Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

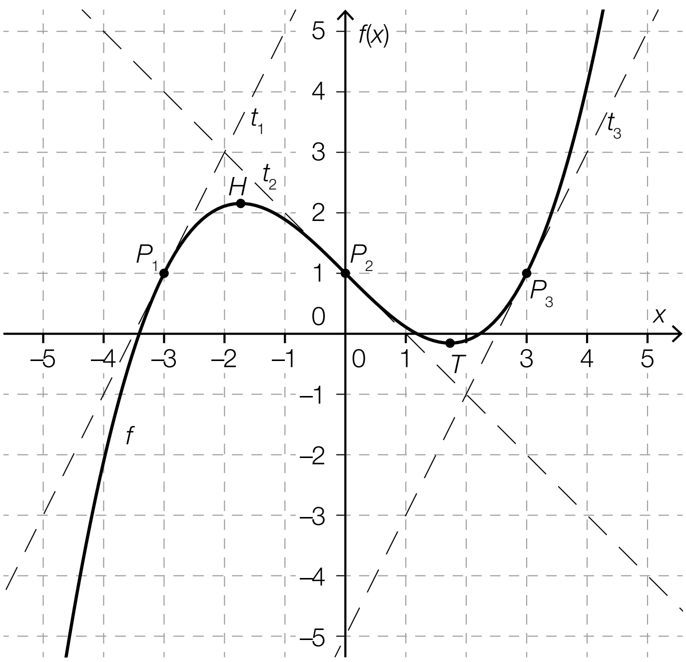
	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Tangenten

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f vom Grad 3 mit dem Hochpunkt H und dem Tiefpunkt T.
Die Geraden t_1, t_2 und t_3 sind Tangenten an den Graphen von f in den Punkten P_1, P_2 und P_3.

Die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie der Anstieg der jeweils zugehörigen Tangente sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

– Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden t_3 an.

Leitfrage:

– Erläutern Sie, welche Informationen die abgebildeten Tangenten in P_1, P_2 und P_3 sowie die Punkte H und T für den Graphen von f' liefern.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von f' ein.

Lösung zur Aufgabe 1

Tangenten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Parameterdarstellung:

$t_3\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

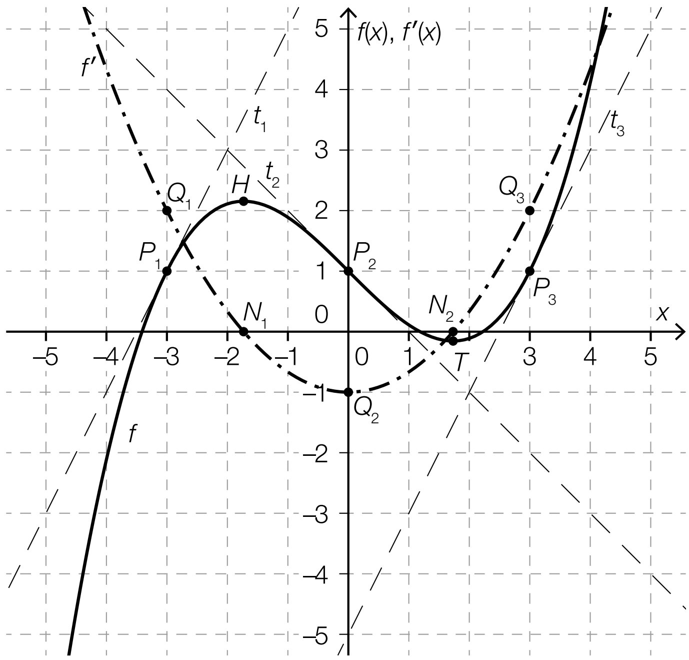
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Parameterdarstellung von t_3 angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Funktionswert der ersten Ableitung entspricht jeweils der Steigung der Tangente an den Graphen von f.
Der Graph von f' verläuft somit durch die Punkte $Q_1 = (-3|2)$, $Q_2 = (0|-1)$ und $Q_3 = (3|2)$.

