Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Punkte und Geraden

Eine Gerade g verläuft durch die beiden Punkte $A = (1|7|3)$ und $B = (6|-7|1)$.

Aufgabenstellung:

Für den Punkt C gilt: $C = (x_C|1|-3)$

– Ermitteln Sie alle Werte für die Koordinate x_C des Punktes C so, dass die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ einen rechten Winkel einschließen.

Leitfrage:

Für den Punkt D gilt: $D = (x_D|y_D|-3)$

– Ermitteln Sie die Koordinaten x_D und y_D des Punktes D so, dass der Punkt D auf der Geraden g liegt.

– Geben Sie an, in welchem Verhältnis der Punkt B die Strecke $\overline{AD}$ teilt, und begründen Sie Ihre Aussage.

Lösung zur Aufgabe 1

Punkte und Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 - x_C \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 - x_C \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_C^2 - 7 \cdot x_C - 18 = 0$$

$\Rightarrow \quad x_C = -2 \quad$ bzw. $\quad x_C = 9$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Werte für x_C richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z_D = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = 3 - 2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 3$$
$$x_D = 1 + 5 \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_D = 16$$
$$y_D = 7 - 14 \cdot t \quad \Rightarrow \quad y_D = -35$$

Der Punkt B teilt die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis 1 : 2.

mögliche Begründung:
$t = 3 \quad \Rightarrow \quad D = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}$

Der Punkt D ist also dreimal so weit vom Punkt A entfernt wie der Punkt B.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Koordinaten richtig ermittelt werden und ein richtiges Verhältnis mit einer richtigen Begründung angegeben wird.

Aufgabe 2

Umfang und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks

Die Funktion u beschreibt den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge x. Dabei werden x und $u(x)$ in cm angegeben.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Wert von $\frac{u(5) - u(1)}{u(1)}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

Die Funktion h beschreibt die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit vom Umfang u.

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von h und geben Sie den Funktionstyp dieser Funktion an.

$h(u) =$ ____

Lösung zur Aufgabe 2

Umfang und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$u(x) = 3 \cdot x$

$\frac{u(5) - u(1)}{u(1)} = \frac{15 - 3}{3} = 4$

mögliche Interpretation:
Wird die Seitenlänge von 1 cm auf 5 cm vergrößert, so nimmt der Umfang des Dreiecks um 400 % zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Terms richtig berechnet wird und eine richtige Interpretation im gegebenen Kontext erfolgt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$h(x) = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$

$\Rightarrow \quad h(u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{u}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot u$

Die Funktion h ist eine lineare Funktion.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Funktionsgleichung richtig ermittelt und der richtige Funktionstyp angegeben wird.

Aufgabe 3

Polynomfunktion

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$ mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, wie viele Extremstellen und wie viele Wendestellen die Funktion f maximal haben kann, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

– Bestimmen Sie die Wendestellen in Abhängigkeit von den Parametern.
– Argumentieren Sie, warum es für $b \neq 0$ auf jeden Fall mindestens eine Wendestelle gibt, und geben Sie an, in welchem Fall es mehr als eine Wendestelle gibt.

Lösung zur Aufgabe 3

Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Funktion f hat maximal vier Extremstellen und maximal drei Wendestellen.
Die Funktion f hat den Grad $n = 5$, daher ist die maximale Anzahl der Extremstellen $n - 1 = 4$ und die maximale Anzahl der Wendestellen $n - 2 = 3$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige maximale Anzahl der Extremstellen, die richtige maximale Anzahl der Wendestellen und jeweils eine richtige Begründung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f''(x) = 20 \cdot a \cdot x^3 + 6 \cdot b \cdot x$
$f'''(x) = 60 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b$
$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{\frac{-3 \cdot b}{10 \cdot a}};\ x_3 = +\sqrt{\frac{-3 \cdot b}{10 \cdot a}}$

$f'''(0) = 6 \cdot b \neq 0$ für $b \neq 0$
$f'''\left(-\sqrt{\frac{-3 \cdot b}{10 \cdot a}}\right) = f'''\left(\sqrt{\frac{-3 \cdot b}{10 \cdot a}}\right) = 60 \cdot a \cdot \left(\frac{-3 \cdot b}{10 \cdot a}\right) + 6 \cdot b = -12 \cdot b \neq 0$ für $b \neq 0$

Es gibt in jedem Fall eine Wendestelle, da $x_1 = 0$ unabhängig von den Parametern ist.

