT}{dt} = k \cdot T - 100$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dT}{dt} = k \cdot (100 - T)$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dT}{dt} = k \cdot 100$	<input type="checkbox"/>

Pro Level

Differentialgleichungen in der Technik (B_426)

- a) Unter bestimmten Bedingungen kann die Geschwindigkeit eines Körpers in einer Flüssigkeit durch die Differentialgleichung $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$ beschrieben werden.

t ... Zeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

a, b ... Konstanten

- Geben Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung an.
- Ermitteln Sie die Konstante b , wenn die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet: $v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$

C ... Konstante

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung:

$$v(t) = 5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

- Ermitteln Sie die Konstante a .
- Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung.

- b) Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für einen dieser Stoffe kann die vorhandene Masse näherungsweise durch die Differentialgleichung $\frac{dm}{dt} = 8 - 2 \cdot m$ beschrieben werden.

t ... Zeit in s

$m(t)$... Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

Eine Lösung dieser Differentialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

- Ordnen Sie den beiden Aussagen korrekt zu. [2 zu 4]

Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differentialgleichung ...		A	... asymptotisch der t -Achse.
		B	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 8.
Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung dieser Differentialgleichung ...		C	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 4.
		D	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt -2.

- c) Die Anzahl von Bakterien in einer Nährlösung kann in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Differenzialgleichung $\frac{dN}{dt} + b \cdot N = a$ beschrieben werden.

t ... Zeit in h

$N(t)$... Anzahl der Bakterien zur Zeit t in Millionen

a, b ... Konstanten

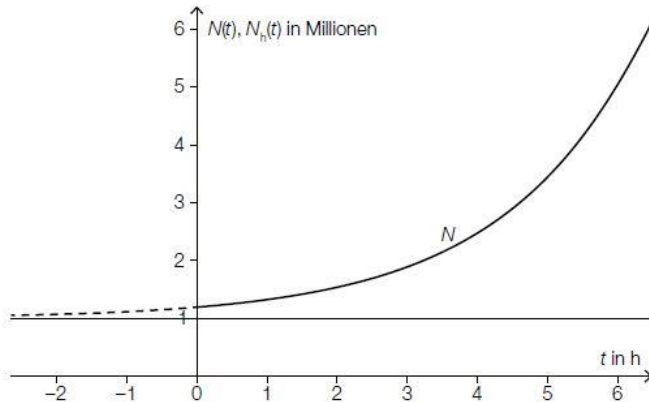
Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $N(t) = N_h(t) + N_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:

$N(t)$... Lösung der Differenzialgleichung

$N_h(t)$... Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung

$N_p(t)$... (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

Die nachstehende Abbildung zeigt für bestimmte Werte von a und b den Graphen von N :



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen von N_h .

Kalt - warm (1) * (B_394)

- c) Folgende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U) \quad \text{mit } T > T_U$$

t ... Zeit

T ... Temperatur

T_U ... Umgebungstemperatur (konstant)

k ... Konstante

Dabei nähert sich die Temperatur T des abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur T_U .

- Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, welches Vorzeichen k haben muss.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
- Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $T(0) = T_0$.

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)

- d) Das Absinken der Sauerstoffaufnahme nach Beendigung einer körperlichen Belastung beim Sport kann mit der folgenden Differenzialgleichung beschrieben werden:

$$\frac{dy}{dt} = -1,386 \cdot (y - 0,3)$$

t ... Zeit nach Beendigung der körperlichen Belastung in Minuten (min)

$y(t)$... Sauerstoffaufnahme zur Zeit t in Litern pro Minute (L/min)

- Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Newton'sches Abkühlungsgesetz (B_077)

Das Newton'sche Abkühlungsgesetz besagt, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur eines Körpers proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zur Zeit t und der Umgebungstemperatur ist.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t ... Zeit in Minuten (min)

$T(t)$... Temperatur des Körpers zur Zeit t in °C

T_U ... Umgebungstemperatur in °C

$k > 0$... Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

- a) Ein Thermometer wird aus einem Raum ins Freie gebracht, wo es eine Temperatur von $T_U = -10$ °C hat. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für $k = 0,84 \text{ min}^{-1}$ lautet:

$$T(t) = -10 - C \cdot e^{-0,84 \cdot t}$$

– Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

Der Raum, aus dem das Thermometer ins Freie gebracht wird, hat eine Temperatur von 22 °C. Zu Beginn ($t = 0$) zeigt das Thermometer also eine Temperatur von 22 °C an.

