Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

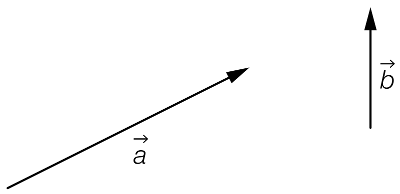
Aufgabe 1

Vektoren

Additionen und Subtraktionen von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ können grafisch veranschaulicht werden.

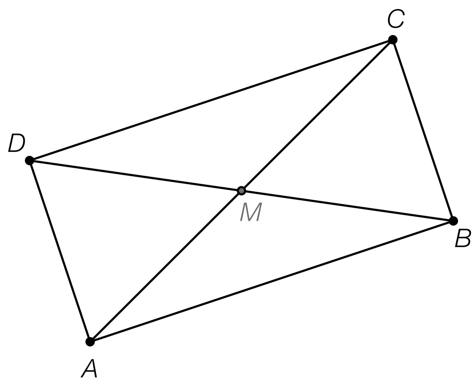
Aufgabenstellung:

Führen Sie sowohl die Addition $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ als auch die Subtraktion $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ grafisch in der nachstehenden Abbildung aus!



Leitfrage:

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Rechteck *ABCD*, dessen Länge doppelt so groß wie die Breite ist. *M* ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen.



Geben Sie an, welche der nachstehenden Aussagen falsch ist/sind, und stellen Sie die falsche(n) Aussage(n) richtig!

Aussage 1: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Aussage 2: $D - \overrightarrow{BC} = A$

Aussage 3: $B + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM}$

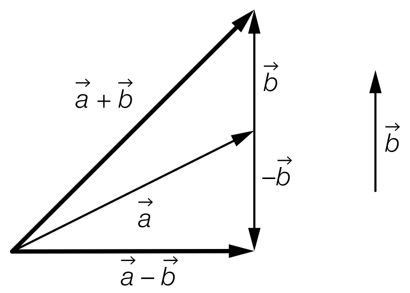
Aussage 4: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 0$

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Vorgehensweise:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Addition und die Subtraktion grafisch korrekt ausgeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Aussagen 1, 3 und 4 sind falsch.

mögliche Richtigstellungen:

Aussage 1: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

Aussage 3: $B + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = M$

Aussage 4: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ oder $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle falschen Aussagen als solche erkannt und (sinngemäß) richtiggestellt werden.

Aufgabe 2

Sinusfunktion

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Die kleinste positive Extremstelle der Funktion f liegt an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{12}$ und es gilt $f(x_0) = 3$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte von a und b!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion f, von der x-Achse und von der Geraden $x = \frac{\pi}{12}$ begrenzt wird!

Das Flächenstück soll durch eine senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.
Ermitteln Sie den Wert von c!

Lösung zur Aufgabe 2

Sinusfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Extremstelle $\left(\frac{\pi}{12}\middle|3\right)$ $\Rightarrow$ Nullstelle $\left(\frac{\pi}{6}\middle|0\right)$
$a = 3$ und $b = 6$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von a und b angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{12}} 3 \cdot \sin(6 \cdot x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$$

$$\int_0^c 3 \cdot \sin(6 \cdot x)\,\mathrm{d}x = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad c \approx 0{,}175$$

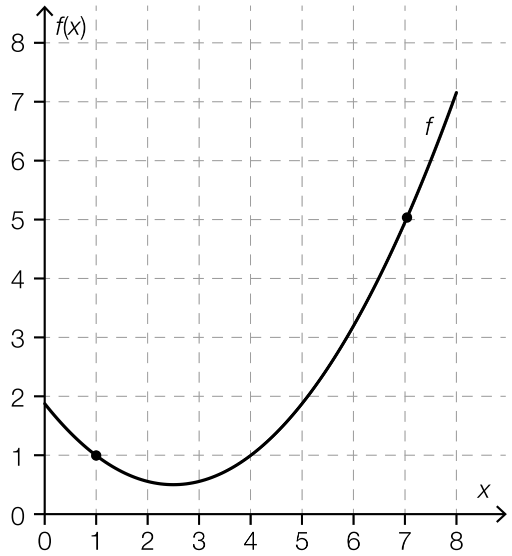
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Flächeninhalt A und der richtige Wert von c angegeben werden.

Aufgabe 3

Änderungsmaße

Nachstehend ist der Graph einer Funktion f im Intervall [0; 8] gegeben. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie grafisch näherungsweise denjenigen Punkt $P = (p_x|p_y)$, in dem der Differenzialquotient gleich dem Differenzenquotienten im Intervall [1; 7] ist, und kennzeichnen Sie den Punkt P in der obigen Abbildung!

Leitfrage:

Gegeben ist das Intervall $[1; b]$ mit $1 < b \leq 8$.

