Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

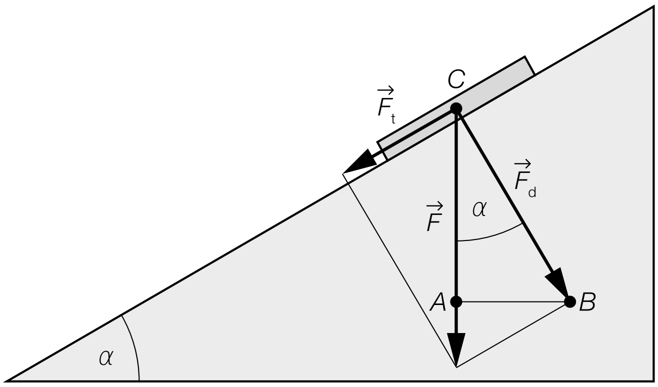
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Schiefe Ebene

Ein Körper befindet sich auf einer schiefen Ebene. Die auf ihn wirkende Gewichtskraft $\vec{F}$ kann in die parallel zur schiefen Ebene wirkende treibende Kraft $\vec{F}_t$ und die normal auf die schiefe Ebene wirkende drückende Kraft $\vec{F}_d$ zerlegt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Aufgabenstellung:

– Bestimmen Sie für $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_t = \begin{pmatrix} -24 \\ -18 \end{pmatrix}$ die Komponenten des Vektors $\vec{F}_d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ und weisen Sie nach, dass die beiden Kräfte $\vec{F}_d$ und $\vec{F}_t$ einen rechten Winkel einschließen.

Leitfrage:

Die Längen F, F_d und F_t der jeweiligen Vektoren entsprechen den Größen der Kräfte (in Newton).

– Geben Sie F_d in Abhängigkeit von F und α an.
– Geben Sie die Komponenten d_1 und d_2 des Vektors $\vec{F}_d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von F und α an. Verwenden Sie dazu das rechtwinkelige Dreieck ABC.

Lösung zur Aufgabe 1

Schiefe Ebene

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_d = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -24 \\ -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_d = \begin{pmatrix} 24 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_d \cdot \vec{F}_t = \begin{pmatrix} -24 \\ -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -32 \end{pmatrix} = -24^2 + 32 \cdot 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Die Kräfte schließen einen rechten Winkel ein.}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Komponenten des Vektors $\vec{F}_d$ richtig bestimmt werden und nachgewiesen wird, dass $\vec{F}_d$ und $\vec{F}_t$ einen rechten Winkel einschließen.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$F_d = F \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{d_1}{F_d} = \frac{d_1}{F \cdot \cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad d_1 = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-d_2}{F_d} = \frac{-d_2}{F \cdot \cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad d_2 = -F \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Größe und die richtigen Komponenten der Kraft $\vec{F}_d$ angegeben werden.

Aufgabe 2

Erlös

Der Erlös, der durch den Verkauf eines bestimmten Produkts erzielt wird, kann durch die Funktion E mit $E(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Dabei gibt x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) und $E(x)$ den dadurch erzielten Erlös in Euro an.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die lokale Extremstelle der Funktion E in Abhängigkeit von a und b und erklären Sie deren Bedeutung im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

Die Funktion p modelliert den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x dieses Produkts und dem Verkaufspreis $p(x)$. Dabei wird x in ME und $p(x)$ in Euro/ME angegeben.

– Geben Sie die Gleichung der Funktion p unter Verwendung von a und b an.

Bei einer Produktionsmenge von 1 000 ME beträgt der Verkaufspreis 40 Euro/ME. Wenn 250 ME mehr produziert werden, dann sinkt der Verkaufspreis um 5 Euro/ME.

– Ermitteln Sie denjenigen Verkaufspreis (in Euro/ME), bei dem der maximale Erlös erzielt wird.

Lösung zur Aufgabe 2

Erlös

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$E'(x) = -2 \cdot a \cdot x + b$
$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{2 \cdot a}$
Extremstelle: $x_E = \frac{b}{2 \cdot a}$

Die Extremstelle gibt an, bei welcher Anzahl an verkauften ME der Erlös maximal ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Extremstelle richtig ermittelt wird und deren Bedeutung im gegebenen Kontext richtig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$E(x) = x \cdot (-a \cdot x + b) \quad \Rightarrow \quad p(x) = -a \cdot x + b$

mögliche Vorgehensweise:
$p(1\,000) = 40$
$p(1\,250) = 35$
$\Rightarrow \quad p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{50}, b = 60$
$\Rightarrow \quad x_E = \frac{b}{2 \cdot a} = \frac{60}{2 \cdot \frac{1}{50}} = 1\,500$
$p(1\,500) = 30$
Der maximale Erlös wird bei $x = 1\,500$ ME erzielt. Der entsprechende Verkaufspreis beträgt 30 Euro/ME.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung der Funktion p angegeben und der Verkaufspreis richtig ermittelt wird.