- Ermitteln Sie für diesen Sachzusammenhang eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung.
- Stellen Sie den Funktionsgraphen dieser speziellen Lösung in einem Koordinatensystem für $0 \text{ min} \leq t \leq 5 \text{ min}$ grafisch dar.

- b) Für eine weitere spezielle Lösung der Differenzialgleichung gilt:

$$T(t) = 43 \cdot (0,4317^t - 0,1163)$$

Das Thermometer wird zur Zeit $t = 0$ aus einem Raum ins Freie ($T_U = -5$ °C) gebracht.

- Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen speziellen Lösung, nach welcher Zeit t das Thermometer 0 °C anzeigt.
 - Ermitteln Sie, welche Temperatur im Raum herrscht.
- c) – Erklären Sie anhand der gegebenen Differenzialgleichung, warum die Steigung der Abkühlungskurve positiv ist, wenn die Umgebungstemperatur T_U höher als die Temperatur $T(t)$ des Körpers ist.
- Interpretieren Sie im gegebenen Sachzusammenhang, was es bedeutet, wenn $\frac{dT(t)}{dt}$ gegen null geht.

- d) Für ein Experiment wird ein Topf mit warmem Wasser ins Freie bei einer Temperatur von 0 °C gestellt.

– Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für den Abkühlvorgang mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

In diesem Experiment hat das Wasser im Topf zu Beginn eine Temperatur von 50 °C. Nach 30 Minuten beträgt die Temperatur des Wassers 36 °C.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Angaben den Proportionalitätsfaktor k .

Magneten (B_081)

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her. Ein Magnet aus dem Werkstoff Ferrit wird auf seinen Curie-Punkt erhitzt, in einer Spule magnetisiert, und anschließend wieder abgekühlt. Der Abkühlungsprozess verläuft nach folgender Differenzialgleichung:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t ... Zeit ab Beginn der Abkühlung in Minuten (min)
 $T(t)$... Temperatur des Werkstoffes zur Zeit t in °C
 T_U ... Umgebungstemperatur in °C
 $k > 0$... Proportionalitätsfaktor (in min^{-1})

- a) – Beschreiben Sie die Bedeutung von $\frac{dT(t)}{dt}$ beim Abkühlungsprozess.
 – Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch *Trennen der Variablen*.

Der Curie-Punkt des Werkstoffes Ferrit liegt bei 450 °C.
 – Bestimmen Sie den Wert der Integrationskonstanten, wenn die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C beträgt.

Gebaeudetechnik * (B_260)

- c) In einem Schlafzimmer mit einem Luftvolumen von 45 m^3 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Lüftungsanlage eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der CO_2 -Gehalt der Luft im Zimmer 0,2 Vol.-%, d. h., das CO_2 -Volumen beträgt 0,2 % des gesamten Luftvolumens.

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt das CO_2 -Volumen V (in m^3) im Schlafzimmer in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) ab dem Einschalten der Lüftung:

$$\frac{dV}{dt} = 0,006 - \frac{V}{3}$$

- 1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
- 2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der ursprüngliche CO_2 -Gehalt halbiert ist.

Blut (B_372)

- d) Die Änderung der Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{dc}{dt} = -k \cdot c + D$$

t ... Zeit ab Beginn der Verabreichung des Wirkstoffs
 c ... Konzentration des Wirkstoffs
 D, k ... Konstanten

– Zeigen Sie mit der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Differenzialgleichung die Lösung $c(t) = \frac{D}{k} - C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$ hat.

