Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden im Raum

Gegeben sind Parameterdarstellungen der beiden Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r, s, y \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche gegenseitigen Lagebeziehungen (identisch; parallel, aber nicht identisch; schneidend; windschief) zwischen den beiden Geraden g und h möglich sind! Nennen Sie dabei jeweils den passenden Wert für die Koordinate y!

Leitfrage:

Gegeben sind Parameterdarstellungen der beiden Geraden $a\colon X = A + u \cdot \vec{a}$ und $b\colon X = B + v \cdot \vec{b}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$.

Erläutern Sie für jede der beiden nachstehenden Beziehungen, welche Rückschlüsse jeweils über die Lagebeziehung der beiden Geraden g und h zueinander getroffen werden können!

- Es gilt: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ und $\overrightarrow{AB} = \mu \cdot \vec{a}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Es gilt: $A \in b$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden im Raum

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Lagebeziehungen:

Die Geraden g und h sind identisch, wenn $y = 3$ ist.
Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt $(1|2|3)$, wenn $y \neq 3$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Lagebeziehungen mit dem jeweils dazu passenden Wert für y angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- Da die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinander sind, müssen die Geraden a und b parallel sein. Da zusätzlich der Vektor zwischen den beiden Punkten A und B ein Vielfaches des Richtungsvektors von a ist, müssen die beiden Geraden a und b identisch sein.
- Da der Punkt A auf beiden Geraden liegt und das Skalarprodukt der Richtungsvektoren der beiden Geraden null ist, schneiden einander die Geraden a und b im Punkt A rechtwinkelig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Beziehungen die richtige Lage der beiden Geraden erkannt und diese jeweils richtig erläutert wird.

Aufgabe 2

Funktionstypen

Gegeben ist eine Funktion in den drei Variablen a, b und c mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$.
Es gilt: $f(a, b, c) = \frac{2 \cdot a}{b} + c^2$.

Aufgabenstellung:

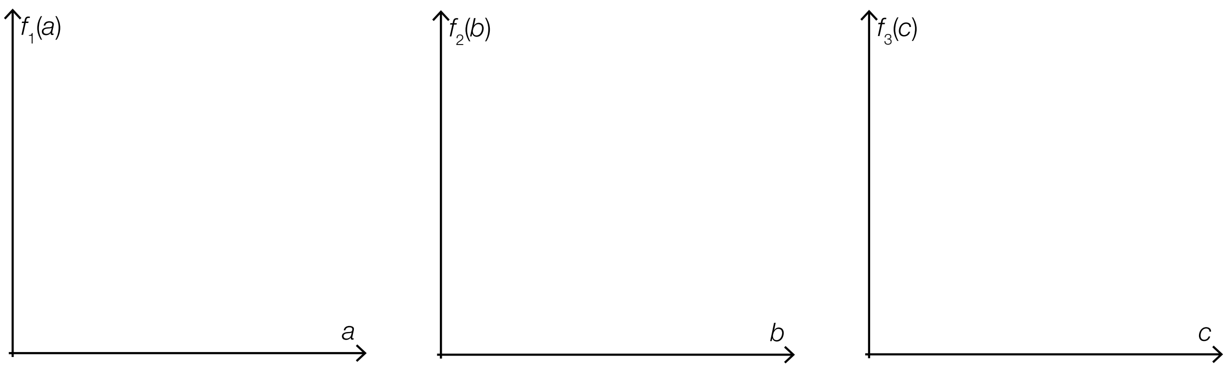
Die Funktionen f_1, f_2 und f_3, die aus $f(a, b, c)$ entstehen, wenn jeweils zwei der Variablen als konstant angenommen werden, sind wie folgt festgelegt:

f_1: $a \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte b und c

f_2: $b \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte $a \neq 0$ und c

f_3: $c \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte a und b

Skizzieren Sie für jede der Funktionen f_1, f_2, f_3 einen Graphen und geben Sie jeweils den zugehörigen Funktionstyp an!



Leitfrage:

Geben Sie, sofern diese vorhanden sind, die Koordinaten der Schnittpunkte der oben skizzierten Graphen mit der senkrechten Achse in Abhängigkeit von den Parametern a, b und c an!

Geben Sie weiters an, welche der Funktionen f_1, f_2 und f_3 einen direkt proportionalen Zusammenhang beschreiben kann und welche Bedingung der (die) jeweilige(n) Parameter in diesem Fall erfüllen muss (müssen)!

