Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2023

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst vier Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind, und die dazugehörigen Lösungen.

Jede Aufgabe umfasst drei nachzuweisende Handlungskompetenzen.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1			Kandidat/in 2			Kandidat/in 3			Kandidat/in 4			Kandidat/in 5		
Aufgabe 1															
Aufgabe 2															
Aufgabe 3															
Aufgabe 4															
gesamt															

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem, zwei oder drei Punkten bewertet. Insgesamt können maximal zwölf Punkte erreicht werden.

Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Gesamtanzahl der nachgewiesenen Handlungskompetenzen	Beurteilung der mündlichen Kompensationsprüfung
12	Sehr gut
10–11	Gut
8–9	Befriedigend
6–7	Genügend
0–5	Nicht genügend

Aufgabe 1

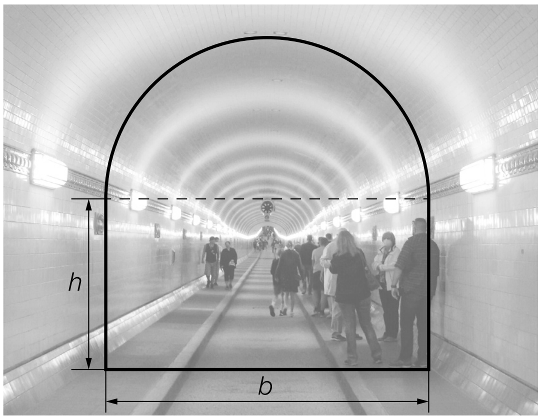
Alter Elbtunnel

Der Alte Elbtunnel in Hamburg ermöglicht das Unterqueren der Elbe.

a) Der Querschnitt des Tunnels entspricht näherungsweise einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe nebenstehende Abbildung).

b ... Breite in m
h ... Höhe in m

Daniel möchte das Luftvolumen V im 426,5 m langen Alten Elbtunnel berechnen.

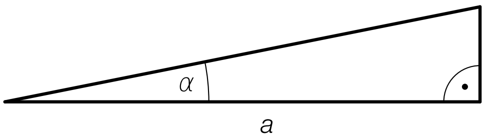


Quelle: BMBWF

1) Stellen Sie mithilfe von b und h eine Formel zur Berechnung von V auf.

$V =$ ____

b) In der nachstehenden Abbildung ist die Steigung eines Teilstücks des Fahrradwegs im Tunnel modellhaft dargestellt.



a ... waagrechte Länge des Teilstücks in m
α ... Steigungswinkel des Teilstücks

Eine Radfahrerin fährt auf diesem Teilstück mit der Geschwindigkeit v in m/s.

Es gilt: $\dfrac{\frac{a}{\cos(\alpha)}}{v} = 12{,}5$

1) Interpretieren Sie den Wert 12,5 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

c) Im ersten Jahr nach der Eröffnung haben 20 Millionen Personen den Alten Elbtunnel genutzt. Die Anzahl der Personen, die jährlich den Alten Elbtunnel nutzten, ist bis 1985 um 97,5 % zurückgegangen und anschließend wieder gestiegen. Im Jahr 2008 haben um 40 % mehr Personen den Alten Elbtunnel genutzt als im Jahr 1985.

1) Berechnen Sie die Anzahl der Personen, die den Alten Elbtunnel im Jahr 2008 genutzt haben.

Lösung zur Aufgabe 1

Alter Elbtunnel

a1) $V = 426{,}5 \cdot \left(b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi\right)$

oder:

$V = 426{,}5 \cdot \left(b \cdot h + \frac{b^2}{8} \cdot \pi\right)$

b1) Die Radfahrerin benötigt für dieses Teilstück 12,5 s.

c1) $20\,000\,000 \cdot 0{,}025 \cdot 1{,}4 = 700\,000$

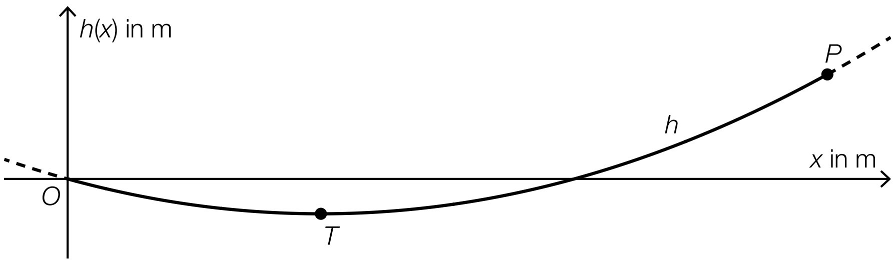
Im Jahr 2008 haben 700 000 Personen den Alten Elbtunnel genutzt.

Aufgabe 2

Hängebrücke

Der Verlauf einer bestimmten Hängebrücke für Fußgänger lässt sich modellhaft durch quadratische Funktionen beschreiben.

a) In einem Modell wird der Verlauf der Hängebrücke durch die Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ beschrieben (siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von der Seite).



Der Graph von h verläuft durch den Punkt $P = (120|6)$. An der Stelle $x = 40$ befindet sich der tiefste Punkt T der Brücke.

