Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

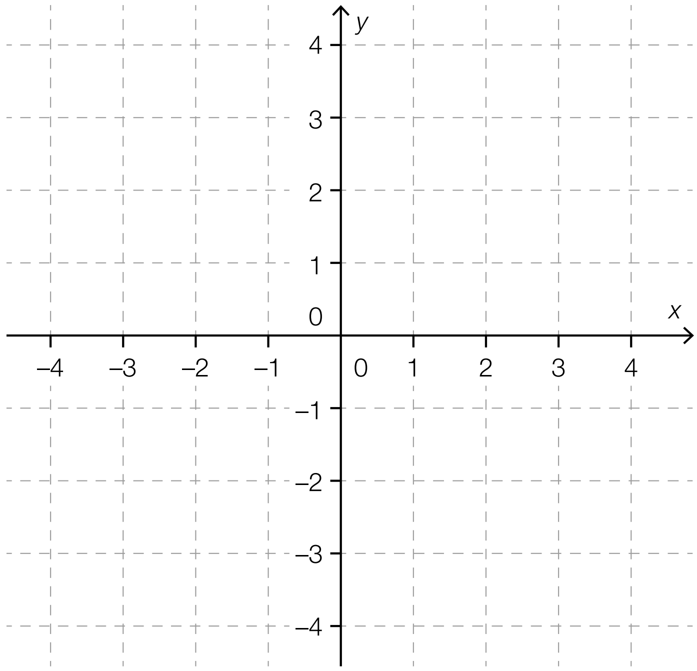
Aufgabe 1

Lineare Gleichung und Gleichungssystem

Gegeben ist die lineare Gleichung $2 \cdot x - 3 \cdot y = 6$ in den Variablen x und y.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Lösungsmenge grafisch dar und ermitteln Sie zwei verschiedene Lösungen der gegebenen Gleichung.



Leitfrage:

Die gegebene Gleichung bildet mit der Gleichung $4 \cdot x + b \cdot y = 8$ ($b \in \mathbb{R}$) ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x und y.

– Begründen Sie, warum die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems maximal ein Element hat.
– Geben Sie an, für welche Werte von b das Gleichungssystem keine Lösung hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

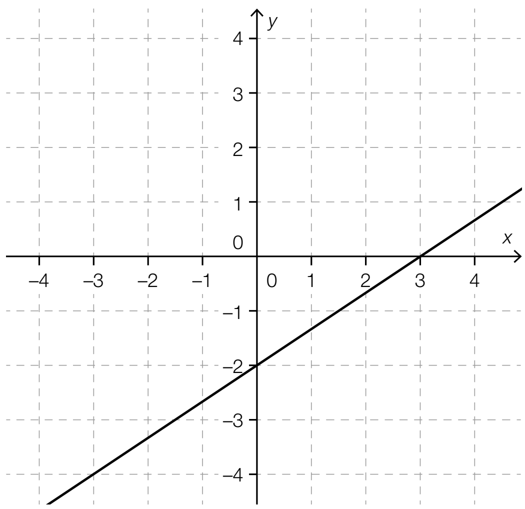
Lösung zur Aufgabe 1

Lineare Gleichung und Gleichungssystem

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Lösungsmenge der linearen Gleichung beinhaltet alle Punkte, die auf der dargestellten Geraden liegen.

zwei mögliche Lösungen der Gleichung:
$(0|-2)$ und $(3|0)$



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Lösungsmenge der Gleichung als Gerade dargestellt wird und zwei richtige Lösungen angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Begründung:

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann null, ein oder unendlich viele Elemente haben. Für den Fall, dass es unendlich viele Lösungen gibt, muss eine Gleichung ein Vielfaches der anderen sein. Dies ist beim gegebenen Gleichungssystem nicht der Fall.

Ermittlung von b und mögliche Erläuterung mithilfe der Koeffizienten:

$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$
$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$
Ein Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn $a_2 = k \cdot a_1$, $b_2 = k \cdot b_1$ und $c_2 \neq k \cdot c_1$ $(k \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ gelten. Das ist für $b = -6$ der Fall.

