Aufgabensammlung

Bogenlänge

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

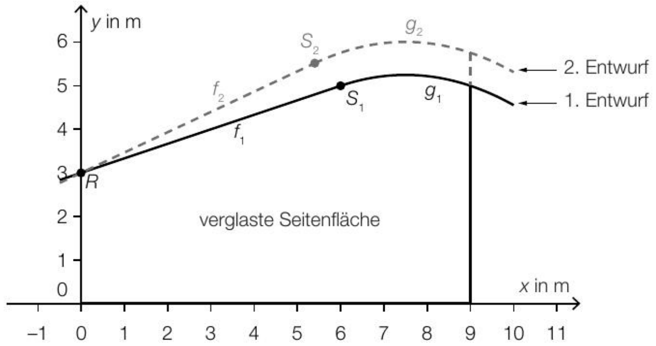
Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Bogenlänge

Rookie Level

Ausstellungshalle * (B_116)

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \leq x \leq 6$

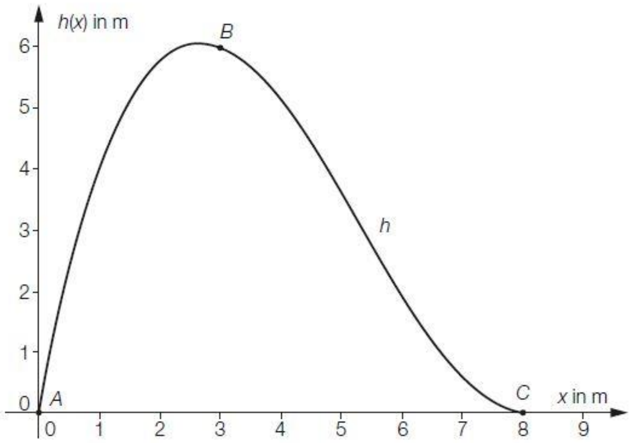
$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \leq x \leq 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall $[-0{,}5; 10]$.

Pro Level

Drohnen (B_362)

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Flugbahn einer Drohne.



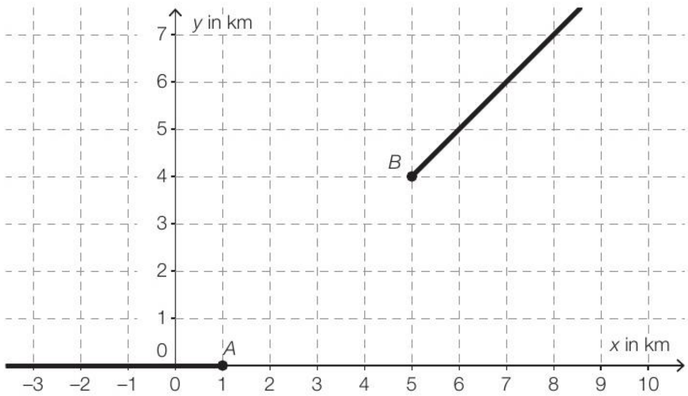
x ... horizontale Entfernung vom Startpunkt A in m
$h(x)$ ... Höhe der Drohne in der Entfernung x in m

Die Flugbahn der Drohne lässt sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion h dritten Grades beschreiben. Die Flugbahn verläuft durch den Punkt B und erreicht ein Minimum im Punkt C.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, das zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion benötigt wird.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Polynomfunktion.
– Berechnen Sie die Länge der Flugbahn zwischen A und C.

Strassenbahn (2) * (B_298)

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei“ bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

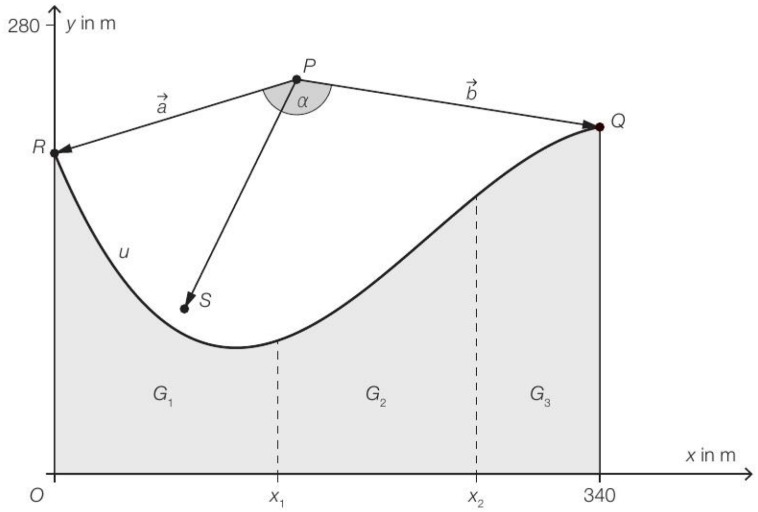
1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Mithilfe dieses Gleichungssystems erhält man: $g(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{11}{16} \cdot x^2 - \frac{19}{16} \cdot x + \frac{9}{16}$

2) Berechnen Sie die Länge dieser Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B.