Wein* (B_447)

- c) Bei der Lagerung in einem Keller hat ein bestimmter Wein eine Temperatur von 10 °C. Der Wein wird in einen Raum mit der Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C gebracht. Nach 20 min hat der Wein eine Temperatur von 12 °C.

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Weines ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur T_U und der aktuellen Temperatur T des Weines.

- 1) Stellen Sie diejenige Differenzialgleichung auf, die die Temperatur T des Weines während des Erwärmungsprozesses beschreibt. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k .
- 2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Erwärmungsprozess.
- 3) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Wein ausgehend von 10 °C eine Temperatur von 15 °C erreicht.

Wirkstoffkonzentration (B_369)

- c) Über eine Infusion werden einem Patienten pro Minute 2,3 mg eines Wirkstoffs verabreicht. Gleichzeitig wird ein Teil des Wirkstoffs wieder ausgeschieden.
Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3} \right)$$

t ... Zeit in min

$y(t)$... Konzentration des Wirkstoffs in mg/L

- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* unter der Voraussetzung, dass sich zu Beginn der Infusion 0 mg des Wirkstoffs im Blut befinden.
- Erklären Sie, warum eine Funktion der Form $y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ für $a, k > 0$ ein beschränktes Wachstum beschreibt.

Champagner * (B_215)

- a) Eine Flasche Champagner wird zur Zeit $t = 0$ in einen Kühlschrank mit einer Temperatur von $\vartheta_U = 4$ °C gelegt. Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Champagners 16 °C und nach 2 Stunden beträgt sie 10 °C.

Die Temperatur des Champagners in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion ϑ beschrieben:

t ... Zeit in h

$\vartheta(t)$... Temperatur des Champagners zur Zeit t in °C

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Champagners ist dabei direkt proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_U$.

- 1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Temperaturfunktion ϑ des Champagners auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k .
- 2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess.

Elektromagnetische Strahlung * (B_487)

- a) Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

x ... Eindringtiefe in m

$E(x)$... Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m^2)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E .

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ ($k > 0$).

$$\frac{dE}{dx} = \underline{\hspace{10em}}$$

Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Heizungstechnik * (B_579)

- a) In einem bestimmten Zimmer steigt nach dem Einschalten der Heizung die Temperatur T an. Der Verlauf der Temperatur T kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$$

t ... Zeit nach dem Einschalten der Heizung in min
 $T(t)$... Temperatur im Zimmer zur Zeit t in °C
 a, b ... Parameter

- 1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

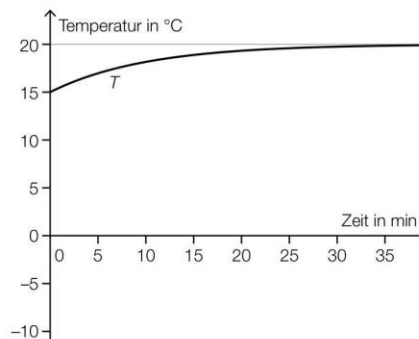
Für die allgemeine Lösung T_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung gilt:

$$T_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

C ... Konstante

- 2) Ermitteln Sie den Parameter a .

Eine Lösung der Differenzialgleichung $\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$ ist durch den Graphen der Funktion T in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



- 3) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu.

$T(0)$	
b	

A	-5
B	0
C	15
D	20

Sinkgeschwindigkeit von Faessern * (B_536)

- a) Für die Sinkgeschwindigkeit v_s der Fässer im Wasser in Abhängigkeit von der Zeit t gilt annähernd:

Die momentane Änderungsrate der Sinkgeschwindigkeit ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Endgeschwindigkeit S und der aktuellen Sinkgeschwindigkeit v_s . Der Proportionalitätsfaktor wird mit k bezeichnet.

- 1) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. [1 aus 5]

[0/1 P.]

