Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

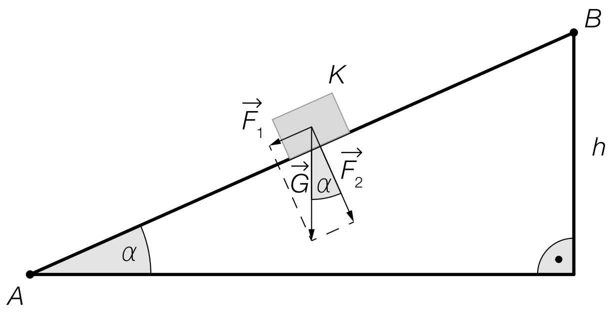
	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Schiefe Ebene

In der Physik versteht man unter einer schiefen Ebene eine ebene Fläche, die unter einem Winkel $\alpha \in (0°; 90°)$ gegen die Horizontale geneigt ist.
Eine Masse wird entlang einer schiefen Ebene nach oben gezogen. Der Kraftaufwand zur Höhenveränderung h dieser Masse hängt unter anderem vom Winkel α ab.

Die lotrechte Gewichtskraft $\vec{G}$ kann, wie nachstehend abgebildet, in die zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zerlegt werden, die parallel bzw. normal zur schiefen Ebene sind.



Die Längen G, F_1 und F_2 der Vektoren entsprechen den Größen der Kräfte (in N).

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie F_1, wenn gilt: $G = 500$ N, $\alpha = 30°$!

Leitfrage:

Geben Sie eine Formel für den Weg $s = \overline{AB}$ in Abhängigkeit von h und α an und begründen Sie anhand dieser Formel, warum bei konstantem h eine Vergrößerung von α eine Verkleinerung von s bewirkt!

Zeigen Sie durch entsprechende Umformungen, dass eine Vergrößerung des Winkels α bei gleichem Höhenunterschied h auf die zu verrichtende Arbeit $W = F_1 \cdot s$ keine Auswirkung hat!

Lösung zur Aufgabe 1

Schiefe Ebene

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\sin(\alpha) = \frac{F_1}{500} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 500 \cdot \sin(30°) = 250$ N

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn F_1 richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{h}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad h = s \cdot \sin(\alpha)$

Für α_1, $\alpha_2 \in (0°; 90°)$ und $\alpha_2 > \alpha_1$ gilt: $\sin(\alpha_2) > \sin(\alpha_1)$.
Wird α größer, so wird auch $\sin(\alpha)$ größer, und somit wird s bei konstantem h kleiner.

$F_1 = G \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad W = F_1 \cdot s = G \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)} = G \cdot h$ ist unabhängig vom Winkel α.

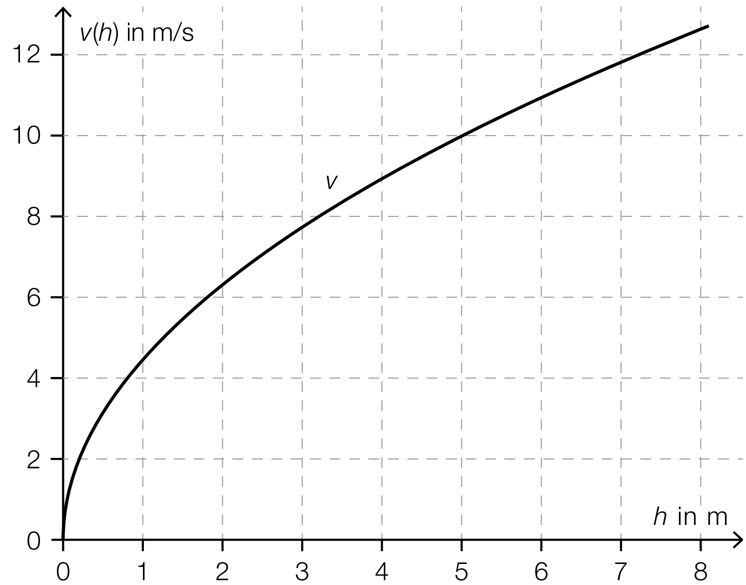
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Formel für s sowie eine richtige Begründung angegeben werden und durch entsprechende Umformungen gezeigt wird, dass W von α unabhängig ist.

Aufgabe 2

Aufprallgeschwindigkeit

Zwischen der Fallhöhe h und der Aufprallgeschwindigkeit $v(h)$ eines frei fallenden Körpers besteht ein funktionaler Zusammenhang, der in der nachstehenden Grafik dargestellt ist (h in m, $v(h)$ in m/s).



Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Zwischen der Fallhöhe h und der Aufprallgeschwindigkeit $v(h)$ besteht ein direkt proportionaler Zusammenhang.

