Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Zahlen sind Teil einer oder mehrerer Zahlenmengen.

Aufgabenstellung:

– Kreuzen Sie für jede nachstehend angeführte Zahl an, welcher Zahlenmenge bzw. welchen Zahlenmengen ihr Wert zugeordnet werden kann.

	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}^+$
$\frac{\pi}{2}$			
$3 \cdot \sqrt{3}$			
$-\frac{16}{8}$			
$1{,}23 \cdot 10^{-3}$			

Leitfrage:

Ist das Ergebnis einer Rechenoperation zweier beliebiger Zahlen einer bestimmten Menge wieder ein Element dieser Menge, so nennt man diese Menge abgeschlossen bezüglich dieser Rechenoperation.
Zum Beispiel: Für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $a \cdot b \in \mathbb{N}$. Somit ist die Menge der natürlichen Zahlen abgeschlossen bezüglich der Multiplikation.

Betrachtet werden die Rechenoperationen Subtraktion, Multiplikation und Quadratwurzelziehen.

– Geben Sie für die Zahlenmenge $\mathbb{Q}^-$ an, ob sie bezüglich der angeführten Rechenoperationen abgeschlossen ist, und begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}^+$
$\frac{\pi}{2}$			⨯
$3 \cdot \sqrt{3}$			⨯
$-\frac{16}{8}$	⨯	⨯	
$1{,}23 \cdot 10^{-3}$		⨯	⨯

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede Zahl die entsprechende(n) Zahlenmenge(n) angekreuzt ist/sind.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Abgeschlossenheit einer Menge bezüglich einer Rechenoperation ist genau dann nicht gegeben, wenn es zumindest ein Gegenbeispiel dafür gibt.

Die Zahlenmenge $\mathbb{Q}^-$ ist bezüglich keiner der angeführten Operationen abgeschlossen, weil z. B.:

- Subtraktion: $-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Q}^-$
- Multiplikation: $-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Q}^-$
- Quadratwurzelziehen: $\sqrt{-\frac{1}{6}} \notin \mathbb{Q}^-$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle drei Rechenoperationen richtig erkannt wird, dass keine Abgeschlossenheit vorliegt, und dies jeweils richtig begründet wird.

Aufgabe 2

Lösungsfälle bei quadratischen Gleichungen

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 2 \cdot x = p$ mit $p \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie alle Werte von p an, für die die angegebene Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$ lösbar ist.

Leitfrage:

– Geben Sie die möglichen Lösungsfälle für eine quadratische Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ an und deuten Sie diese grafisch, indem Sie für jeden Lösungsfall einen passenden Graphen einer quadratischen Funktion skizzieren.

Lösung zur Aufgabe 2

Lösungsfälle bei quadratischen Gleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$x^2 - 2 \cdot x - p = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + p}$
$1 + p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p \geq -1$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle richtigen Werte von p angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

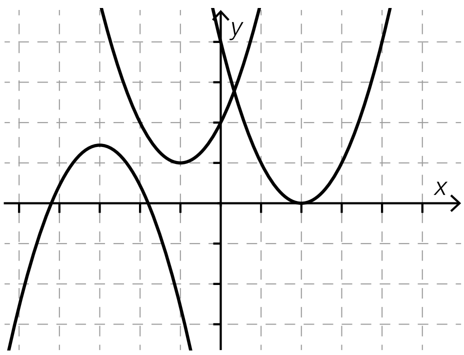
Eine quadratische Gleichung hat entweder keine reelle Lösung, eine reelle Lösung oder zwei reelle Lösungen.

mögliche grafische Deutung:

Graphen von quadratischen Funktionen sind Parabeln, die entweder die x-Achse nicht schneiden, diese berühren oder die x-Achse zweimal schneiden.

Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, wenn die zugehörige Parabel die x-Achse nicht schneidet.
Die quadratische Gleichung hat genau eine reelle Lösung, wenn die zugehörige Parabel die x-Achse berührt.
Die quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen, wenn die zugehörige Parabel die x-Achse zweimal schneidet.

mögliche Skizze:



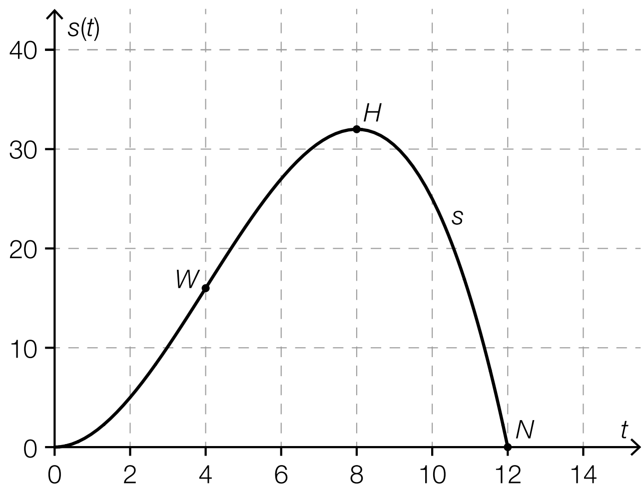
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die drei Lösungsfälle richtig angeführt und grafisch richtig gedeutet werden.

Aufgabe 3

Bewegung eines Körpers

Ein Körper bewegt sich entlang einer geradlinigen Bahn. Seine Entfernung (in Metern) vom Ausgangspunkt seiner Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) wird durch die Polynomfunktion s dritten Grades modelliert.
Der Graph dieser Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt, die Koordinaten des Wendepunkts W, des Hochpunkts H und der Nullstelle N sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

– Beschreiben Sie in Worten die Bewegung des Körpers und gehen Sie dabei auf die Bedeutung der Koordinaten der Punkte W, H und N ein.