$\frac{dv_s}{dt} = k \cdot (S - v_s)$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dv_s}{dt} = k \cdot S - v_s$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dv_s}{dt} = S - k \cdot v_s$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dv_s}{dt} = \frac{k}{S - v_s}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{dv_s}{dt} = S - \frac{k}{v_s}$	<input type="checkbox"/>

- b) Für bestimmte Fässer kann die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} + 0,25 \cdot v = 2$$

t ... Zeit in s

$v(t)$... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

- 1) Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch $v_h(t) = C \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ gegeben ist.

[0/1 P.]

- 2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung.

[0/1 P.]

Pilzkultur * (B_603)

- b) Die momentane Änderungsrate der Masse einer bestimmten Pilzkultur kann für einen bestimmten Zeitraum durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dm}{dt} = a - \lambda \cdot m$$

t ... Zeit nach Beobachtungsbeginn in h

$m(t)$... Masse der Pilzkultur zur Zeit t in μg

a, λ ... positive Konstanten

- 1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

Jemand behauptet, dass $m(t) = a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $\frac{dm}{dt} = a - \lambda \cdot m$ ist.

- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung für eine bestimmte Anfangsbedingung bei $t = 0$ lautet:

$$m(t) = 1000 - 998 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

- 3) Geben Sie diese Anfangsbedingung an.

Jemand berechnet: $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} m(t) dt = 400 \mu\text{g}$

- 4) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

All Star Level

Lösungen

Rookie Level

Bakterienkultur * (B_049) Lösung

a) $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln|N| = k \cdot t + c$$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0,0270\dots$

$N(180) = 6545,3\dots \approx 6545$

Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

CO2-Gehalt der Luft * (B_398) Lösung

a) $0,0011 \cdot 800 \text{ m}^3 = 0,88 \text{ m}^3$

Das CO₂-Volumen beträgt 0,88 m³.

$$\frac{dV}{dt} = 2,5 \cdot 0,0004 - 2,5 \cdot \frac{V}{800}$$

Lichtwellenleiter * (B_379) Lösung

a) $\frac{dI}{dx} = -\lambda \cdot I$

$$\frac{dI}{I} = -\lambda \cdot dx \text{ (oder: } \frac{I'}{I} = -\lambda)$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\lambda \int dx \text{ (oder: } \int \frac{I'(x)}{I(x)} dx = -\lambda \int dx)$$

$$\ln|I| = -\lambda \cdot x + C_1$$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:

$$I_0 = C$$

spezielle Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

Luftdruck (2) (B_052) Lösung

a) $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$

Die Variablen p und h werden getrennt:

$$\frac{dp}{p} = -k \cdot dh$$

Beide Seiten werden integriert:

$\ln(p) = -k \cdot h + c$, c ist die Integrationskonstante des unbestimmten Integrals.

Man erhält mit der Definition der Konstanten $C = e^c$ die angegebene allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$$

b) $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

$$p(500) = 962$$

$$p(2167) = 790$$

$$962 = C \cdot e^{-500k}$$

$$790 = C \cdot e^{-k \cdot 2167}$$

Lösung mit Technologieeinsatz:

$$k \approx 1,18 \cdot 10^{-4}$$

$$C \approx 1020,55 \text{ (mit genauem Wert von } k \text{ weitergerechnet, gerundet auf 2 Dezimalen)}$$

$$p(h) = 1020,55 \cdot e^{-0,000118 \cdot h}$$

Solarzelle (B_262) Lösung

b) t ... Zeit in ms
 $u(t)$... Spannung zur Zeit t in Volt

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$u_0 = 10$$

$$5 = 10 \cdot e^{-20 \cdot \lambda} \Rightarrow \lambda = 0,03465\dots$$

$$u(t) = 10 \cdot e^{-0,03465\dots \cdot t}$$

[..]	
[..]	
$\frac{du(t)}{dt} = -k \cdot u(t)$	<input checked="" type="checkbox"/>
[..]	
[..]	

