Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Weltbevölkerung

Zu Beginn des Jahres 2018 lebten auf der Erde ca. 7,592 Milliarden Menschen. Im Jahr 2018 wurden im weltweiten Durchschnitt auf 1000 Menschen, die zu Jahresbeginn lebten, ca. 19 Geburten und 7 Todesfälle gezählt.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, wie viele Kinder im Jahr 2018 durchschnittlich pro Minute geboren wurden.

– Geben Sie an, wie viele Menschen zu Beginn des Jahres 2019 auf der Erde lebten.

Leitfrage:

Die Anzahl der Menschen, die auf der Erde leben, soll ausgehend vom Beginn des Jahres 2018 mithilfe einer Exponentialfunktion N der Form $N(t) = N(2018) \cdot a^{t-2018}$ modelliert werden.

t ... entsprechendes Kalenderjahr ($t \geq 2018$)
$N(t)$ ... Anzahl der Menschen, die zu Beginn dieses Kalenderjahres auf der Erde leben ($t \geq 2018$)

– Ermitteln Sie a unter Zuhilfenahme der Anzahl der Menschen, die jeweils zu Beginn der Jahre 2018 und 2019 auf der Erde lebten.

Nehmen Sie an, dass die prozentuelle Bevölkerungszunahme im Jahr 2018 für die nachfolgenden Jahre konstant bleibt.

– Ermitteln Sie dasjenige Kalenderjahr, in dem entsprechend diesem Modell erstmals über 9 Milliarden Menschen auf der Erde leben werden.

Lösung zur Aufgabe 1

Weltbevölkerung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{7\,592\,000 \cdot 19}{365 \cdot 24 \cdot 60} = 274{,}44...$

Im Jahr 2018 wurden durchschnittlich 274 Kinder pro Minute geboren.

$7\,592\,000 \cdot (19 - 7) = 91\,104\,000$

$7{,}592 \cdot 10^9 + 91\,104\,000 = 7{,}683104 \cdot 10^9$

Zu Beginn des Jahres 2019 lebten auf der Erde ca. 7,683 Milliarden Menschen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl der Geburten pro Minute und die richtige Bevölkerungszahl zu Beginn des Jahres 2019 angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$7{,}683104 = 7{,}592 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}012$

$9 = 7{,}592 \cdot 1{,}012^{t-2018} \quad \Rightarrow \quad t \approx 2032{,}26...$

Im Kalenderjahr 2032 werden entsprechend diesem Modell erstmals über 9 Milliarden Menschen auf der Erde leben.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Parameters *a* und das gesuchte Kalenderjahr richtig ermittelt werden.

Aufgabe 2

Schulweg

Ein Schüler fährt mit dem Motorrad zur Schule. Er fährt mit einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von 72 km/h (= 20 m/s) und startet zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Die Funktion s gibt in Abhängigkeit von der Zeit t den ab $t = 0$ zurückgelegten Weg $s(t)$ an (t in s, $s(t)$ in m).

– Geben Sie $s(t)$ an.

– Geben Sie an, ob zwischen den beiden Größen t und $s(t)$ eine direkte Proportionalität besteht.

Leitfrage:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Schüler 18 km von der Schule entfernt und hat bis zum Unterrichtsbeginn 15 Minuten Zeit.

Aufgrund einer Verkehrsbehinderung muss der Schüler seine Geschwindigkeit auf den letzten 6 km reduzieren. Er fährt auf den letzten 6 km mit einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von 50 km/h.

– Geben Sie an, um wie viele Minuten der Schüler zu spät bei der Schule ankommt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 2

Schulweg

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$s(t) = 20 \cdot t$

Es handelt sich um eine direkte Proportionalität.
(Der Schüler legt beispielsweise in der doppelten Zeit den doppelten Weg zurück.)

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung angegeben wird und wenn richtig angegeben wird, dass eine direkte Proportionalität vorliegt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:

Der Schüler fährt 12 km mit 72 km/h, dafür benötigt er 10 Minuten.
Für die restlichen 6 km benötigt er $\frac{6}{50} = 0{,}12$ Stunden, das sind 7,2 Minuten bzw. 7 Minuten und 12 Sekunden.

Er kommt also 2,2 Minuten bzw. 2 Minuten und 12 Sekunden zu spät zur Schule.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Zeit angegeben wird und eine mögliche Vorgehensweise richtig erläutert wird.

