Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Busreise

Für eine Busreise stehen 55 Plätze zur Verfügung.
Die Fixkosten, die das Reisebüro unabhängig von den teilnehmenden Personen hat, betragen K Euro.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von g Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von f Euro.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie einen Term an, mit dem der Gewinn des Reisebüros für eine Busreise ermittelt werden kann, wenn x Plätze gebucht werden.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie den Parameter g in Abhängigkeit von den Fixkosten K, wenn bei einer Teilnahme von 45 Personen der Gewinn 1.000 Euro beträgt und sich dieser bei einer Teilnahme von 50 Personen verdoppelt.

Lösung zur Aufgabe 1

Busreise

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Term:
$g \cdot x - f \cdot (55 - x) - K$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1\,000 = 45 \cdot g - 10 \cdot f - K$

$2\,000 = 50 \cdot g - 5 \cdot f - K$

$g = \frac{1}{55} \cdot K + \frac{600}{11}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Parameter g in Abhängigkeit von K angegeben wird.

Aufgabe 2

Proportionalitäten

Direkte und indirekte Proportionalitäten können durch Funktionen beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

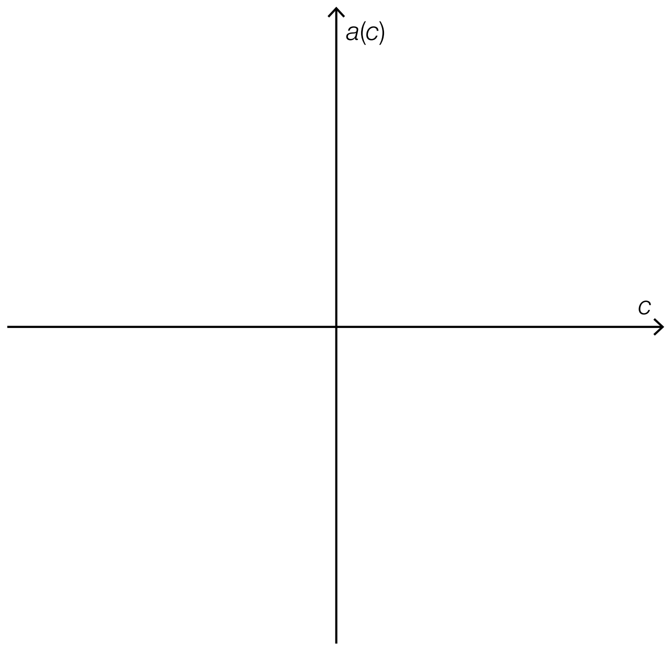
Der Graph einer Funktion f, die eine indirekte Proportionalität beschreibt, verläuft durch den Punkt $(4|3)$.

– Geben Sie eine Funktionsgleichung von f an.

Leitfrage:

Gegeben ist die Funktion $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a(c) = \frac{b \cdot c}{d \cdot e}$ und den Konstanten $b, d, e \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

– Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von a und erläutern Sie für den Fall $b > 0$, welche Auswirkungen die Vorzeichen von d bzw. e auf den Verlauf des Graphen der Funktion a haben.



Lösung zur Aufgabe 2

Proportionalitäten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = \frac{k}{x}$

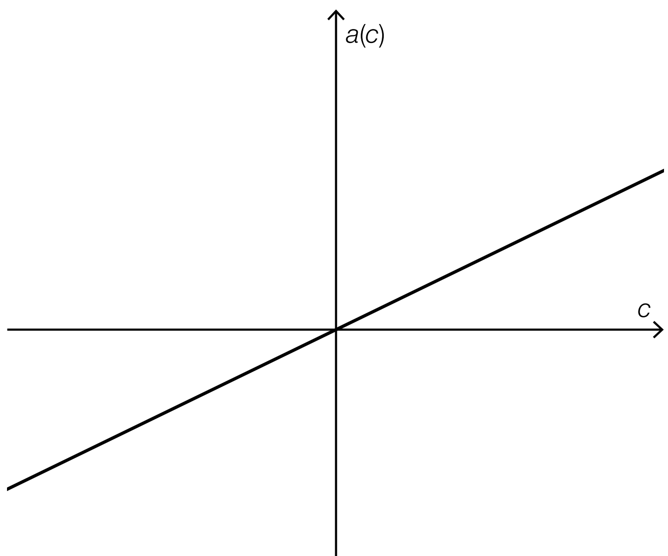
$3 = \frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 12$

$f(x) = \frac{12}{x}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Der Graph der Funktion *a* in Abhängigkeit von *c* stellt eine Gerade durch den Ursprung dar.
Haben *d* und *e* das gleiche Vorzeichen, so ist der Graph von *a* eine steigende Gerade.
Haben *d* und *e* verschiedene Vorzeichen, so ist der Graph von *a* eine fallende Gerade.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger möglicher Graph und die richtigen Auswirkungen der Vorzeichen der konstanten Werte auf den Verlauf des Graphen angegeben werden.

Aufgabe 3

Naturpark

Die Anzahl N_t einer bestimmten Tierart in einem Naturpark wird jährlich ermittelt.

