Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

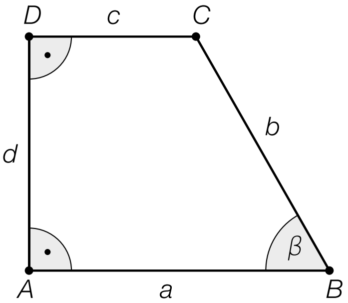
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Trapeze

In der nachstehenden Abbildung ist ein Trapez *ABCD* dargestellt.



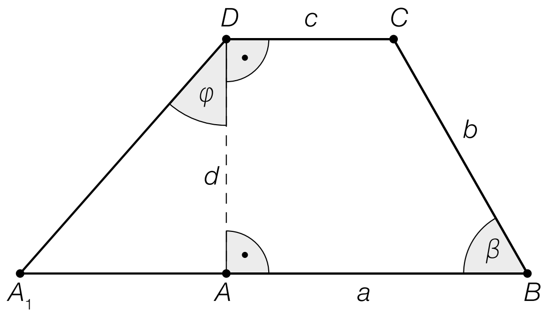
Aufgabenstellung:

– Geben Sie für obiges Trapez einen Ausdruck für cos(β) mithilfe der Seitenlängen an.

cos(β) = ____

Leitfrage:

Das Trapez *ABCD* wird durch Anfügen eines rechtwinkeligen Dreiecks vergrößert. Es entsteht das in der nachstehenden Abbildung dargestellte Trapez A_1BCD. Sein Flächeninhalt ist um 50 % größer als jener des ursprünglichen Trapezes.



– Geben Sie für dieses Trapez einen Ausdruck für tan(φ) mithilfe der Seitenlängen an.

tan(φ) = ____

Lösung zur Aufgabe 1

Trapeze

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\cos(\beta) = \frac{a - c}{b}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Ausdruck für $\cos(\beta)$ angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:

$\frac{\overline{A_1A} \cdot d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a + c) \cdot d}{2}$

$\overline{A_1A} = \frac{a + c}{2}$

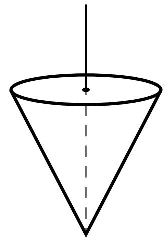
$\tan(\varphi) = \frac{a + c}{2 \cdot d}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Ausdruck für $\tan(\varphi)$ angegeben wird.

Aufgabe 2

Wassertank



Ein kegelförmiger Wassertank hat ein Fassungsvermögen von 6 m^3.
Er ist so montiert, dass die Spitze des Kegels der tiefste Punkt ist
(siehe nebenstehende Skizze).

Der Tank wird mit einer konstanten Zuflussrate von z (in m^3/h) bis zum Rand befüllt ($z > 0$).

Aufgabenstellung:

Die Funktion d beschreibt die Dauer des Füllvorgangs (in h) in Abhängigkeit von der Zuflussrate z.

– Geben Sie eine Gleichung der Funktion d an.

Leitfrage:

Der oben beschriebene Wassertank wird mit einer bestimmten Zuflussrate z_1 bis zum Rand befüllt.

Die Funktion V mit $V(h) = 0{,}03 \cdot \pi \cdot h^3$ beschreibt das Volumen des im Tank befindlichen Wassers in Abhängigkeit von der Höhe h des Wasserspiegels (h in m, $V(h)$ in m^3).

Nach einer Stunde beträgt die Höhe h des Wasserspiegels 2 m.

– Bestimmen Sie die Zuflussrate z_1 und die Dauer des Füllvorgangs.

Lösung zur Aufgabe 2

Wassertank

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$d(z) = \frac{6}{z}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$V(2) = 0{,}03 \cdot \pi \cdot 2^3 = 0{,}753... \approx 0{,}75$
Die Zuflussrate z_1 beträgt ca. 0,75 m³/h.

$\frac{6}{0{,}753...} = 7{,}9... \approx 8$

Die Dauer des Füllvorgangs beträgt ca. 8 Stunden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Zuflussrate und die Dauer des Füllvorgangs richtig bestimmt werden.

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion und Tangente

Die zweite Ableitung f'' einer Polynomfunktion f ist $f''(x) = 3 \cdot x - 6$.

Dabei ist t_W mit $t_W(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt $W = (x_W | -6)$.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie k.