Grundstueck am See * (B_301)

Drei Geschwister erwerben ein Grundstück am See. Sie unterteilen das Grundstück in die 3 Grundstücke G_1, G_2 und G_3 (siehe nachstehende Abbildung).



Die Uferbegrenzungslinie wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion u beschrieben.

b) Das gesamte Grundstück besteht aus den 3 flächengleichen Grundstücken G_1, G_2 und G_3 (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion u gilt:

$u(x) = -2 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 200$ mit $0 \leq x \leq 340$

x, $u(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gesamten Grundstücks.

Die Stelle x_1 markiert die Grenze zwischen den Grundstücken G_1 und G_2.

2) Berechnen Sie die Stelle x_1.

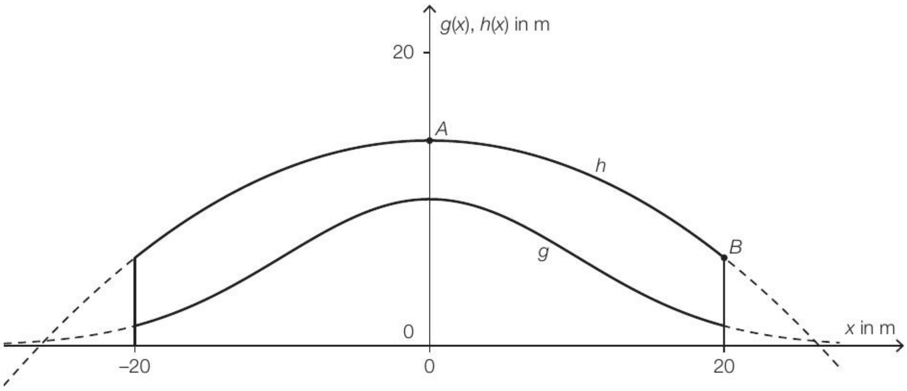
3) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung des Umfangs des Grundstücks G_2 an. *[1 aus 5]*

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$u(x_2) - u(x_1) + x_1 + x_2 + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) - u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐

Gruenbruecken * (B_495)

c) Als Geländer einer Grünbrücke ist eine Betonmauer geplant.

Die obere und die untere Begrenzungslinie der Betonmauer (in der Seitenansicht) können im Intervall [–20; 20] näherungsweise durch den Graphen der Funktion h und den Graphen der Funktion g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.
$\int_0^{20} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{20} g(x)\,\mathrm{d}x$

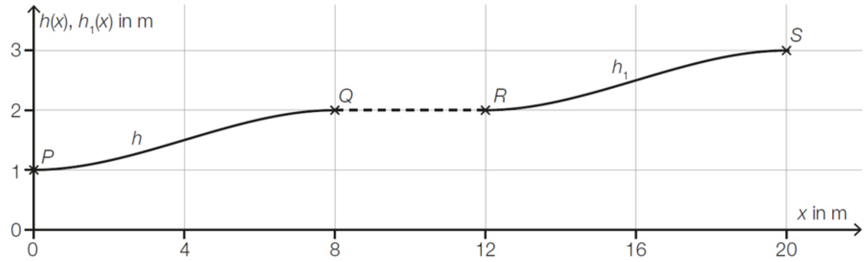
Die Funktion h ist eine Polynomfunktion 2. Grades.

Der Scheitelpunkt von h ist $A = (0|14)$. Weiters verläuft h durch den Punkt $B = (20|6)$.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Funktion h.
3) Berechnen Sie die Länge des Graphen von h im Intervall [–20; 20].

Foerderband * (B_525)

c) Nach dem Punkt Q verläuft das Förderband 4 m horizontal bis zum Punkt R. Vom Punkt R bis zum Punkt S wird der Verlauf des Förderbands durch die Funktion h_1 beschrieben. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Der Graph der Funktion h_1 entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion h.

1) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von h_1 an. *[1 aus 5]*

$h_1(x) = h(x - 12) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 4) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 4) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 12) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☐

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge L des Förderbands vom Punkt P bis zum Punkt S auf.