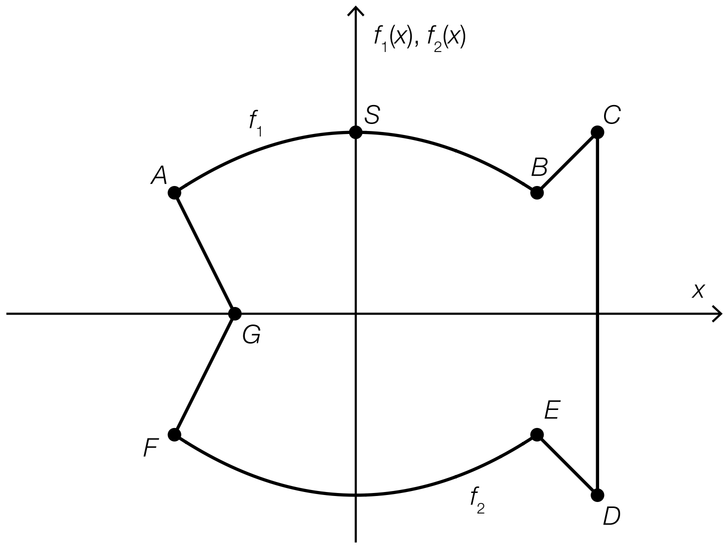
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Begründung sowie der richtige Wert von b angegeben werden und eine richtige Vorgehensweise erläutert wird.
Eine Erläuterung unter Verwendung der Begriffe *identische, parallele* und *schneidende Geraden* ist ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Werbeplakat

In der nachstehenden Abbildung ist der Umriss eines Werbeplakats für ein Fischrestaurant dargestellt.



Der Umriss des Werbeplakats wird von den Graphen der Funktionen f_1 und f_2 und fünf Strecken begrenzt.

Der Graph von f_1 und der Graph von f_2 liegen symmetrisch zur x-Achse und es gilt:
$f_1(x) = a \cdot x^2 + c$ ($a, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$)

Für die Koordinaten der eingezeichneten Punkte gilt:
$S = (0|m)$, $A = (-m|m - 1)$, $B = (m|m - 1)$, $C = (m + 1|m)$, $D = (m + 1|-m)$ und $G = (-m + 1|0)$

Aufgabenstellung:

– Geben Sie a und c in Abhängigkeit von m an.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie einen Term für den Wert des Flächeninhalts dieses Werbeplakats in Abhängigkeit von m und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 2

Werbeplakat

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f_1(x) = a \cdot x^2 + c$
$f_1(0) = m \quad \Rightarrow \quad c = m$
$f_1(m) = m - 1$

$m - 1 = a \cdot m^2 + m \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{m^2}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn *a* und *c* richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:
Den Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächenstück A_1, das vom Graphen von f_1 und vom Graphen von f_2 im Intervall $[-m; m]$ begrenzt wird, die Dreiecksfläche A_{AFG} subtrahiert und die Trapezfläche A_{BCDE} addiert.

$$A_1 = 4 \cdot \int_0^m f_1(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^m \left(-\frac{1}{m^2} \cdot x^2 + m\right)\mathrm{d}x = 4 \cdot m^2 - \frac{4 \cdot m}{3}$$

$$A_{AFG} = 2 \cdot \frac{m-1}{2} = m - 1$$

$$A_{BCDE} = \frac{[2 \cdot m + 2 \cdot (m-1)] \cdot 1}{2} = 2 \cdot m - 1$$

$$A = A_1 - A_{AFG} + A_{BCDE}$$

$$\Rightarrow \quad A = 4 \cdot m^2 - \frac{4 \cdot m}{3} - (m-1) + 2 \cdot m - 1 \left(= 4 \cdot m^2 - \frac{m}{3}\right)$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Term für den Flächeninhalt angegeben und eine richtige Vorgehensweise erläutert wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Bewegung eines Fahrzeugs

Die Funktion $s: [0; 15] \to \mathbb{R}$ beschreibt den zurückgelegten Weg eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit t.
Dabei gilt: $s(t) = -\frac{4}{45} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern.

In der nachstehenden Tabelle sind die Durchschnittsgeschwindigkeiten für einzelne Zeitintervalle angeführt.

Zeitintervall	Durchschnittsgeschwindigkeit in m/s
[0; 3)	5,2
[3; 7,5)	13,2
[7,5; 9)	14,8
[9; 15]	$\bar{v}_4$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_4$ des Fahrzeugs im Zeitintervall [9; 15].