Lösung zur Aufgabe 2

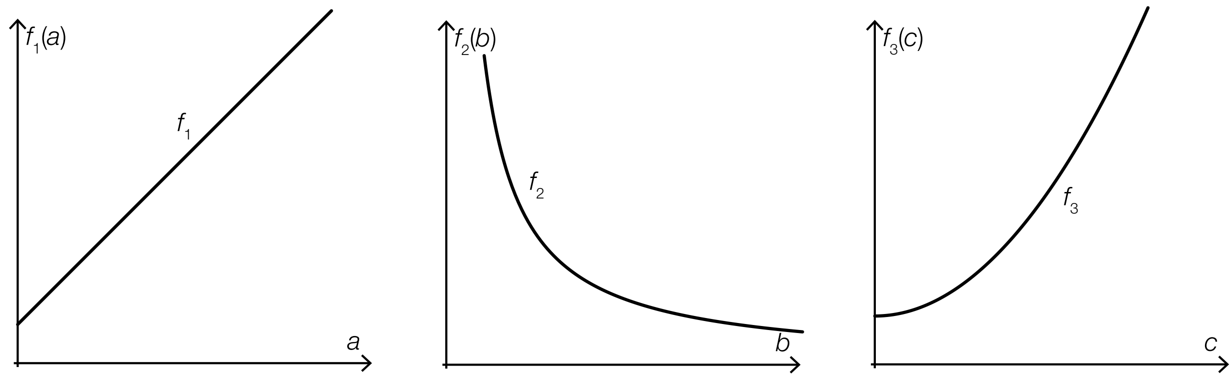
Funktionstypen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

f_1 ist eine lineare Funktion.

f_2 ist eine Potenzfunktion (gebrochen rationale Funktion).

f_3 ist eine Polynomfunktion (quadratische Funktion).



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Funktionstypen richtig genannt und die Graphen richtig skizziert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

f_1 hat mit der senkrechten Achse den Schnittpunkt $(0|c^2)$.

f_2 hat mit der senkrechten Achse in keinem Fall einen Schnittpunkt.

f_3 hat mit der senkrechten Achse den Schnittpunkt $\left(0\middle|\frac{2a}{b}\right)$.

Die Funktion f_1 beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang, wenn $c = 0$ ist.

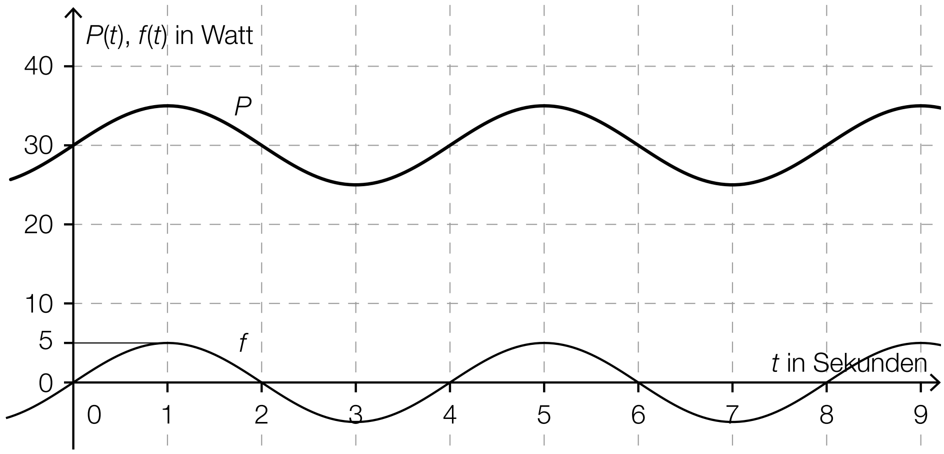
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Schnittpunkte mit der senkrechten Achse richtig angeführt werden und f_1 unter der Bedingung $c = 0$ zur Beschreibung eines direkt proportionalen Zusammenhangs angegeben wird.

Aufgabe 3

Leistung und Arbeit

Zwischen der in einem bestimmten Zeitintervall erbrachten Leistung P (in Watt = Joule/Sekunde) und der dabei verrichteten Arbeit W (in Joule) besteht ein funktionaler Zusammenhang.
Nachstehend ist der Graph einer Funktion P abgebildet, der die erbrachte Leistung $P(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) modellhaft darstellt. Weiters ist auch der Graph einer Funktion f abgebildet, für die gilt: $f(t) = P(t) - 30$ und $f(0) = 0$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie unter Verwendung der Leistung P einen Ausdruck für die im Zeitintervall $[0, t_1]$ verrichtete Arbeit $W(t_1)$ an und bestimmen Sie anhand der Abbildung die im Intervall [0; 8] verrichtete Arbeit!

