Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

15. Jänner 2019

Angewandte Mathematik

HTL 2

Korrekturheft

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Korrektur- und Beurteilungsanleitung

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie im entsprechenden Erlass zur Beurteilung, der auf der Website https://ablauf.srdp.at/ abrufbar ist.)

Kompetenzbereiche

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

44–48 Punkte	Sehr gut
39–43 Punkte	Gut
34–38 Punkte	Befriedigend
23–33 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist unter Beachtung folgender Vorgangsweisen **verbindlich** anzuwenden:

    a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

    b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

    c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

    d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum Beispiel: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

    e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

    f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

    g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

    h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

    i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

Aufgabe 1

Treppenlift

Möglicher Lösungsweg

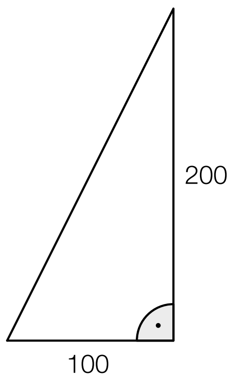
a1) $h : t = 3 : 4 \ \Rightarrow \ h = \frac{3}{4} \cdot t$

$\sqrt{t^2 + h^2} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$

$l(t) = 11 \cdot \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$

t … Stufentiefe in cm
$l(t)$ … Länge der Führungsschiene bei einer Stufentiefe t in cm

b1)



c1) $K_1(t) = 9480$
$K_2(t) = 60 \cdot t + 300$

t … Anzahl der Monate
$K_1(t)$, $K_2(t)$ … Gesamtkosten nach t Monaten in Euro

c2) $K_2(120) = 7500$
$7500 < 9480$

Wenn Frau Huber den Treppenlift nur für 10 Jahre benötigt, ist Angebot 2 günstiger.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (KB)
b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Skizze (KA)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen (KA)
1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)

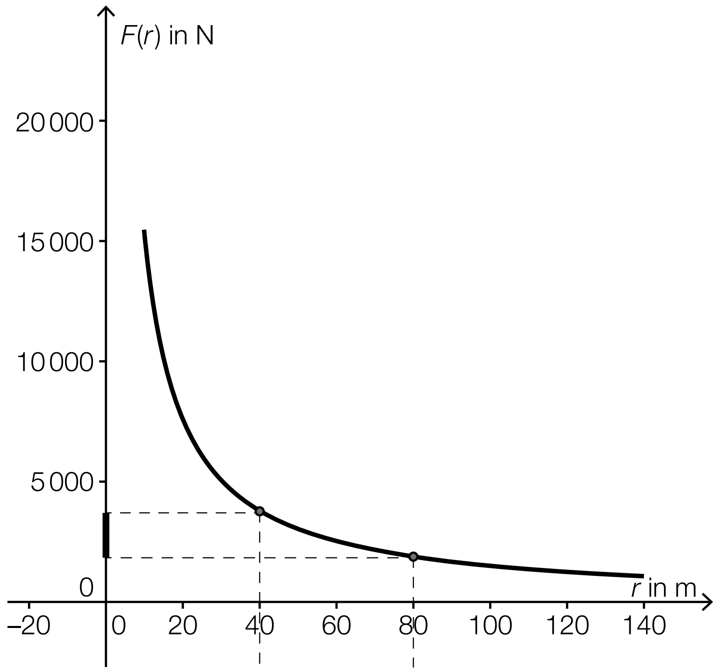
Aufgabe 2

Kurvenfahrt

Möglicher Lösungsweg

a1) $(2 \cdot v)^2 = 4 \cdot v^2$
Das bedeutet: Wenn man mit doppelt so hoher Geschwindigkeit in eine Kurve mit dem Radius r fährt, dann wird F viermal so groß.

b1 und b2)



c1) $18 : 380 = 0{,}047...$
F ist bei einem fast leeren Tank um rund 5 % geringer als bei einem vollen Tank.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung (KA)
b) 1 × B: für das richtige Erstellen der Grafik (KA)
1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Veränderung auf der senkrechten Achse (KB)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung (KA)

Aufgabe 3

Münzen

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Möglichkeit, dass die Summe der gezogenen Münzen 3 Euro beträgt, besteht nur, wenn man entweder aus Susis Box 1 Ein-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Zwei-Euro-Münze zieht oder aus Susis Box 1 Zwei-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Ein-Euro-Münze zieht.

a2) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:
$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl" geworfen wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Angeben der beiden Möglichkeiten (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KB)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung von n (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation von n (KB)