Aussage 2: Wenn die Fallhöhe größer ist, ist auch die Aufprallgeschwindigkeit größer.

Aussage 3: Bei einem Fall aus 5 m Höhe beträgt die Aufprallgeschwindigkeit mehr als 9 m/s.

Leitfrage:

Die Aufprallgeschwindigkeit kann in Abhängigkeit von der Höhe h durch eine Funktion v mit $v(h) = a \cdot h^{\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Ermitteln Sie den Wert von a, wenn die Aufprallgeschwindigkeit bei einem Sprung aus 5 m Höhe 10 m/s beträgt, und geben Sie an, um welchen Faktor k sich die Aufprallgeschwindigkeit vervielfacht, wenn sich die Fallhöhe verdoppelt!

Geben Sie an, wie man die Fallhöhe verändern muss, um die Aufprallgeschwindigkeit zu verdoppeln!

Lösung zur Aufgabe 2

Aufprallgeschwindigkeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aussage 1: Die Aussage ist falsch, da v keine (homogene) lineare Funktion ist.

Aussage 2: Die Aussage ist wahr, da v streng monoton wachsend ist.

Aussage 3: Die Aussage ist wahr, da $v(5) = 10$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede Aussage die richtige Entscheidung getroffen und diese richtig begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v(h) = a \cdot h^{\frac{1}{2}}$
$v(5) = 10 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \sqrt{5} = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{20}$

$k = \sqrt{2}$

Die Fallhöhe muss vervierfacht werden, damit die Aufprallgeschwindigkeit verdoppelt wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von a und k sowie die richtige Veränderung der Fallhöhe angegeben werden.

Aufgabe 3

Differenzenquotient

Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Der Differenzenquotient der Funktion f hat im Intervall [1; 3] den Wert 20.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert von a an!

Leitfrage:

Gegeben ist eine lineare Funktion g mit $g(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$.
Der Differenzenquotient der Funktion g hat im Intervall [1; 3] den Wert 8.

Geben Sie diejenige Stelle x_0 an, an der der Differenzialquotient der beiden Funktionen f und g den gleichen Wert hat!

Lösung zur Aufgabe 3

Differenzenquotient

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{(9 \cdot a + b) - (a + b)}{2} = 4 \cdot a = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von *a* angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$k = 8 \quad \Rightarrow \quad g'(x_0) = 8$
$f'(x_0) = 2 \cdot a \cdot x_0$
$10 \cdot x_0 = 8$
$\Rightarrow \quad x_0 = 0{,}8$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von x_0 angegeben wird.

Aufgabe 4

Funktion

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a - x^2$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabenstellung:

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Extremstelle von f unabhängig von a ist und dass es sich um eine Maximumstelle handelt!

Geben Sie beide Koordinaten des Hochpunkts H an!

Leitfrage:

Der Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse begrenzt wird, beträgt $\frac{32}{3}$.

Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung von a an und ermitteln Sie den Wert von a!

Lösung zur Aufgabe 4

Funktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ und somit ist die Extremstelle von f unabhängig von a.

$f''(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ist eine Maximumstelle.

$H = (0|a)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Unabhängigkeit der Extremstelle von a und das Vorliegen der Maximumstelle richtig gezeigt sowie die beiden richtigen Koordinaten angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Nullstellen von f liegen bei $-\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$.

mögliche Gleichung:
$2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \frac{32}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 4$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung und der richtige Wert von a angegeben werden. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 5

Sportschützenverein

Eine Trainingseinheit in einem Sportschützenverein besteht aus n Versuchen, ein bestimmtes Ziel zu treffen.

Bianca trifft das Ziel bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit p, unabhängig von den anderen Schüssen. Der Erwartungswert ihrer Trefferanzahl ist 2,5 und die Standardabweichung beträgt 1,5.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte von n und p und geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Bianca im Laufe einer Trainingseinheit mindestens einmal das Ziel trifft!

Leitfrage:

Aufgrund ihres Trainings haben sich die Leistungen von Bianca verbessert. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei der üblichen Trainingseinheit mit n Versuchen mindestens einmal das Ziel trifft, beträgt nun 99,62 %.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Wahrscheinlichkeit p_1, mit der Bianca nun bei einem Schuss das Ziel trifft, berechnet werden kann, und bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit!

Lösung zur Aufgabe 5

Sportschützenverein

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$n \cdot p = 2{,}5$

$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad n = 25; \; p = 0{,}1$

$P(X \geq 1) \approx 0{,}9282 = 92{,}82\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von n und p sowie die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Gleichung:
$(1 - p_1)^{25} = 1 - 0{,}9962$

$\Rightarrow \quad p_1 \approx 0{,}2 = 20\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung und der richtige Wert von p_1 angegeben werden. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.