Leitfrage:

Berechnet man das arithmetische Mittel der vier Durchschnittsgeschwindigkeiten aus der obigen Tabelle, so erhält man eine Zahl m.

– Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Zahl m mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Zeitintervall [0; 15] nicht übereinstimmt.

Lösung zur Aufgabe 3

Bewegung eines Fahrzeugs

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\overline{v}_4 = \frac{s(15) - s(9)}{15 - 9}$$
$$\overline{v}_4 = 8{,}8$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}_4$ beträgt 8,8 m/s.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Durchschnittsgeschwindigkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$m = \frac{5{,}2 + 13{,}2 + 14{,}8 + 8{,}8}{4} = 10{,}5$$

$$\overline{v} = \frac{3 \cdot 5{,}2 + 4{,}5 \cdot 13{,}2 + 1{,}5 \cdot 14{,}8 + 6 \cdot 8{,}8}{15} = 10 \quad \text{bzw.} \quad \overline{v} = \frac{s(15)}{15} = 10$$

Die Zahl m und die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ stimmen nicht überein.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Zahl m und die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ richtig berechnet werden.

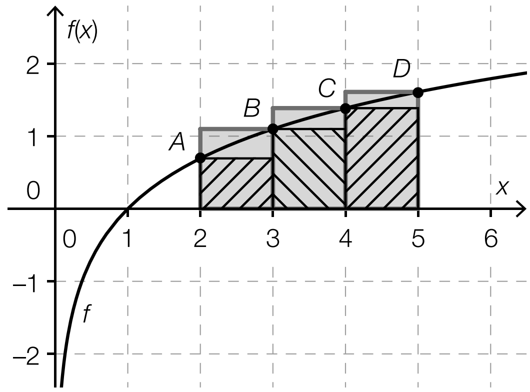
Aufgabe 4

Approximation einer Fläche

Die unten stehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Funktion f. Weiters sind vier Punkte, die auf diesem Graphen liegen, gekennzeichnet:

$A = (2|0{,}69)$
$B = (3|1{,}1)$
$C = (4|1{,}39)$
$D = (5|1{,}61)$

In dieser Abbildung sind zusätzlich noch sechs Rechtecke (drei schraffierte und drei grau hinterlegte) eingezeichnet, die jeweils eine Seite auf der x-Achse und eine Ecke in A, B, C oder D haben.



Aufgabenstellung:

– Schätzen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse im Intervall [2; 5] einschließt, mithilfe der Rechtecke ab.

Jemand gibt für diesen Flächeninhalt den Wert 3 an.

– Geben Sie an, ob diese Angabe richtig sein kann, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

A_1 ... arithmetisches Mittel der Inhalte der beiden Rechtecke über [2; 3]
A_2 ... arithmetisches Mittel der Inhalte der beiden Rechtecke über [3; 4]
A_3 ... arithmetisches Mittel der Inhalte der beiden Rechtecke über [4; 5]

– Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$\frac{1}{3} \cdot \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$$

Lösung zur Aufgabe 4

Approximation einer Fläche

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Gesamtfläche der Untersummen-Rechtecke: 3,18 Flächeneinheiten
Gesamtfläche der Obersummen-Rechtecke: 4,1 Flächeneinheiten
Als Schätzwert ist jeder Wert zwischen 3,18 und 4,1 zulässig.

Die Angabe des Wertes 3 ist nicht richtig, da der Flächeninhalt auf jeden Fall größer als die Untersumme sein muss.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Schätzwert und eine der Lösungserwartung entsprechende Begründung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Aussage ist falsch.

mögliche Begründung:
Die Funktion f ist durchgehend rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt) und somit verlaufen die Strecken AB, BC und CD zur Gänze unterhalb von f.
$\Rightarrow \quad \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x > A_1 + A_2 + A_3$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Aussage als falsch erkannt und eine richtige Begründung dafür gegeben wird.