Kondensator * (B_496) Lösung

a1) $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$

$$\int \frac{u'}{U_0 - u} dt = \int \frac{1}{\tau} dt \quad (\text{oder: } \int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{1}{\tau} dt)$$

$$-\ln|U_0 - u(t)| = \frac{t}{\tau} + C_1$$

$$U_0 - u(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

a2) $u(0) = 0$ oder $U_0 - C \cdot e^0 = 0 \Rightarrow C = U_0$

$$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

b1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\frac{t}{\tau}}$ gegen null, und damit geht $u(t)$ gegen U_0 .

Meerwasser und mehr Wasser * (B_509) Lösung

a1) Das Volumen nimmt zu, wenn die momentane Änderungsrate $\frac{dV}{dt}$ positiv ist. Dies ist dann der Fall, wenn V kleiner als 350 ist.

a2) $\int \frac{1}{350 - V} dV = \int 0,001 dt$ oder $\int \frac{V'}{350 - V} dt = \int 0,001 dt$

$$-\ln|350 - V(t)| = 0,001 \cdot t + C_1$$

$$V(t) = 350 + C \cdot e^{-0,001 \cdot t}$$

a3) $V(0) = 150 \Rightarrow C = -200$

$$V(t) = 350 - 200 \cdot e^{-0,001 \cdot t}$$

Bewegung eines Bootes * (B_074) Lösung

a) $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v$

Da v , m und k größer als null sind, bedeutet das Minuszeichen, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

oder:

$$\int \frac{v'}{v} dt = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln|v(t)| = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$$

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

Sandfang einer Klaieranlage * (B_555) Lösung

c1) $\int \frac{dv}{g-k \cdot v} = \int dt$ oder $\int \frac{v'}{g-k \cdot v} dt = \int dt$

$$\frac{\ln|g-k \cdot v(t)|}{-k} = t + C_1$$

$$g-k \cdot v(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C_2$$

$$v(t) = \frac{g}{k} - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

c2) $v_E = \frac{g}{k}$

c3)

$v(0) = 0$	B
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	D

A	v und a sind streng monoton steigend.
B	v ist streng monoton steigend und a ist streng monoton fallend.
C	v und a sind streng monoton fallend.
D	v ist streng monoton fallend und a ist streng monoton steigend.

Sedimente * (B_543) Lösung

a1) $0 = 10 - 20 \cdot v$
 $v = 0,5$

Die Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist, beträgt 0,5 m/s.

a2) $\int \frac{dv}{10-20 \cdot v} = \int dt$ oder $\int \frac{v'}{10-20 \cdot v} dt = \int dt$

$$\frac{\ln|10-20 \cdot v(t)|}{-20} = t + C_1$$

$$10-20 \cdot v(t) = e^{-20 \cdot t} \cdot C_2$$

$$v(t) = 0,5 - C \cdot e^{-20 \cdot t}$$

a3) $v(0) = 0,2$
 $0,5 - C = 0,2$
 $C = 0,3$
 $v(t) = 0,5 - 0,3 \cdot e^{-20 \cdot t}$

Fischzucht * (B_566) Lösung

d1) $\frac{df}{dt} = k \cdot (G - f)$

d2) $f(0) = 100$

d3) Für $t \rightarrow \infty$ geht $e^{-k \cdot t}$ gegen 0, und damit geht $1000 - 900 \cdot e^{-k \cdot t}$ gegen 1000.

Lösung: Nähmaschine * (B_591)

b1) $a = 100$
 $b = 80$

b2)

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (100 - T)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Pro Level

Differenzialgleichungen in der Technik (B_426) Lösung

a) homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

Einsetzen in die homogene Differenzialgleichung:

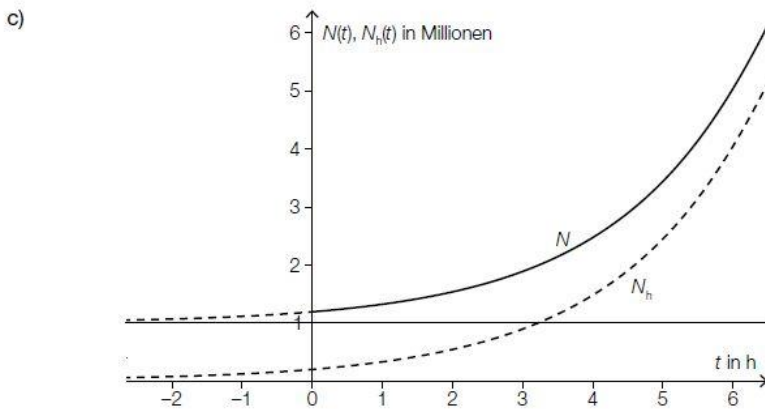
$$-2 \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} = b \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} \Rightarrow b = -2 \cdot s^{-1}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$