Aufgabe 3

Gleichseitiges Dreieck

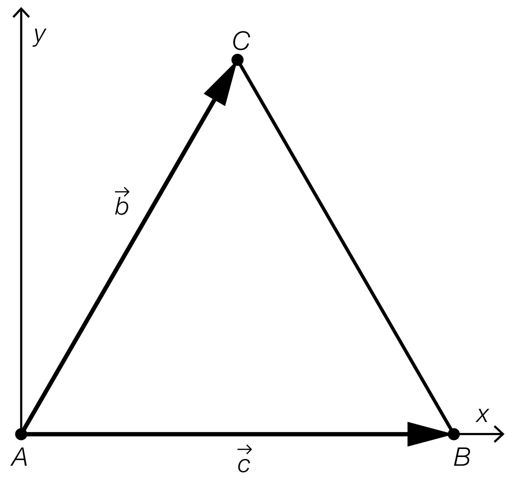
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ beschreibt den Flächeninhalt $f(x)$ eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge x. Dabei wird x in cm und $f(x)$ in cm² angegeben.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die relative (prozentuelle) Änderung der Funktion f im Intervall $[x_1; 2 \cdot x_1]$ und deuten Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

In der nachstehenden Abbildung ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit einer Seitenlänge von x_1 cm dargestellt. Der Eckpunkt A befindet sich im Koordinatenursprung. Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ wird mit $\vec{c}$ bezeichnet, der Vektor $\overrightarrow{AC}$ mit $\vec{b}$.



– Geben Sie $\vec{b}$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge x_1 an.

– Geben Sie einen Term zur Berechnung von $\vec{b} \cdot \vec{c}$ in Abhängigkeit von x_1 an.

Lösung zur Aufgabe 3

Gleichseitiges Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{f(2 \cdot x_1) - f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{\frac{4 \cdot x_1^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{x_1^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{\frac{x_1^2}{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \frac{x_1^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{\frac{x_1^2}{4} \cdot \sqrt{3}} = 3$$

mögliche Deutung:

Wenn die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks verdoppelt wird, so nimmt der Flächeninhalt um 300 % zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die relative (prozentuelle) Änderung richtig ermittelt und richtig gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot x_1 \\ \sqrt{(x_1^2 - (0{,}5 \cdot x_1)^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot x_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

mögliche Vorgehensweise:

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot x_1 \\ \sqrt{(x_1^2 - (0{,}5 \cdot x_1)^2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot x_1^2$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Komponenten und ein richtiger Term angegeben werden. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Extremstellen

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Extremstellen von f in Abhängigkeit von a.

Leitfrage:

Der Graph von f hat die Extremstellen x_1 und x_2. Er begrenzt mit der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ ein Flächenstück.

– Ermitteln Sie a so, dass der Inhalt dieses Flächenstücks den Wert 10 hat.

Lösung zur Aufgabe 4

Extremstellen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot x^2}{a} - 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Extremstellen richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\left|\int_0^{\sqrt{\frac{a}{3}}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 \cdot a}{36} = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 36$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von *a* richtig ermittelt wird.

Aufgabe 5

Schrauben

In einem Betrieb werden Schrauben von den zwei Maschinen M_1 und M_2 hergestellt.
Die Maschine M_1 erzeugt 80 % der Schrauben, wovon 1 % fehlerhaft ist.
Die restlichen Schrauben werden von M_2 erzeugt, wovon 6 % fehlerhaft sind.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, wie viel Prozent aller in diesem Betrieb hergestellten Schrauben fehlerhaft sind.

Leitfrage:

Alle in diesem Betrieb hergestellten Schrauben kommen in einen großen Behälter, werden danach daraus entnommen und in Schachteln zu je 50 Stück verpackt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Schrauben in einer Schachtel.

Der Hersteller verpflichtet sich zur Ausstellung eines Gutscheins im Wert von € 5, wenn sich in einer dieser Schachteln mindestens 3 und höchstens 5 fehlerhafte Schrauben befinden.
Bei mehr als 5 fehlerhaften Schrauben soll ein Gutschein im Wert von € 25 ausgestellt werden.

– Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den der Hersteller pro Schachtel zur Ausstellung von Gutscheinen zu erwarten hat.

Lösung zur Aufgabe 5

Schrauben

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}06 = 0{,}02$

Es sind 2 % aller in diesem Betrieb hergestellten Schrauben fehlerhaft.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Prozentwert angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$n = 50$; $p = 0{,}02$
$P(3 \leq X \leq 5) = 0{,}0779\ldots$
$P(X > 5) = 0{,}0004\ldots$
$E(X) = 0{,}0779\ldots \cdot 5 + 0{,}0004\ldots \cdot 25 = 0{,}402\ldots \approx 0{,}40$

Der Hersteller hat pro Schachtel ca. 40 Cent zur Ausstellung von Gutscheinen zu erwarten.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Höhe des Betrags richtig berechnet wird.