Zu Beginn der Erhebungen werden $N_0 = 180$ Tiere gezählt, ein Jahr später werden $N_1 = 207$ Tiere gezählt. Es wird angenommen, dass die maximale Anzahl der Tiere dieser Tierart im Naturpark eine Kapazitätsgrenze K nicht übersteigen kann.

Aufgabenstellung:

Das Wachstum der Tierpopulation kann mithilfe der Differenzengleichung
$N_{t+1} = N_t + 0{,}0003 \cdot N_t \cdot (K - N_t)$ modelliert werden.

– Ermitteln Sie die Kapazitätsgrenze K für diese Tierart.

Leitfrage:

Die Anzahl der Tiere kann auch durch eine Funktion N in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

Dabei gilt: $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-\lambda \cdot K \cdot t}}$

$N(t)$ ... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt t mit t in Jahren
N_0 ... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt $t = 0$
λ ... Wachstumskonstante ($\lambda \in \mathbb{R}^+$)

– Ermitteln Sie den Wert der Wachstumskonstante λ.
– Geben Sie (mithilfe der Funktionsgleichung von N) eine Gleichung an, mit der man berechnen kann, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Tiere nur mehr 10 % unter der Kapazitätsgrenze liegt.

Lösung zur Aufgabe 3

Naturpark

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$207 = 180 + 0{,}0003 \cdot 180 \cdot (K - 180) \quad \Rightarrow \quad K = 680$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von K angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aus $N(1) = 207$, $N_0 = 180$ und $K = 680$ folgt $\lambda = 0{,}000287... \approx 0{,}00029$.

$N(t) = 680 \cdot 0{,}9$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von λ ermittelt und eine richtige Gleichung angegeben wird.

Aufgabe 4

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Für eine Polynomfunktion f dritten Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ gelten die folgenden Bedingungen:

$f(-2) = 1$
$f'(-2) = 0$
$f''(-2) = 3$

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, welcher charakteristische Punkt (Hochpunkt, Tiefpunkt oder Wendepunkt) des Graphen von f durch die angeführten Bedingungen festgelegt ist.
– Geben Sie weiters seine Koordinaten an und begründen Sie, warum genau eine weitere Stelle x_1 existieren muss, für die die Bedingung $f'(x_1) = 0$ gilt.

Leitfrage:

– Geben Sie eine Funktionsgleichung von f an, wenn $d = 0$ ist, und begründen Sie, warum genau eine Stelle x_2 existiert, für die die Bedingung $f''(x_2) = 0$ gilt.

Lösung zur Aufgabe 4

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Graph der Funktion f hat im Punkt $(-2|1)$ einen Tiefpunkt.

mögliche Begründung:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat entweder keine Extremstelle oder genau 2 Extremstellen. Da der Graph der Funktion f an der Stelle –2 einen Tiefpunkt hat, muss es eine weitere Extremstelle x_1 geben, an der gilt: $f'(x_1) = 0$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Punktes P richtig angegeben werden, wenn erkannt wird, dass es sich dabei um einen Tiefpunkt handelt, und wenn eine richtige Begründung angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$f(x) = -\frac{7}{8} \cdot x^3 - \frac{15}{4} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x$$

mögliche Begründung:

Da die 2. Ableitungsfunktion von f eine lineare Funktion ist und diese wegen $a \neq 0$ nicht konstant ist, kann sie nur eine Nullstelle haben. D. h., es gibt genau eine Stelle x_2 mit $f''(x_2) = 0$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Funktionsgleichung von f sowie eine richtige Begründung angegeben werden.

Aufgabe 5

Produktion von Hemden

Bei der Produktion von Hemden treten erfahrungsgemäß drei verschiedene Fehler A, B und C unabhängig voneinander auf.

Für die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens dieser Fehler gilt:

$P(A) = a$
$P(B) = b$
$P(C) = c$

Aufgabenstellung:

Ein Hemd wird zufällig ausgewählt und überprüft.

– Berechnen Sie für $a = 5\ \%$, $b = 8\ \%$ und $c = 10\ \%$ die Wahrscheinlichkeit, dass das ausgewählte Hemd genau einen der drei Fehler aufweist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Leitfrage:

– Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass von fünf zufällig ausgewählten Hemden keines den Fehler A aufweist.
– Geben Sie an, welche Wahrscheinlichkeit im gegebenen Kontext durch den Term $a \cdot b \cdot (1 - c)$ beschrieben wird.

Lösung zur Aufgabe 5

Produktion von Hemden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wahrscheinlichkeit, dass Fehler A auftritt und Fehler B und C nicht auftreten: $0{,}05 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}9$
Wahrscheinlichkeit, dass Fehler B auftritt und Fehler A und C nicht auftreten: $0{,}95 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}9$
Wahrscheinlichkeit, dass Fehler C auftritt und Fehler A und B nicht auftreten: $0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}1$

Diese drei Ereignisse sind disjunkt und daher gilt:
$0{,}05 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}9 + 0{,}95 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}9 + 0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}1 = 0{,}1972 = 19{,}72\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit und eine richtige Vorgehensweise angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Term:
$(1 - a)^5$

Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Hemd die Fehler A und B aufweist und den Fehler C nicht aufweist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Term und eine richtige Interpretation angegeben werden.