$$8 \cdot e^{-2 \cdot t} = a - 2 \cdot (5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}) \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$$

$$v(0) = 1 \text{ m/s}$$

b)	Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung ...	A	A	... asymptotisch der t -Achse.
	Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung dieser Differenzialgleichung ...	C	B	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 8.
			C	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 4.
			D	... asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt -2.



Kalt - warm (1) * (B_394) Lösung

c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein. Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$$

$$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt \quad (\text{oder: } \frac{T'}{T - T_U} = k)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt \quad (\text{oder: } \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U} dt = k \cdot \int dt)$$

$$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$$

$$\text{allgemeine Lösung: } T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_U + C$$

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$$

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417) Lösung

$$d) \frac{dy}{y-0,3} = -1,386 dt \quad \left(\text{oder: } \frac{y'}{y-0,3} = -1,386 \right)$$

$$\int \frac{dy}{y-0,3} = \int -1,386 dt \quad \left(\text{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t)-0,3} dt = \int -1,386 dt \right)$$

$$\ln|y(t)-0,3| = -1,386 \cdot t + C_1$$

$$y(t) = C_2 \cdot e^{-1,386 \cdot t} + 0,3$$

Newtonsches Abkühlungsgesetz (B_077) Lösung

$$a) T(t) = -10 - C \cdot e^{-0,84 \cdot t}$$

$$T'(t) = 0,84 \cdot C \cdot e^{-0,84 \cdot t}$$

Einsetzen in Differenzialgleichung: $0,84 \cdot C \cdot e^{-0,84 \cdot t} = k \cdot (T_U + 10 + C \cdot e^{-0,84 \cdot t})$

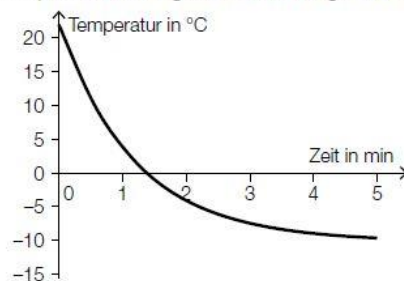
Mit $T_U = -10$ und $k = 0,84$ gilt:

$$0,84 \cdot C \cdot e^{-0,84 \cdot t} = 0,84 \cdot C \cdot e^{-0,84 \cdot t} \Rightarrow \text{Die angegebene Lösung ist korrekt.}$$

$$T(0) = 22$$

$$22 = -10 - C \cdot e^0 \Rightarrow C = -32$$

$T(t) = 32 \cdot e^{-0,84 \cdot t} - 10$... spezielle Lösung der Differenzialgleichung



- b) Lösen der Gleichung $0 = 43 \cdot (0,4317^t - 0,1163)$ liefert $t = 2,5613... \text{ min.}$
Nach etwa 2,6 Minuten zeigt das Thermometer 0 °C an.

$$T(0) = 43 \cdot (0,4317^0 - 0,1163) = 37,9991$$

$$T \approx 38 \text{ °C}$$

$$c) \frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

Da $k > 0$ und $T_U > T(t)$, also $T_U - T(t) > 0$, ist das Produkt $k \cdot (T_U - T(t)) = \frac{dT(t)}{dt} > 0$.
Die Steigung der Abkühlungskurve ist also positiv.