$W(t_1)$ = ________________________

$W(8)$ = ________________________ Joule

Leitfrage:

Geben Sie für den oben abgebildeten Graphen der Funktion f eine passende Funktionsgleichung an und berechnen Sie (mithilfe der Funktionen P und/oder f) die im Zeitintervall [0; 2] verrichtete Arbeit $W(2)$!

Lösung zur Aufgabe 3

Leistung und Arbeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$W(t_1) = \int_0^{t_1} P(t)\,\mathrm{d}t$

$W(8) = 240$ Joule

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Ausdruck und der richtige Wert angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

$W(2) = 60 + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \approx 66{,}37$ Joule

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung und der richtige Wert für die Arbeit $W(2)$ angegeben werden. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Jungwald

Zu einem Zeitpunkt $t = 0$ besteht ein Jungwald aus 40 000 m³ Holz.
Der Holzbestand $H(t)$ nach t Jahren wird durch die Funktion $H: [0; 20] \to \mathbb{R}$ mit $H(t) = 40\,000 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ modelliert.

Aufgabenstellung:

Deuten Sie den Ausdruck $\frac{1}{4} \cdot \int_0^4 H(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext und ermitteln Sie seinen Wert!

Leitfrage:

Es gilt: $\frac{H(1) + H(2) + \ldots + H(n)}{n} > \frac{1}{n} \cdot \int_0^n H(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 20$.

Zeigen Sie, dass diese Aussage für $n = 4$ richtig ist, und begründen Sie anhand des Graphen von H, warum sie für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft!

Lösung zur Aufgabe 4

Jungwald

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Ausdruck beschreibt den Mittelwert des Holzbestands in den ersten vier Jahren.

$\frac{1}{4} \cdot \int_0^4 H(t)\,\mathrm{d}t \approx 42\,500 \text{ m}^3$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Deutung und der richtige Wert angegeben werden.
Toleranzintervall: $[42\,498 \text{ m}^3; 42\,500 \text{ m}^3]$

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:
$n = 4$: $\frac{H(1) + H(2) + H(3) + H(4)}{4} \approx 43\,140 > 42\,500$

mögliche Begründung:
Die Ungleichung trifft für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 20$ zu, weil die Funktion H streng monoton steigend ist und mit $H(1)$ bis $H(n)$ nur Funktionswerte jeweils am Ende eines Zeitintervalls zur Berechnung des Mittelwerts herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Richtigkeit der Aussage für $n = 4$ gezeigt und eine richtige Begründung angegeben wird.

Aufgabe 5

Glücksrad

Im Zuge der Eröffnung eines Einkaufszentrums kann man durch Drehen eines Glücksrads einen Gewinn erzielen.

Das Glücksrad ist in 30 gleich große Sektoren unterteilt, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können. Dabei sind 7 Sektoren rot und 3 Sektoren grün markiert, die restlichen Sektoren sind weiß markiert.
Man gewinnt einen Geschenkkorb, wenn der Zeiger nach Stillstand des Glücksrads auf einen grünen Sektor zeigt.
Man gewinnt ein Getränk, wenn der Zeiger nach Stillstand des Glücksrads auf einen roten Sektor zeigt.
Kommt der Zeiger bei einem weißen Sektor zum Stillstand, erhält man keinen Gewinn.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand bei zweimaligem Drehen dieses Glücksrads genau ein Getränk und keinen Geschenkkorb gewinnt!

Leitfrage:

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass man bei n-maligem Drehen dieses Glücksrads mindestens einen Geschenkkorb gewinnt!

Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $0{,}1 \cdot n$ für die Gewinnerwartung bei n-maligem Drehen dieses Glücksrads!

Lösung zur Aufgabe 5

Glücksrad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{30} \cdot 2 \approx 0{,}31 = 31\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Term: $1 - 0{,}9^n$

Mithilfe des Terms $0{,}1 \cdot n$ kann der Erwartungswert für die Anzahl der gewonnenen Geschenkkörbe bei n-maligem Drehen berechnet werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Term angegeben und die Bedeutung des Terms $0{,}1 \cdot n$ richtig erläutert wird.