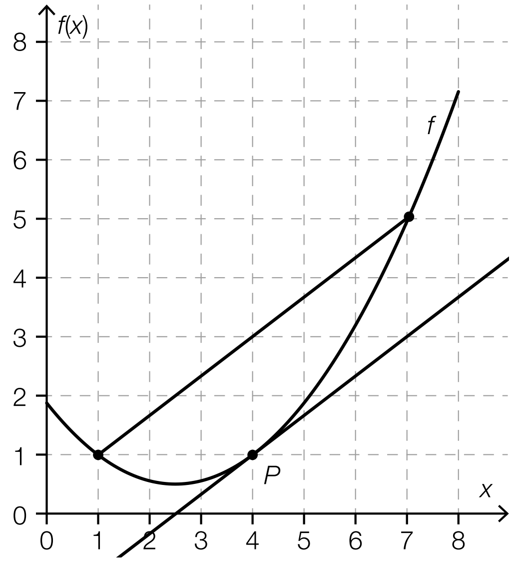
Bestimmen Sie jeweils ein mögliches $b \in \mathbb{Z}$ so, dass gilt:

- $\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} > 0$
- $\frac{f(b)}{f(1)} > 3$

Lösung zur Aufgabe 3

Änderungsmaße

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn P grafisch korrekt ermittelt und der Lösungserwartung entsprechend eingezeichnet wird.
Toleranzintervall für p_x: [3,5; 4,5]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- mögliche Werte für b: 5, 6, 7, 8
- mögliche Werte für b: 6, 7, 8

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Ausdrücke jeweils ein richtiger Wert für b angegeben wird.

Aufgabe 4

Höhe einer Pflanze (Löwenzahn)

Die Höhe eines Löwenzahns (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Wochen) wird für einen Zeitraum von 15 Wochen näherungsweise durch eine Polynomfunktion p mit $p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Löwenzahn 1 cm hoch. Seine Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 0,4 cm pro Woche.
Seine maximale Wachstumsgeschwindigkeit erreicht der Löwenzahn nach 7 Wochen.
Am Ende des Beobachtungszeitraums wird eine Höhe des Löwenzahns von 19 cm gemessen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie ein entsprechendes Gleichungssystem zur Berechnung der Werte a, b, c und d an!

Leitfrage:

Über einen längeren Zeitraum stellt die Funktion h mit $h(t) = \frac{20}{1 + 19 \cdot e^{k \cdot t}}$ eine realistischere Modellierung der Höhe des Löwenzahns dar.

Im Zeitintervall [0; 12] wächst der Löwenzahn durchschnittlich um 1,4 cm pro Woche.

Bestimmen Sie den Wert von k!

Lösung zur Aufgabe 4

Höhe einer Pflanze (Löwenzahn)

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p(0) = 1$
$p'(0) = 0{,}4$
$p''(7) = 0$
$p(15) = 19$

oder:

$d = 1$
$c = 0{,}4$
$42 \cdot a + 2 \cdot b = 0$
$3375 \cdot a + 225 \cdot b + 15 \cdot c + d = 19$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiges Gleichungssystem entsprechend der Lösungserwartung angegeben wird. Äquivalente Gleichungen bzw. eine Mischform aus den beiden angegebenen Lösungsvarianten sind ebenfalls als richtig zu werten, wenn dadurch alle gegebenen Beziehungen abgebildet sind.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\frac{h(12) - h(0)}{12} = 1{,}4$$
$$h(12) = 17{,}8 = \frac{20}{1 + 19 \cdot e^{12 \cdot k}} \quad \Rightarrow \quad k \approx -0{,}42$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von k angegeben wird.

Aufgabe 5

Datenliste

Gegeben ist eine Datenliste $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mit n Elementen und dem arithmetischen Mittel a (mit $a \in \mathbb{R}^+$).

Aufgabenstellung:

Zwei Elemente der Datenliste sollen jeweils um den Wert b erhöht werden (mit $b \in \mathbb{R}^+$).

Der Wert b soll so gewählt werden, dass sich das arithmetische Mittel der neuen Datenliste im Vergleich zu jenem der alten Datenliste verdoppelt.

Geben Sie eine Formel an, die diesen Zusammenhang zwischen a, b und n beschreibt!

Leitfrage:

Zwei Elemente der ursprünglich gegebenen Datenliste sollen jeweils um den Wert c mit $c \in \mathbb{R}^+$ erhöht werden. Der Wert c soll so gewählt werden, dass das arithmetische Mittel der neuen Datenliste dem Wert c entspricht.

Geben Sie eine Formel an, die diesen Zusammenhang zwischen a, c und n beschreibt!

Geben Sie an, bei welchem Wert von n in diesem Fall die Änderung des arithmetischen Mittels von a auf c einer Erhöhung um 50 % entspricht!

Lösung zur Aufgabe 5

Datenliste

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$a + \frac{2 \cdot b}{n} = 2 \cdot a$$

$$b = \frac{a \cdot n}{2}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Formel für b angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$a + \frac{2 \cdot c}{n} = c$$
$$c = \frac{a \cdot n}{n - 2}$$

$$\frac{\frac{a \cdot n}{n - 2}}{a} = 1{,}5$$

$$n = 6$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Formel für c und der richtige Wert für n angegeben werden.