Leitfrage:

– Geben Sie eine Gleichung von f an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 3

Ableitungsfunktion und Tangente

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad W = (2|-6)$

$-6 = k \cdot 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad k = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von k richtig bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$

mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \int (3 \cdot x - 6)\,\mathrm{d}x = 1{,}5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$
$f'(2) = -4 \quad \Rightarrow \quad c = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2$
$f(x) = \int (1{,}5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2)\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + d \quad \text{mit} \quad d \in \mathbb{R}$
$f(2) = -6 \quad \Rightarrow \quad d = -2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung angegeben und eine mögliche Vorgehensweise richtig erläutert wird.

Aufgabe 4

Zusammenhang zwischen BMI und Skilänge

Für den Body-Mass-Index (BMI) gilt: BMI = $\frac{m}{l^2}$ (in kg/m²). Dabei ist m die Masse in kg und l die Körpergröße in m.

Die nachstehende Tabelle enthält Daten von drei Skispringern in einer bestimmten Saison.

	Masse	Körpergröße
Andreas K.	64 kg	1,80 m
Stefan K.	56 kg	1,70 m
Gregor S.	63 kg	1,82 m

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Body-Mass-Indizes der drei Skispringer.

Leitfrage:

Liegt der BMI bei zumindest 21 kg/m², dann beträgt beim Skispringen die maximal erlaubte Skilänge 145 % der Körpergröße.

Liegt der BMI unter dem Wert 21 kg/m², wird die maximal erlaubte Skilänge folgendermaßen verkürzt:
Pro 0,125 kg/m² der Differenz zwischen 21 kg/m² und dem eigenen BMI wird der angegebene Prozentsatz (von 145 % der Körpergröße) um 0,5 Prozentpunkte verringert.

– Ermitteln Sie, welche maximal erlaubte Skilänge Andreas K. in dieser Saison verwenden durfte.

Lösung zur Aufgabe 4

Zusammenhang zwischen BMI und Skilänge

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\bar{x} = \frac{\frac{64}{1{,}80^2} + \frac{56}{1{,}70^2} + \frac{63}{1{,}82^2}}{3} = 19{,}383...$$

$\bar{x} \approx 19{,}38\ \text{kg/m}^2$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des arithmetischen Mittels richtig berechnet wird. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

BMI von Andreas K.: $\frac{64}{1{,}80^2} = 19{,}753...$

Anpassung der Skilänge an den BMI:

$\frac{21 - 19{,}753...}{0{,}125} = 9{,}975...$

$145\ \% - 9{,}975... \cdot 0{,}5\ \% = 140{,}012...\ \%$

$180 \cdot 1{,}40012... = 252{,}0...$

Die maximal erlaubte Skilänge von Andreas K. in dieser Saison beträgt ca. 252 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die maximal erlaubte Skilänge richtig ermittelt wird.

Aufgabe 5

Würfeln mit zwei Würfeln

Zwei farblich unterscheidbare faire Würfel werden gleichzeitig geworfen. (Ein Würfel ist „fair“, wenn bei jedem Wurf unabhängig von den anderen Würfen gilt: Jede der Augenzahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf wie jede der anderen Augenzahlen.)

Die Seitenflächen der beiden Würfel sind mit den Augenzahlen von 1 bis 6 beschriftet. Die Zufallsvariable X beschreibt die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X größer als 10 ist.

Leitfrage:

– Geben Sie an, welche Augensumme auf lange Sicht, also bei oftmaligem Würfeln mit diesen beiden Würfeln, am häufigsten auftritt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 100-maligem Würfeln mit diesen beiden Würfeln diese Augensumme höchstens 10-mal auftritt.

Lösung zur Aufgabe 5

Würfeln mit zwei Würfeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P(X > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}08\dot{3} = 8{,}\dot{3}\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Auf lange Sicht tritt die Augensumme 7 am häufigsten auf.

mögliche Begründung:
Für die Augensumme 7 gibt es die größte Anzahl an möglichen Versuchsausgängen:
(1;6), (6;1), (2;5), (5;2), (3;4) und (4;3).

$P(X = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Modellierung mittels Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$ ergibt:
Y ... Anzahl der Würfe, bei denen die Augensumme 7 ergibt
$P(Y \leq 10) = 0{,}04269... \approx 4{,}27\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Augensumme samt Begründung angegeben und die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.