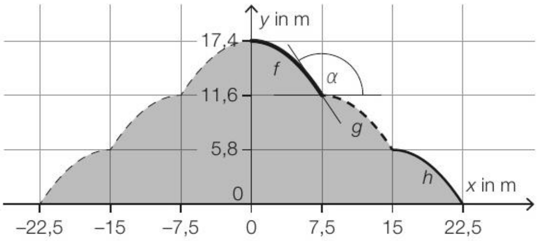
L = ________________________________

Gewaechshaeuser * (B_505)

a) Auf der Insel Mainau steht ein besonderes Gewächshaus (siehe nebenstehende Abbildung).

Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Vorderseite des Gewächshauses in einem Koordinatensystem. Die Vorderseite ist dabei symmetrisch zur y-Achse.



Der Graph der Funktion g ergibt sich durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um 7,5 m nach rechts und 5,8 m nach unten.

1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g(x) = f\left(x \square \square\right) \square \square$

Die Funktion f ist gegeben durch:

$f(x) = \frac{87}{5} - \frac{116}{1125} \cdot x^2$ mit $0 \leq x \leq 7{,}5$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

An der Stelle $x = 7{,}5$ schließt die Tangente an den Graphen von f mit der horizontalen Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein (siehe obige Abbildung).

2) Berechnen Sie den Winkel α.

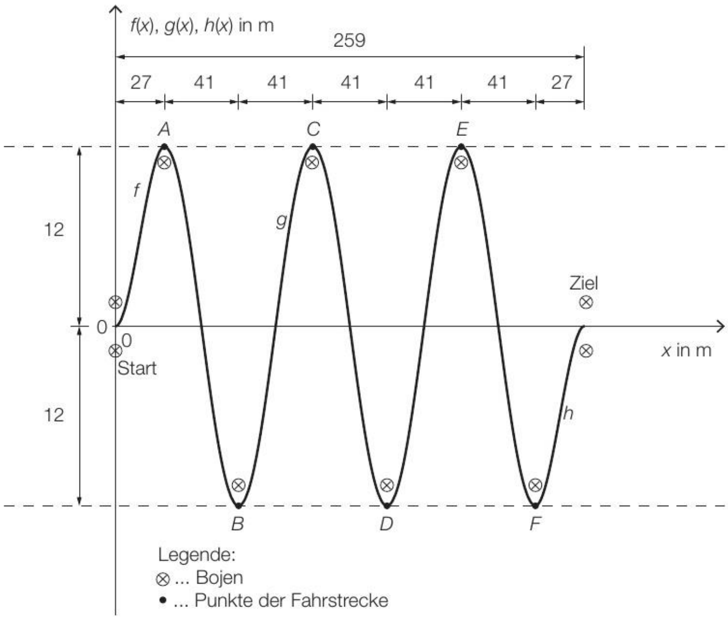
Die in der obigen Abbildung eingezeichneten Graphen der Funktionen f, g und h haben jeweils die gleiche Länge.

3) Berechnen Sie den Umfang der grau markierten Fläche.

All Star Level

Wasserski-Wettbewerb (1) * (B_470)

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

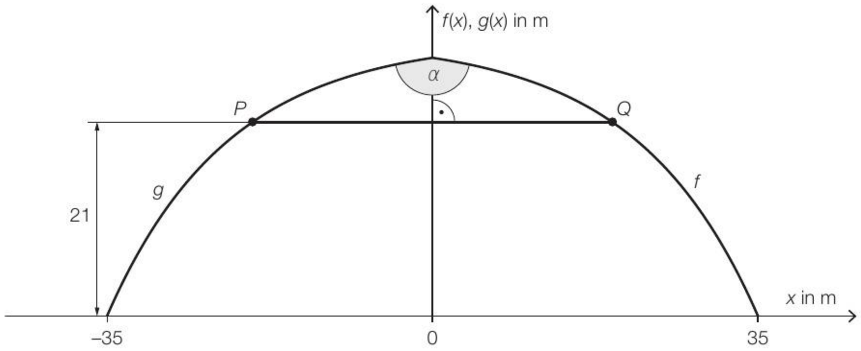
a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx}{30}$$

Bitterfelder Bogen * (B_477)

b) Der Verlauf des Bogens kann näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt werden. Die Graphen der beiden Funktionen sind zueinander symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Es gilt:
$f(x) = 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right)$ mit $0 \leq x \leq 35$

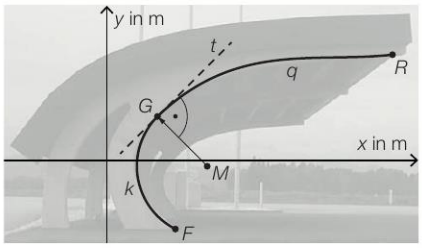
In einer Höhe von 21 m befindet sich die Aussichtsplattform.

1) Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.
2) Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Graphen der Funktionen f und g.
3) Interpretieren Sie das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang.

$$2 \cdot \int_0^{35} \sqrt{1 + \left(-\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}\right)^2}\, dx = 94{,}57...$$

Carport * (B_522)

b) Im Modell B wird ein Teil des Carports durch den Kreisbogen k und den Graphen der Funktion q beschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Der Kreisbogen k verläuft zwischen den Punkten F und $G = (1{,}18\,|\,1)$. Der zugehörige Kreis hat den Mittelpunkt $M = (2{,}34\,|\,–0{,}16)$.

1) Zeigen Sie, dass die Steigung der Tangente t an den Kreisbogen im Punkt G den Wert 1 hat.
2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Winkel α, der durch die nachstehende Formel berechnet werden kann.
$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} = |\overrightarrow{MF}| \cdot |\overrightarrow{MG}| \cdot \cos(\alpha)$

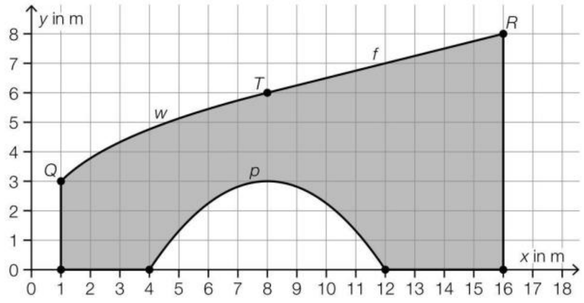
Zwischen den Punkten G und R kann die Begrenzungslinie des Carports durch den Graphen der Funktion q beschrieben werden.

$q(x) = –0{,}00078 \cdot x^4 + 0{,}0312 \cdot x^3 – 0{,}366 \cdot x^2 + 1{,}74 \cdot x – 0{,}593$
x, $q(x)$ ... Koordinaten in m

3) Berechnen Sie die Länge der in der obigen Abbildung dargestellten Begrenzungslinie q des Carports im Intervall [1,18; 6,66].

Schwimmbad (2) * (B_602)

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Grundfläche eines Pools als grau markierte Fläche dargestellt (Ansicht von oben).



Der Graph der Funktion w verläuft vom Punkt Q zum Punkt T.
Der Graph der Funktion f verläuft vom Punkt T zum Punkt R.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf. Verwenden Sie dabei die Funktionen w, f und p.

$A =$ ______________________________

Die Funktion f ist eine lineare Funktion.
Für die Funktion w gilt:

$w(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$
x, $w(x)$ … Koordinaten in m

2) Zeigen Sie, dass die Funktionen w und f im Punkt T die gleiche Steigung haben.

3) Berechnen Sie die Länge desjenigen Teiles der Umrandung, der sich aus den Graphen der Funktionen w und f zusammensetzt.

Die Fläche zwischen dem Graphen der quadratischen Funktion p und der x-Achse stellt die Poolbar dar. Bei einem Umbau wird die Poolbar neu gestaltet. Nun stellt die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion q und der x-Achse die neue Poolbar dar.

$q(x) = p(x - 2)$
x, $p(x)$, $q(x)$ … Koordinaten in m

4) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion q ein.

Lösungen

Rookie Level

Ausstellungshalle * (B_116) Lösung

a1) $\int_{-0,5}^{6} \sqrt{1 + ((f_1'(x))^2}\,dx + \int_{6}^{10} \sqrt{1 + ((g_1'(x))^2}\,dx = 11,0...$

Die Länge der Dachlinie beträgt rund 11 m.

Pro Level

Drohnen (B_362) Lösung

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$B = (3|6) \quad C = (8|0)$

I: $h(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

II: $h(3) = 6 \Rightarrow 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 6$

III: $h(8) = 0 \Rightarrow 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 0$

IV: $h'(8) = 0 \Rightarrow 192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{25}, \quad b = -\frac{32}{25}, \quad c = \frac{128}{25}, \quad d = 0$

$h(x) = \frac{2}{25} \cdot x^3 - \frac{32}{25} \cdot x^2 + \frac{128}{25} \cdot x$

Berechnung der Weglänge s:

$h'(x) = \frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}$

$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}\right)^2}\, dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$s = 15{,}245\ldots$ m

Strassenbahn (2) * (B_298) Lösung

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$
$g(5) = 4$
$g'(1) = 0$
$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$
$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$
$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

b2) $\int_1^5 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx = 5{,}778\ldots$

Die Länge dieser Gleisverbindung beträgt rund 5,78 km.

