Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

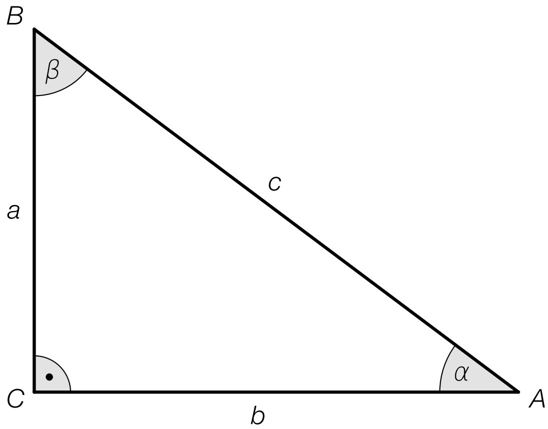
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Dreieck

Von dem nachstehend abgebildeten Dreieck ist die Länge der Seite $b = 5{,}2$ cm bekannt.

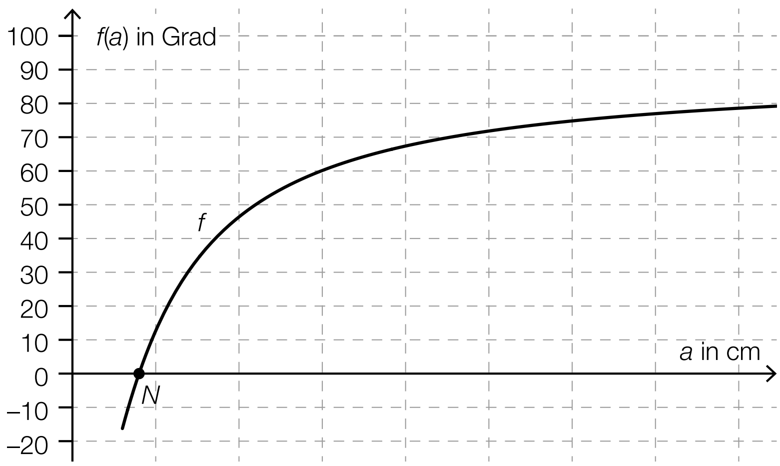


Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Längen der Seiten a und c so, dass $\tan(\alpha) = 0{,}75$ gilt!

Leitfrage:

Die Seite a wird über den Punkt B hinaus verlängert. Damit wird auch die Seite c länger und der Winkel α größer. Der rechte Winkel (beim Punkt C) und die Länge der Seite b bleiben unverändert. Die Funktion f beschreibt die Differenz $\alpha - \beta$ (in Grad) der beiden spitzen Winkel des Dreiecks in Abhängigkeit von der Länge der Seite a.
Ein Ausschnitt des Graphen von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Beschreiben Sie den Graphen von f im Hinblick auf sein Monotonieverhalten und bestimmen Sie seine waagrechte Asymptote sowie die Koordinaten seines Schnittpunkts N mit der waagrechten Achse!

Lösung zur Aufgabe 1

Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 3{,}9$ cm
$c = 6{,}5$ cm

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Seitenlängen angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Graph von f ist streng monoton steigend.

Der Graph von f nähert sich asymptotisch dem Wert 90.
Die Asymptote g hat somit die Gleichung $g(a) = 90$.

$N = (5{,}2 \mid 0)$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das richtige Monotonieverhalten, die richtige waagrechte Asymptote sowie die richtigen Koordinaten von N angegeben werden.

Aufgabe 2

Wasserhyazinthe

Die Wasserhyazinthe wurde 1988 im Victoriasee zum ersten Mal gesichtet. Sie vermehrte sich exponentiell mit einer Verdoppelungszeit von ca. 20 Tagen und bedeckte einige Zeit später Hunderte Quadratkilometer des Victoriasees.

Aufgabenstellung:

Die von der Wasserhyazinthe bedeckte Fläche kann durch eine Funktion A mit $A(t) = A_0 \cdot e^{k \cdot t}$ ($k \in \mathbb{R}$) beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Tagen und der Flächeninhalt $A(t)$ in km² angegeben.

Ermitteln Sie den Wert der Wachstumskonstanten k!

Leitfrage:

Die Wachstumsfunktion A kann auch in der Form $A(t) = A_0 \cdot a^t$ ($a \in \mathbb{R}$) angeschrieben werden.

Ermitteln Sie den Wert von a und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Jemand schreibt die Wachstumsfunktion A in der Form $A(t) = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{x}}$ an.

Geben Sie die Verdoppelungszeit an, die man unmittelbar aus dieser Darstellung ablesen kann!

Lösung zur Aufgabe 2

Wasserhyazinthe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{20 \cdot k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(2)}{20} \approx 0{,}0347$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von k angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a = e^k \quad \Rightarrow \quad a \approx 1{,}0353$
mögliche Deutung:
Die von der Wasserhyazinthe bedeckte Fläche vergrößert sich pro Tag um ca. 3,5 %.