Leitfrage:

Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0; 12].

– Geben Sie den Inhalt derjenigen Fläche an, die vom Graphen der Funktion v und der Zeitachse im Intervall [0; 8] eingeschlossen wird.
– Argumentieren Sie anhand der obigen Abbildung, dass die maximale Geschwindigkeit mehr als 4 m/s beträgt.

Lösung zur Aufgabe 3

Bewegung eines Körpers

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Beschreibung:

Der Körper beschleunigt 4 s lang. Nach 4 s, in 16 m Entfernung vom Ausgangspunkt, beginnt er langsamer zu werden. Nach 8 s, in 32 m Entfernung vom Ausgangspunkt, ändert der Körper seine Bewegungsrichtung und befindet sich nach insgesamt 12 s wieder im Ausgangspunkt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bewegung des Körpers unter Einbeziehung der Koordinaten der Punkte richtig beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von v und der Zeitachse im Intervall [0; 8] hat den Wert 32.

mögliche Argumentation:

Das Maximum von v liegt bei $t = 4$.
Der Anstieg der Tangente im Punkt W des Graphen von s ist größer als 4, da diese Tangente steiler verläuft als beispielsweise die Gerade durch den Ursprung und H, deren Steigung gleich 4 ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für den Inhalt der Fläche angegeben wird und wenn richtig begründet wird, warum das Maximum einen Wert größer als 4 annehmen muss.

Aufgabe 4

Pelletsverbrauch

In Deutschland wurden im Jahr 2016 um 8,1 % mehr Pellets als im Jahr 2015 verbraucht.
Im Jahr 2017 wurden um 5 % mehr als im Jahr 2016 verbraucht.
Im Jahr 2018 war der Verbrauch um 4,8 % höher als im Jahr 2017.

Im Jahr 2017 wurden 2,1 Mio. Tonnen an Pellets verbraucht.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie die absolute und die prozentuelle Änderung des Pelletsverbrauchs von 2015 bis 2018 an.

Leitfrage:

– Berechnen Sie die jährliche prozentuelle Änderungsrate p des Pelletsverbrauchs von 2015 bis 2018, wenn für den gesamten Zeitraum ein gleichbleibender Zuwachs angenommen wird.

– Ermitteln Sie mithilfe des Verbrauchswerts des Jahres 2017 und der berechneten jährlichen prozentuellen Änderungsrate p, nach wie vielen Jahren der Pelletsverbrauch erstmals bei 2,5 Mio. Tonnen liegen wird.

Lösung zur Aufgabe 4

Pelletsverbrauch

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Verbrauch im Jahr 2015: $\frac{2{,}1}{1{,}05 \cdot 1{,}081} = 1{,}850...$
Verbrauch im Jahr 2018: $2{,}1 \cdot 1{,}048 = 2{,}2...$
$\Rightarrow$ Die absolute Änderung beträgt ca. 0,35 Mio. Tonnen.

$1{,}081 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}048 = 1{,}189...$
$\Rightarrow$ Der Pelletsverbrauch hat in diesem Zeitraum um ca. 19 % zugenommen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige absolute und die richtige prozentuelle Änderung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1{,}85 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad p = 5{,}94... \quad \Rightarrow \quad p \approx 6\,\%$

Der Pelletsverbrauch wächst pro Jahr durchschnittlich um ca. 6 %.

$2{,}1 \cdot 1{,}06^t = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad t \approx 3$
Nach ca. 3 Jahren wird der Pelletsverbrauch erstmals bei 2,5 Mio. Tonnen liegen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert der Änderungsrate und der richtige Zeitraum angegeben werden.

Aufgabe 5

Gladiolen

Gladiolen sind beliebte Schnittblumen, die aus Gladiolenzwiebeln entstehen. Anhand einer Gladiolenzwiebel ist nicht erkennbar, welche Farbe die Blüten haben werden. Man geht davon aus, dass 12 % aller Gladiolen rote Blüten haben.

Aufgabenstellung:

Ein Hobbygärtner pflanzt n zufällig ausgewählte Gladiolenzwiebeln in die Erde.

– Berechnen Sie n, wenn erwartet wird, dass daraus 6 Gladiolen mit roten Blüten entstehen.
– Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass aus den n gepflanzten Gladiolenzwiebeln mindestens 5 Gladiolen mit roten Blüten entstehen.

Leitfrage:

Ein Großhändler liefert Gladiolenzwiebeln in Säcken zu je 200 Stück. Er möchte garantieren, dass die Anzahl der Gladiolen mit roten Blüten in einem Sack um nicht mehr als eine bestimmte Anzahl c vom Erwartungswert abweicht. Dieses Garantieversprechen will er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % einhalten können.

– Geben Sie an, wie groß die Abweichung c mindestens sein muss.

Lösung zur Aufgabe 5

Gladiolen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$n \cdot 0{,}12 = 6 \quad \Rightarrow \quad n = 50$

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der daraus entstehenden Gladiolen mit roten Blüten.

$P(X \geq 5) = 0{,}732...$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 73 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Stichprobenumfang n und die gesuchte Wahrscheinlichkeit richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\left.\begin{array}{l} n = 200 \\ p = 12\ \% \end{array}\right\} \ E(X) = 24$$

$P(24 - c \leq X \leq 24 + c) \geq 0{,}95$

$c \geq 9 \quad \Rightarrow \quad c$ muss mindestens 9 sein

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Abweichung c richtig angegeben wird.