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0 \Rightarrow k \cdot (T_U - T) = 0 \text{ mit } k > 0 \Rightarrow T = T_U$$

Die Temperatur T nähert sich der Umgebungstemperatur T_U .

$$d) \frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

Trennen der Variablen: $\frac{dT(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot dt$

$$\int \frac{dT(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot \int dt$$

$$-\ln|T_U - T(t)| = k \cdot t + C$$

$$\ln|T_U - T(t)| = -k \cdot t - C$$

$$T_U - T(t) = e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$$

$$T(t) = T_U - e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$$

Mit $T_U = 0$ und $e^{-C} = T_0$ erhält man:

$$T(t) = T_0 \cdot e^{-k \cdot t} \dots \text{allgemeine Lösung der Differenzialgleichung}$$

T_0 ... Anfangstemperatur des Wassers

k ... Proportionalitätsfaktor

$$T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$36 = 50 \cdot e^{-k \cdot 30}$$

$$k = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{36}{50}\right)$$

$$k = 0,010950\dots$$

$$k \approx 0,011 \text{ min}^{-1}$$

Magneten (B_081) Lösung

a) $\frac{dT(t)}{dt}$ beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur T des Werkstoffs abhängig von der Zeit t .

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - T_U)$$

$$\frac{dT(t)}{T(t) - T_U} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dT(t)}{T(t) - T_U} = -k \cdot \int dt$$

$$\ln|T(t) - T_U| = -k \cdot t + C_1$$

$$T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$\text{Ermittlung des Parameters } C: 450 = 20 + C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = 430$$

Gebäudetechnik * (B_260) Lösung

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$V(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

t ... Zeit in min

$V(t)$... CO₂-Volumen zur Zeit t in m³

oder:

allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0$:

$$V_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}}$$

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0,006:$$

$$V_p(t) = a$$

$$0 + \frac{a}{3} = 0,006 \Rightarrow a = 0,018$$

$$V(t) = V_h(t) + V_p(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

Auch eine Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mit einem anderen Ansatz (z. B. mit der Methode Trennen der Variablen) ist als richtig zu werten.

c2) $V(0) = 0,002 \cdot 45 = 0,09$

$$0,09 = C \cdot e^{-\frac{0}{3}} + 0,018 \Rightarrow C = 0,072$$

$$\frac{1}{2} \cdot V(0) = 0,045 = 0,072 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 2,94 \dots$$

Nach etwa 2,9 min ist der ursprüngliche CO₂-Gehalt halbiert.

Blut (B_372) Lösung

$$d) \frac{dc}{dt} = -k \cdot c + D$$

$$\frac{dc}{-k \cdot c + D} = dt$$

$$\int \frac{dc}{-k \cdot c + D} = \int dt$$

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln|-k \cdot c + D| = t + C_3$$

$$\ln|-k \cdot c + D| = -k \cdot t + C_2$$

$$-k \cdot c + D = C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$-k \cdot c = C_1 \cdot e^{-k \cdot t} - D$$

$$c(t) = \frac{D}{k} - C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Wein * (B_447) Lösung

$$c1) \frac{dT}{dt} = k \cdot (20 - T)$$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

oder:

$$\int \frac{T'}{20 - T} dt = \int k dt$$

$$-\ln|20 - T(t)| = k \cdot t + C_1$$

$$20 - T(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(0) = 10 \quad \text{oder} \quad 20 - C \cdot e^{-k \cdot 0} = 10 \Rightarrow C = 10$$

$$T(20) = 12 \quad \text{oder} \quad 20 - 10 \cdot e^{-k \cdot 20} = 12$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$k = 0,011157\dots$$

$$T(t) = 20 - 10 \cdot e^{-0,01116 \cdot t}$$

$$c3) T(t) = 15 \quad \text{oder} \quad 20 - 10 \cdot e^{-0,01116 \cdot t} = 15$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 62,1\dots$$

Der Wein erreicht nach rund 62 min eine Temperatur von 15 °C.