Wenn $t = x$ gilt, dann ist $A(x) = 2 \cdot A_0$ und x somit die Verdoppelungszeit.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der richtige Wert von a und eine richtige Deutung als auch die richtige Verdoppelungszeit angegeben werden.

Aufgabe 3

Zufluss und Abfluss

In einem Becken befinden sich 20 m^3 Wasser.

Zu einem Zeitpunkt $t = 0$ werden ein Zuflussrohr und ein Abflussrohr gleichzeitig geöffnet.
Die Zuflussrate wird durch die Funktion Z mit $Z(t) = 5 \cdot 5^{-0,25 \cdot t}$ und die Abflussrate durch die Funktion A mit $A(t) = 0,4 \cdot \sqrt{t} + 0,2$ modelliert ($A(t)$ und $Z(t)$ in m^3/h, t in Stunden).

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Graphen der beiden Funktionen Z und A, deuten Sie seine Koordinaten im gegebenen Kontext und erklären Sie seine Bedeutung im Hinblick auf die Wassermenge im Becken!

Leitfrage:

Der Zu- und Abfluss wird unterbrochen, wenn die Wassermenge im Becken unter 20 m^3 sinkt.

Geben Sie an, wie lange die beiden Rohre gleichzeitig geöffnet sind, bis der Zu- und Abfluss unterbrochen wird!

Lösung zur Aufgabe 3

Zufluss und Abfluss

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$S = (4\,|\,1)$

Nach vier Stunden sind die Zufluss- und die Abflussrate gleich hoch und betragen jeweils 1 m^3/h. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die größte Wassermenge im Becken.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Schnittpunkt angegeben wird und seine Koordinaten richtig gedeutet werden sowie seine Bedeutung im Hinblick auf die Wassermenge richtig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\int_0^{t_1} ((Z(t) - A(t))\,\mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 11{,}2$
Die beiden Rohre sind ca. 11,2 Stunden lang geöffnet.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Zeitdauer angegeben wird.

Aufgabe 4

Sparkonto

Am 15. Geburtstag eines Kindes beginnend werden in Jahresabständen jeweils 1.000 Euro auf ein Sparkonto eingezahlt.

Es wird ein konstanter jährlicher Zinssatz von 1 % vereinbart.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Kontoständen K_{t+1} und K_t zweier aufeinanderfolgender Jahre mithilfe einer Gleichung an (t in Jahren, K_t in Euro)!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Endbetrag E auf dem Sparkonto nach der Einzahlung am 18. Geburtstag des Kindes!

Anstelle der jährlichen Einzahlung soll nun ein Betrag K_0 einmalig am 15. Geburtstag des Kindes eingezahlt werden.
Geben Sie an, wie groß K_0 (bei gleichbleibendem jährlichem Zinssatz von 1 %) sein muss, damit am 18. Geburtstag des Kindes der gleiche Endbetrag E zur Verfügung steht!

Lösung zur Aufgabe 4

Sparkonto

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$K_{t+1} = 1{,}01 \cdot K_t + 1\,000$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$E \approx 4.060{,}40$ Euro

$4\,060{,}4 = K_0 \cdot 1{,}01^3 \quad \Rightarrow \quad K_0 \approx 3.940{,}98$ Euro

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Endbetrag E und der richtige Betrag für die Einmalzahlung K_0 angegeben werden.

Aufgabe 5

Hotelzimmer

Ein Hotel am Meer hat 120 Zimmer.

Aufgabenstellung:

Der Manager des Hotels geht aufgrund langjähriger Erfahrungen davon aus, dass jede Zimmerbuchung mit 95%iger Wahrscheinlichkeit in Anspruch genommen wird. Deshalb nimmt er für eine Ferienwoche 122 (voneinander unabhängige) Zimmerbuchungen an.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Überbuchung gut geht, also dass mindestens zwei der Zimmerbuchungen nicht in Anspruch genommen werden!

Leitfrage:

In diesem Hotel haben 60 % der 120 Zimmer Meerblick. An einem Wochenende sind 5 Zimmer mit Meerblick und $\frac{1}{4}$ der Zimmer ohne Meerblick frei.

Durch die Ankunft einer Reisegruppe können alle freien Zimmer belegt werden, wobei die Zuteilung nach dem Zufallsprinzip erfolgt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Zimmer, das der Reisegruppe zugewiesen wird, eines ohne Meerblick ist!

Lösung zur Aufgabe 5

Hotelzimmer

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Zufallsvariable X: Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Zimmerbuchungen
$n = 122$ und $p = 0{,}05$

$P(X \geq 2) \approx 0{,}9858 = 98{,}58\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

freie Zimmer ohne Meerblick: $120 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{1}{4} = 12$

Wahrscheinlichkeit für die Zuteilung eines Zimmers ohne Meerblick: $\frac{12}{17} \approx 0{,}7059 = 70{,}59\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.