Zur Berechnung der Koeffizienten a und b wird mithilfe der Informationen zu den Punkten P und T das nachstehende Gleichungssystem erstellt.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

I: $a \cdot \boxed{}^2 + b \cdot \boxed{} = \boxed{}$

II: $a \cdot \boxed{} + b = \boxed{}$

Für die Funktion h gilt: $h(x) = 0{,}00125 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x$

2) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen von h im Punkt P.

In einem anderen Koordinatensystem kann der Verlauf der Hängebrücke durch die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ beschrieben werden.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Koordinatenachsen für den Graphen von f ein.

Lösung zur Aufgabe 2

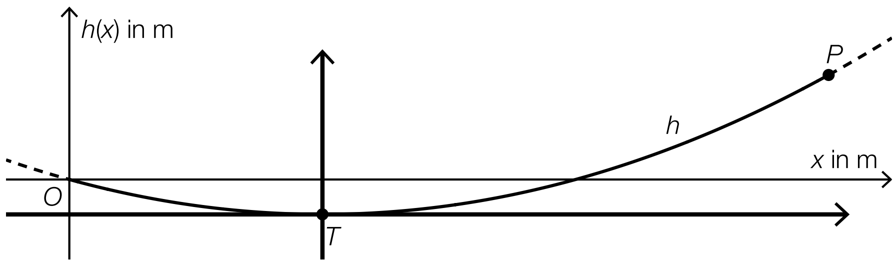
Hängebrücke

a1) I: $a \cdot \boxed{120}^2 + b \cdot \boxed{120} = \boxed{6}$

II: $a \cdot \boxed{80} + b = \boxed{0}$

a2) $\alpha = \arctan(h'(120)) = \arctan(0{,}2)$
$\alpha = 11{,}30...°$

a3)



Aufgabe 3

Sportartikel

a) Für einen bestimmten Sportartikel ist die Ableitungsfunktion K' der Kostenfunktion K gegeben.

$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... 1. Ableitung der Kostenfunktion K bei x ME in GE/ME

Die Fixkosten betragen 4200 GE.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K auf.

b) Für einen anderen Sportartikel sind die Kostenfunktion K_1 und die Erlösfunktion E_1 gegeben.

$K_1(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 200$
$E_1(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 50 \cdot x$

x ... Anzahl der produzierten und verkauften ME
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei x ME in GE
$E_1(x)$ ... Erlös bei x ME in GE

1) Berechnen Sie den Gewinn bei $x = 70$ ME.

c) In einer Studie hat man untersucht, wie viele Mengeneinheiten eines bestimmten Sportartikels langfristig verkauft werden können.
Die Anzahl der verkauften Mengeneinheiten kann in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion A modelliert werden.

$A(t) = a - 30 \cdot b^t$ mit $0 < b < 1$

t ... Zeit in Monaten mit $t = 0$ für den Verkaufsbeginn
$A(t)$ ... Anzahl der zur Zeit t verkauften Mengeneinheiten
a, b ... Parameter

1) Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung von A, warum gemäß diesem Modell niemals mehr als a Mengeneinheiten verkauft werden können.

Lösung zur Aufgabe 3

Sportartikel

a1) $K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 20 \cdot x + C = x^3 - 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + C$
$K(0) = 4\,200$
$C = 4\,200$

$K(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 4\,200$

b1) $G_1(x) = E_1(x) - K_1(x) = -0{,}26 \cdot x^2 + 40 \cdot x - 200$
$G_1(70) = 1\,326$

Der Gewinn bei 70 ME beträgt 1 326 GE.

c1) Der Ausdruck $30 \cdot b^t$ ist für alle t positiv und daher kann der Ausdruck $a - 30 \cdot b^t$ niemals einen größeren Wert als a annehmen.

Aufgabe 4

Würfeln

Bei einem bestimmten Spiel wird mit fairen sechsflächigen Würfeln gewürfelt. Die Seitenflächen dieser Würfel sind jeweils mit den Ziffern 1, 2, 3, ..., 6 beschriftet.

a) Andrea würfelt mehrmals mit einem Würfel.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit P auf.

P(„Andrea würfelt bei a Würfen keinen einzigen Sechser") = ____________________

b) Ferdinand würfelt einmal mit 2 Würfeln.

Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 5 zu würfeln, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 4 zu würfeln."

1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass Ferdinands Behauptung richtig ist.

c) Sabrina würfelt einmal mit 5 Würfeln.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 4 der 5 Würfel die gleiche Ziffer zeigen.

Lösung zur Aufgabe 4

Würfeln

a1) $P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^a$

b1) Augensumme 5: 1 + 4 *oder* 2 + 3 *oder* 3 + 2 *oder* 4 + 1
Augensumme 4: 1 + 3 *oder* 2 + 2 *oder* 3 + 1
Damit gilt:
$P(X = 5) = \frac{4}{36}$
$P(X = 4) = \frac{3}{36}$
$\frac{4}{36} > \frac{3}{36}$

c1) $6 \cdot \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 0{,}0192...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 1,9 %.