Wirkstoffkonzentration (B_369) Lösung

$$c) \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot dt \quad \left(\text{oder: } \frac{y'}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \int dt \quad \left(\text{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{115}{3}} \cdot dt = -\frac{3}{50} \cdot \int dt\right)$$

$$\ln\left|y(t) - \frac{115}{3}\right| = -\frac{3}{50} \cdot t + C_1$$

allgemeine Lösung:

$$y(t) = C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$$

Ermitteln der speziellen Lösung:

$$y(0) = 0$$

$$C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot 0} + \frac{115}{3} = 0 \Rightarrow C = -\frac{115}{3}$$

$$y(t) = -\frac{115}{3} \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$$

$$y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$$

Die Funktion wächst, weil mit steigendem t der Term $e^{-k \cdot t}$ kleiner wird und somit der Funktionswert $y(t)$ größer. Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert a , weil für wachsendes t der Term $(1 - e^{-k \cdot t})$ gegen 1 strebt. Sie kann nicht über diesen Wert hinausgehen.

Champagner * (B_215) Lösung

a1) $\frac{dg}{dt} = k \cdot (g - 4)$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$g(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$$

oder:

$$\int \frac{g'}{g-4} dt = \int k dt$$

$$\ln|g(t) - 4| = k \cdot t + C_1$$

$$g(t) - 4 = C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$g(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$$

$$g(0) = 16 \quad \text{oder} \quad C \cdot e^{k \cdot 0} + 4 = 16$$

$$C = 12$$

$$g(2) = 10 \quad \text{oder} \quad 12 \cdot e^{k \cdot 2} + 4 = 10$$

$$k = \frac{\ln(0,5)}{2} = -0,34657... \approx -0,3466$$

$$g(t) = 12 \cdot e^{-0,3466 \cdot t} + 4$$

Elektromagnetische Strahlung * (B_487) Lösung

a1) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E$

a2) Differenzialgleichung mit Störfunktion S: $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S$

Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*:

$$\frac{dE}{-k \cdot E + S} = dx \quad \left(\text{oder: } \frac{E'}{-k \cdot E + S} = 1 \right)$$

$$\int \frac{dE}{-k \cdot E + S} = \int dx \quad \left(\text{oder: } \int \frac{E'(x)}{-k \cdot E(x) + S} dx = \int 1 dx \right)$$

$$\frac{\ln|-k \cdot E(x) + S|}{-k} = x + C_1$$

$$-k \cdot E(x) + S = C_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$E(x) = C \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$$

Lösung: Heizungstechnik * (B_579)

a1) $\frac{dT}{dt} = -a \cdot T$

oder:

$$\frac{dT}{dt} + a \cdot T = 0$$

a2) $-\frac{1}{10} \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}} = -a \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$

$$a = \frac{1}{10}$$

a3)

$T(0)$	C
b	D

A	-5
B	0
C	15
D	20

Sinkgeschwindigkeit von Faessern * (B_536) Lösung

a1)

$\frac{dv_s}{dt} = k \cdot (S - v_s)$	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) zugehörige homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv_h}{dt} + 0,25 \cdot v_h = 0$

$$\frac{dv_h}{dt} = -0,25 \cdot v_h$$

$$\int \frac{dv_h}{v_h} = \int -0,25 dt \quad (\text{oder: } \int \frac{v_h'(t)}{v_h(t)} dt = \int -0,25 dt)$$

$$\ln|v_h(t)| = -0,25 \cdot t + C_1$$

$$v_h(t) = C \cdot e^{-0,25 \cdot t}$$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$v(t) = C \cdot e^{-0,25 \cdot t} + 8$$

oder:

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$v_p(t) = a \Rightarrow v_p'(t) = 0$$

$$0,25 \cdot a = 2$$

$$a = 8$$

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = C \cdot e^{-0,25 \cdot t} + 8$$

Lösung: Pilzkultur * (B_603)

b1) $\frac{dm}{dt} = -\lambda \cdot m$

b2) $m'(t) = -\lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
 $-\lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t} = a - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
 $0 = a$

Die Behauptung ist falsch.

b3) $m(0) = 2$

b4) Die durchschnittliche Masse der Pilzkultur im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ beträgt 400 μg .