Aufgabe 3

Integral

Aufgabenstellung:

– Geben Sie eine Gleichung einer Funktion g an, die die beiden nachstehenden Bedingungen erfüllt.
  - g ist eine lineare (aber nicht konstante) Funktion.
  - Es gilt: $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

– Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Leitfrage:

– Geben Sie eine Gleichung einer Funktion h an, die die beiden nachstehenden Bedingungen erfüllt.
  - h ist eine quadratische Funktion mit den Nullstellen 0 und 2.
  - Der Flächeninhalt des Flächenstücks, das vom Graphen von h und von der x-Achse im Intervall [0; 2] begrenzt wird, hat den Wert 4.

Lösung zur Aufgabe 3

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Lösung:
$g(x) = x - 1$

mögliche Vorgehensweise:
Die Fläche, die vom Graphen von g und von der x-Achse im Intervall $[0; 2]$ eingeschlossen wird, muss aus zwei gleich großen Teilflächen bestehen, die unterhalb bzw. oberhalb der x-Achse liegen. Die Nullstelle von g liegt bei $x = 1$. Somit sind alle Geraden, die durch $(1|0)$ gehen, als Graphen von g möglich.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung von g angegeben wird und eine mögliche Vorgehensweise richtig erläutert wird.
Alle Gleichungen der Form $g(x) = k \cdot (x - 1)$, $k \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$ sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:
$h(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$
x_1, x_2 ... Nullstellen von h

$h(x) = c \cdot x \cdot (x - 2) = c \cdot x^2 - 2 \cdot c \cdot x$
$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{c \cdot x^3}{3} - c \cdot x^2 \Big|_0^2 = 4$
$\Rightarrow \quad \frac{8 \cdot c}{3} - 4 \cdot c = 4$
$\Rightarrow \quad c = -3$
$\Rightarrow \quad h(x) = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$

weitere mögliche Lösung:
$h(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung von h angegeben wird.

Aufgabe 4

Wahlbeteiligung

Bei der Nationalratswahl 2019 waren in der niederösterreichischen Gemeinde Pöggstall 2000 Personen wahlberechtigt. Die Gemeinde Pöggstall ist in vier Wahlsprengel unterteilt.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Wahlberechtigten und die Wahlbeteiligung (in Prozent der Wahlberechtigten) je Wahlsprengel:

Wahlsprengel	Wahlberechtigte	Wahlbeteiligung
Pöggstall Ort	779	80,87 %
Neukirchen	506	79,84 %
Würnsdorf	360	84,17 %
Pöggstall Umgebung	355	82,54 %

Datenquelle: https://www.poeggstall.at/Ergebnis_der_Nationalratswahl_in_Poeggstall [09.04.2020].

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die prozentuelle Wahlbeteiligung in der Gemeinde Pöggstall bei der Nationalratswahl 2019.

Leitfrage:

In einer repräsentativen Stichprobe von wahlberechtigten Personen aus der Gemeinde Pöggstall soll sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Person befinden, die sich nicht an der Nationalratswahl 2019 beteiligt hat.

– Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Umfang n einer derartigen Stichprobe.

Lösung zur Aufgabe 4

Wahlbeteiligung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{779}{2\,000} \cdot 0{,}8087 + \frac{506}{2\,000} \cdot 0{,}7984 + \frac{360}{2\,000} \cdot 0{,}8417 + \frac{355}{2\,000} \cdot 0{,}8254 = 0{,}81499... \approx 81{,}50\ \%$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die prozentuelle Wahlbeteiligung richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

X ... Anzahl der Personen, die sich trotz Wahlberechtigung nicht an der Nationalratswahl 2019 beteiligt haben

$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0{,}81500...^n \geq 0{,}99$
$\Rightarrow \quad n \geq 22{,}51...$

Die Stichprobe muss mindestens 23 Personen umfassen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Mindestgröße der Stichprobe richtig bestimmt wird.

Aufgabe 5

Gewinnspiel

Ziel bei einem bestimmten Gewinnspiel ist es, mit einem fairen Würfel, dessen Seitenflächen mit den Augenzahlen von 1 bis 6 beschriftet sind, einen Sechser zu würfeln. (Ein Würfel heißt „fair“, wenn bei jedem Wurf unabhängig von den anderen Würfen gilt: Jede der Augenzahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf wie jede der anderen Augenzahlen.)
Spiel 1: Der Spieler würfelt so lange, bis er einen Sechser würfelt, höchstens jedoch dreimal.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler dreimal würfelt.

Leitfrage:

Als Variante (Spiel 2) schlägt Gregor vor, gleichzeitig mit drei Würfeln zu würfeln. Er behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, genau einen Sechser zu würfeln, bei Spiel 2 höher ist als bei Spiel 1.

– Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, genau einen Sechser zu würfeln, für beide Spiele und geben Sie an, ob Gregors Aussage richtig oder falsch ist.

Lösung zur Aufgabe 5

Gewinnspiel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 0{,}69\dot{4} = 69{,}\dot{4}\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Spiel 1:
$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} = 0{,}4212... \approx 42{,}1\ \%$

Spiel 2:
$3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216} = 0{,}347\dot{2} \approx 34{,}7\ \%$

Gregors Aussage ist falsch.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Spiele jeweils die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird und angegeben wird, dass Gregors Aussage falsch ist.