Die Wendestellen bei x_2 und x_3 gibt es nur dann, wenn a und b unterschiedliche Vorzeichen haben (also der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist und somit reelle Lösungen existieren).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wendestellen richtig bestimmt werden, richtig argumentiert wird, dass es immer eine Wendestelle bei $x_1 = 0$ gibt, und richtig angegeben wird, in welchem Fall es mehr als eine Wendestelle gibt. Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn der Nachweis, dass $f'''(x_W) \neq 0$ gilt, fehlt.

Aufgabe 4

Bremswirkung

Ein Autofahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s, bevor er zu bremsen beginnt.
Zwei Sekunden nach Einsetzen der Bremswirkung beträgt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs nur noch 21 m/s.

Die Funktion v mit $v(t) = k \cdot t + d$ modelliert die Geschwindigkeit des Fahrzeugs t Sekunden nach Einsetzen der Bremswirkung ($v(t)$ in m/s).

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von v und interpretieren Sie den Wert von k im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

Der Autofahrer ist mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s unterwegs und sieht in 130 m Entfernung ein Hindernis. Erst nach einer Reaktionszeit von einer Sekunde kann er den oben beschriebenen Bremsvorgang einleiten.

– Geben Sie an, ob das Fahrzeug rechtzeitig anhält, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zur Aufgabe 4

Bremswirkung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v(0) = 35$; $v(2) = 21$
$\Rightarrow \quad v(t) = -7 \cdot t + 35$

mögliche Interpretationen:

- Die Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 7 m/s ab.
- Die (Brems-)Beschleunigung beträgt –7 m/s^2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Funktionsgleichung von v ermittelt und der Wert von k richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Das Fahrzeug hält rechtzeitig an.

mögliche Begründung:
$v(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 5$
$s(5) = \int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = -3{,}5 \cdot t^2 + 35 \cdot t \Big|_0^5 = 87{,}5$
Nach einer Sekunde hat das Fahrzeug (ungebremst) 35 m zurückgelegt, somit bleiben noch 95 m bis zum Hindernis. Bis zum Stillstand vergehen 5 Sekunden und in dieser Zeit legt das Fahrzeug nur eine Strecke von 87,5 m zurück.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben wird, dass das Fahrzeug rechtzeitig anhält, und eine richtige Begründung erfolgt.

Aufgabe 5

Menü

Ein Gasthaus bietet sein Menü in den Größen klein, mittel und groß an.

Das kleine Menü wird von 70 % der Kunden gewählt, jeder 10. Kunde wählt im Schnitt das große Menü und die restlichen Kunden wählen das mittlere Menü.
Unabhängig von der Menüwahl nehmen 30 % dieser Kunden zusätzlich einen Salat.

Es gibt 6 verschiedene Bestellvarianten, da jede der 3 Menüvarianten mit oder ohne Salat bestellt werden kann.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie für jede der beiden nachstehenden Bestellvarianten, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie auftritt, und ergänzen Sie diese in der Tabelle.

Bestellung	Wahrscheinlichkeit
kleines Menü ohne Salat	
großes Menü mit Salat	

Leitfrage:

Die Preise für das kleine, mittlere bzw. große Menü (ohne Salat) betragen 7 Euro, 8 Euro bzw. 9 Euro, ein Salat kostet 3 Euro.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Kosten für eine Bestellung.

– Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten einer Bestellung um höchstens 20 % von diesem Erwartungswert abweichen.

Lösung zur Aufgabe 5

Menü

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Bestellung	Wahrscheinlichkeit
kleines Menü ohne Salat	$0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$
großes Menü mit Salat	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Wahrscheinlichkeiten angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$E(X) = 0{,}49 \cdot 7 + 0{,}21 \cdot 10 + 0{,}14 \cdot 8 + 0{,}06 \cdot 11 + 0{,}07 \cdot 9 + 0{,}03 \cdot 12$
$E(X) = 8{,}30$ Euro

Kostenintervall für $E(X) \pm 0{,}2 \cdot E(X)$: [6,64 Euro; 9,96 Euro]

Die Kosten aller Menüs ohne Salat liegen in diesem Intervall, das sind 70 % aller Bestellungen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten pro Bestellung um höchstens 20 % vom Erwartungswert abweichen, beträgt 70 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Erwartungswert richtig bestimmt und die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.