Die Schnittpunkte N_1 und N_2 des Graphen von f' mit der x-Achse befinden sich an den Extremstellen des Graphen von f.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtige Informationen angegeben werden und der Graph von f' richtig eingezeichnet wird.

Der Graph von f' muss deutlich erkennbar durch die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 verlaufen und Nullstellen an den Extremstellen von f aufweisen.

Aufgabe 2

Fahrenheit

Mithilfe der linearen Funktion T_C mit $T_C(T_F) = \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)$ kann die Temperatur T_F (in Grad Fahrenheit (°F)) in die Temperatur T_C (in Grad Celsius (°C)) umgerechnet werden.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion T_C mit der senkrechten Achse und deuten Sie dessen Koordinaten im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

– Geben Sie eine Gleichung der Funktion T_F in Abhängigkeit von T_C (in °C) an.

Für eine bestimmte Temperatur gilt: ihr Wert in °F ist doppelt so groß wie jener in °C.

– Berechnen Sie den Wert dieser Temperatur T_C (in °C).

Lösung zur Aufgabe 2

Fahrenheit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$T_C(0) = \frac{5}{9} \cdot (0 - 32)$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt mit der senkrechten Achse: $\left(0 \middle| -\frac{160}{9}\right)$

mögliche Deutung:

0 °F entsprechen ca. –17,8 °C.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Schnittpunkt richtig ermittelt wird und seine Koordinaten richtig gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$T_F(T_C) = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$

$2 \cdot T_C = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \quad \Rightarrow \quad T_C = 160\ °\text{C}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung der Funktion T_F angegeben und der Temperaturwert richtig berechnet wird.

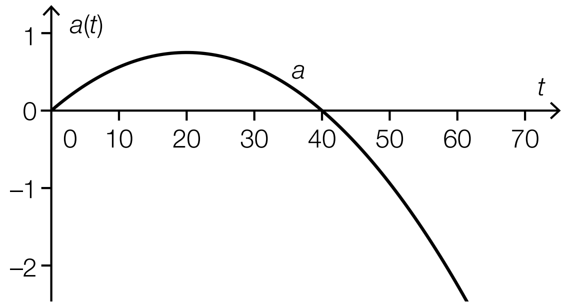
Aufgabe 3

U-Bahn-Fahrt

Ein Zug einer städtischen U-Bahn fährt zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Station *A* ab und hält erst wieder in der Station *B*.

Die Funktion $a\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0,\ t \mapsto a(t)$ modelliert in Abhängigkeit von der Zeit *t* die Beschleunigung des Zuges (*t* in s, *a*(*t*) in m/s²).
Dabei gilt: $a(t) = -\frac{3}{1600} \cdot t^2 + \frac{3}{40} \cdot t$

Der Graph von *a* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

– Interpretieren Sie $\int_0^{40} a(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

Es gilt die Beziehung $\int_0^{t_1} a(t)\,\mathrm{d}t = 0$ mit $t_1 \neq 0$.

– Interpretieren Sie t_1 im gegebenen Kontext.
– Geben Sie die Entfernung zwischen den Stationen *A* und *B* an.

Lösung zur Aufgabe 3

U-Bahn-Fahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Interpretation:

Dieses bestimmte Integral gibt die Geschwindigkeit an, die der Zug 40 s nach der Abfahrt von der Station *A* erreicht.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Integral richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Interpretationen:

Nach t_1 Sekunden hat der Zug die Geschwindigkeit $v = 0$ erreicht.

oder:

Der Zug kommt nach t_1 Sekunden in der Station *B* zum Stillstand.

$-\frac{1}{1600} \cdot t_1^3 + \frac{3}{80} \cdot t_1^2 = 0$

$t_1 = 60$ s

Die Funktion v mit $v(t)$ beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t die Geschwindigkeit des Zuges zum Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 60$.

Dabei gilt:

$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ mit $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{1}{1600} \cdot t^3 + \frac{3}{80} \cdot t^2$

$s(60) = \int_0^{60} v(t)\,\mathrm{d}t = 675$

Die Entfernung zwischen den Stationen *A* und *B* beträgt 675 m.