Grundstueck am See * (B_301) Lösung

b1) $\int_0^{340} u(x)\,dx = 45\,881{,}8...$

Das Grundstück hat einen Flächeninhalt von rund 45 882 m².

b2) $\frac{45\,881{,}8...}{3} = \int_0^{x_1} u(x)\,dx$

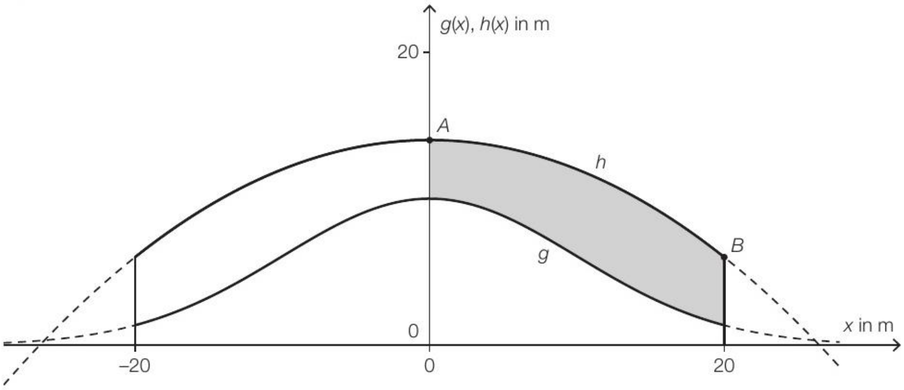
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1)_1 = 139{,}1...$
$((x_1)_2 = 646{,}4...)$

b3)

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☒

Gruenbruecken * (B_495) Lösung

c1)



c2) $h(x) = a \cdot x^2 + c$
$h(0) = 14 \quad \Rightarrow \quad c = 14$
$h(20) = 6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 400 + 14 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}02$

c3) $s = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$s = 43{,}929...$

Die Länge des Graphen von h beträgt rund 43,93 m.

Gewaechshaeuser * (B_505) Lösung

a1) $g(x) = f(x - 7{,}5) - 5{,}8$

a2) $\alpha = 180° - |\arctan(f'(7{,}5))| = 122{,}88...°$

a3) $45 + 6 \cdot \int_0^{7{,}5} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 104{,}19...$

Der Umfang der grau markierten Fläche beträgt rund 104,2 m.

Foerderband * (B_525) Lösung

c1)

$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☒

c2) $L = 4 + 2 \cdot \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

oder:

$L = 4 + \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int_{12}^{20} \sqrt{1 + (h_1'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

All Star Level

Wasserski-Wettbewerb (1) * (B_470) Lösung

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

Bitterfelder Bogen * (B_477) Lösung

b1) $f(x) = 21 \quad oder \quad 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right) = 21 \quad \Rightarrow \quad x = 19{,}34...$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 19{,}34... = 38{,}69...$

Die Länge $\overline{PQ}$ beträgt rund 38,7 m.

b2) $f'(x) = -\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}$

$f'(0) = -0{,}156...$

Steigungswinkel: $\arctan(-0{,}156...) = -8{,}88...°$

$\alpha = 180° - 2 \cdot 8{,}8...° = 162{,}23...°$

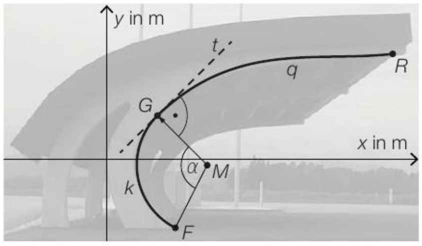
b3) Es wird die Länge des Bogens berechnet.

Carport * (B_522) Lösung

b1) $\overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} -1{,}16 \\ 1{,}16 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\overrightarrow{MG}$: $\begin{pmatrix} 1{,}16 \\ 1{,}16 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = 1$

b2)



b3) $\int_{1{,}18}^{6{,}66} \sqrt{1 + (q'(x))^2}\, dx = 5{,}84...$

Die Länge der Begrenzungslinie beträgt rund 5,8 m.

Lösung: Schwimmbad (2) * (B_602)

a1) $A = \int_1^8 w(x)\, dx + \int_8^{16} f(x)\, dx - \int_4^{12} p(x)\, dx$

a2) Steigung der Funktion w im Punkt T: $w'(8) = 0{,}25$

Steigung der Funktion f: $\frac{8-6}{16-8} = 0{,}25$

Die beiden Steigungen sind gleich.

a3) $\int_1^8 \sqrt{(1 + (w'(x))^2)}\, dx + \sqrt{8^2 + 2^2} = 15{,}938...$

Die Länge beträgt rund 15,94 m.

a4)