Aufgabe 5

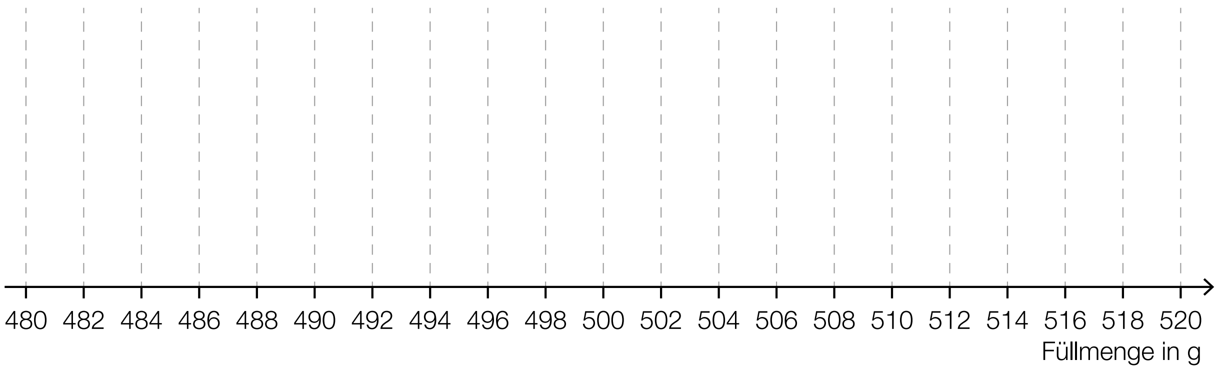
Abfüllanlage

Ein bestimmtes Pulver wird durch einen Automaten in Packungen mit einer Sollmenge von 500 g abgefüllt. Bei der Kontrolle einer Tagesproduktion wird eine Zufallsstichprobe von 25 Packungen entnommen und der Inhalt gewogen (Füllmenge in g). Die Ergebnisse der Messungen sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Füllmenge in g	482	488	490	498	500	502	510	514	516	518
Anzahl	2	1	2	3	2	3	5	3	2	2

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie im nachstehenden Diagramm die Daten der obigen Tabelle in Form eines Boxplots (Kastenschaubilds) dar.



Leitfrage:

Aus Erfahrung weiß man, dass 20 % der von diesem Automaten abgefüllten Packungen weniger als die angegebene Füllmenge von 500 g beinhalten.

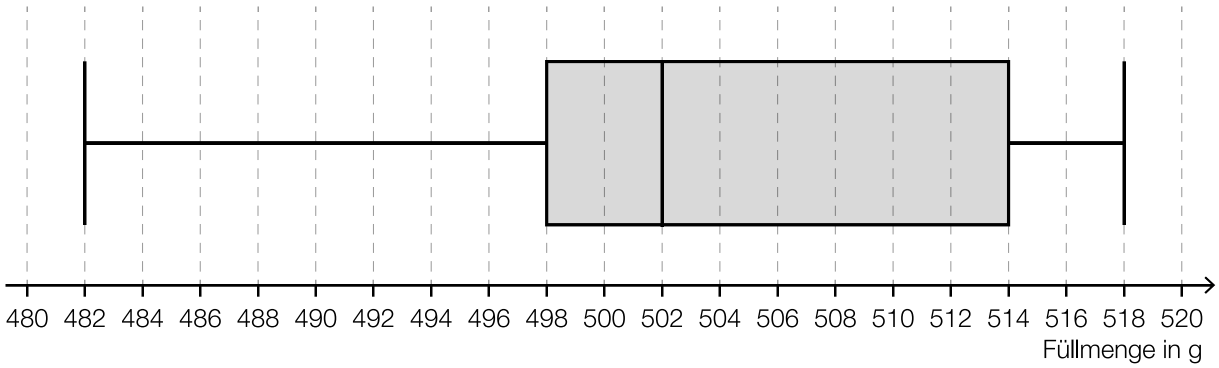
Eine weitere Zufallsstichprobe von 25 Packungen wird entnommen. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Packungen mit einer Füllmenge von weniger als 500 g an.

– Geben Sie den Erwartungswert für diese Anzahl an.
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Vergleich zur ersten Zufallsstichprobe mehr Packungen eine geringere Füllmenge als 500 g beinhalten.

Lösung zur Aufgabe 5

Abfüllanlage

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Boxplot richtig dargestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Erwartungswert: 5

$n = 25$ und $p = 0,2$
$P(X \geq 9) = 0,0467... \approx 0,047$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 4,7 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Erwartungswert und die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben werden.