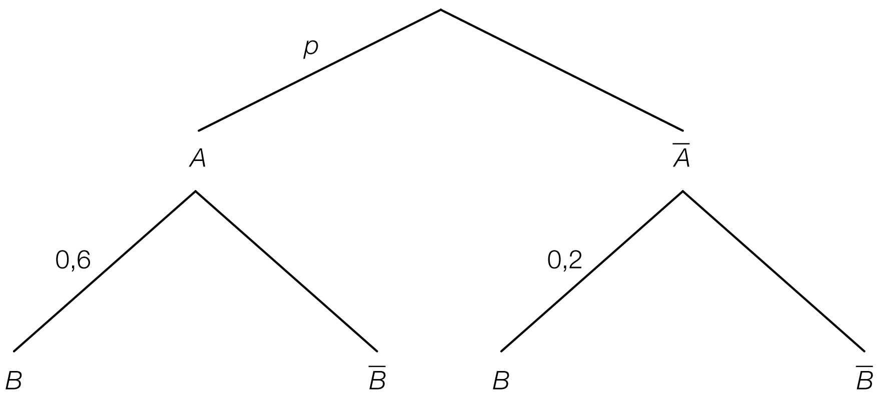
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn t_1 richtig interpretiert wird und die richtige Entfernung zwischen den Stationen angegeben wird.

Aufgabe 4

Baumdiagramm

In der nachstehenden Abbildung ist ein Baumdiagramm für ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dargestellt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A eintritt, beträgt p.



Aufgabenstellung:

– Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für das Eintreten von Ereignis B in Abhängigkeit von p an.

$P(B) =$ ____

Leitfrage:

– Bestimmen Sie den Wert von p so, dass $P(B)$ gleich 0,3 ist.

– Geben Sie den größtmöglichen Wert an, den die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ annehmen kann.

Lösung zur Aufgabe 4

Baumdiagramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P(B) = p \cdot 0{,}6 + (1 - p) \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \cdot p + 0{,}2$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit $P(B)$ angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$0{,}3 = 0{,}4 \cdot p + 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}25$

$P(B)$ nimmt bei $p = 1$ den größtmöglichen Wert an. Dabei gilt: $P(B) = 0{,}6$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von p richtig bestimmt und der richtige größtmögliche Wert von $P(B)$ angegeben wird.

Aufgabe 5

Sprachen

Weltweit sprechen ca. 1,5 Milliarden Menschen Englisch und ca. 420 Millionen Menschen Spanisch. Nur jeder vierte Englisch sprechende Mensch hat Englisch als Muttersprache erlernt. Bei den Spanisch sprechenden Menschen sind es elf von vierzehn Menschen, die Spanisch als Muttersprache erlernt haben.

Aufgabenstellung:

Von den Englisch sprechenden Menschen werden sieben Personen zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt.

– Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau drei dieser sieben Personen Englisch als Muttersprache erlernt haben.

Leitfrage:

Drei Englisch sprechende und zwei Spanisch sprechende Personen werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt.

Die ausgewählten Englisch sprechenden Personen sprechen nicht Spanisch und die ausgewählten Spanisch sprechenden Personen sprechen nicht Englisch.

– Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau vier dieser fünf Personen diese Sprache als Muttersprache erlernt haben.

Lösung zur Aufgabe 5

Sprachen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{7}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^4 = 0{,}1730... \approx 17{,}3\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{3}{14} \cdot 2}_{①} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{11}{14}}_{②} = \frac{165}{1792} = 0{,}0920... \approx 9{,}2\ \%$$

① Wahrscheinlichkeit, dass alle Englisch sprechenden Personen und eine Spanisch sprechende Person ihre Sprache als Muttersprache erlernt haben

② Wahrscheinlichkeit, dass zwei Englisch sprechende Personen und alle Spanisch sprechenden Personen ihre Sprache als Muttersprache erlernt haben

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.