Aufgabe 4

Scheunentor

Möglicher Lösungsweg

a1) Koordinatensystem in der Symmetrieachse:
$y(0) = 3{,}4$: $3{,}4 = b$
$y(2) = 3$: $3 = 4 \cdot a + 3{,}4 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}1$

b1) $A = 2 \cdot \int_0^{2{,}5} (-0{,}08 \cdot x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{115}{6} \approx 19{,}17$

Der Flächeninhalt beträgt rund 19,17 m².

c1) Das Volumen V ist das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke: 16 m² = 1600 dm²;
8 cm = 0,8 dm
$V = 1600\ \mathrm{dm}^2 \cdot 0{,}8\ \mathrm{dm} = 1280\ \mathrm{dm}^3$
Masse des Scheunentors: $m = 0{,}7\ \mathrm{kg/dm}^3 \cdot 1280\ \mathrm{dm}^3 = 896\ \mathrm{kg} = 0{,}896\ \mathrm{t}$
Die Masse des Scheunentors beträgt 0,896 t.

Lösungsschlüssel

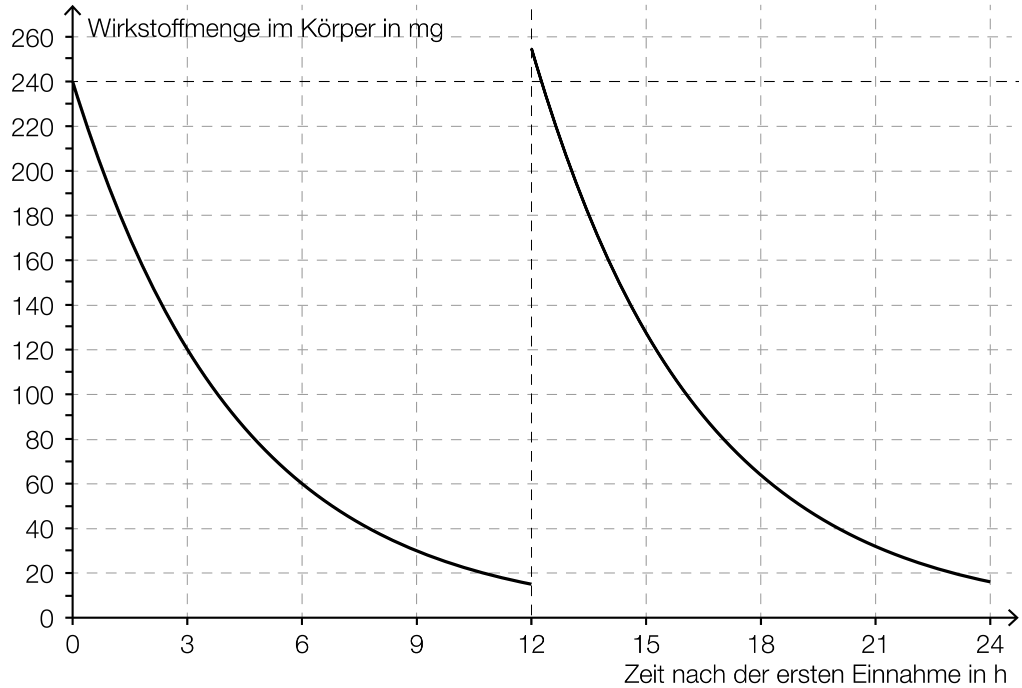
a) 1 × A: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Tonnen (KA)

Aufgabe 5

Medikamentenabbau

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) Bei Verwendung des exponentiellen Modells sinkt die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge theoretisch niemals auf null ab. Nach 24 Stunden sind 8 Halbwertszeiten vergangen, d. h., ein Anteil von $\left(\frac{1}{2}\right)^8 > 0$ befindet sich noch im Blut.

c1) Modellierung durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden und einer Startmenge von 480 mg:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$240 = 480 \cdot a^3$

$a = 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}79370...$

$N(t) = 480 \cdot a^t$

Berechnung des Wirkungszeitraums:

$50 = 480 \cdot a^t$
$t = 9{,}7...$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung im Intervall [0; 12[(KA)
1 × A2: für die richtige Darstellung im Intervall [12; 24[(KB)
b) 1 × D: für die richtige Argumentation (KA)
c) 1 × A: für die richtige Modellierung der Exponentialfunktion (KA)
1 × B: für das richtige Bestimmen des Wirkungszeitraums (KB)

Aufgabe 6

Statistische Verteilung der Körpermassen von 12-Jährigen

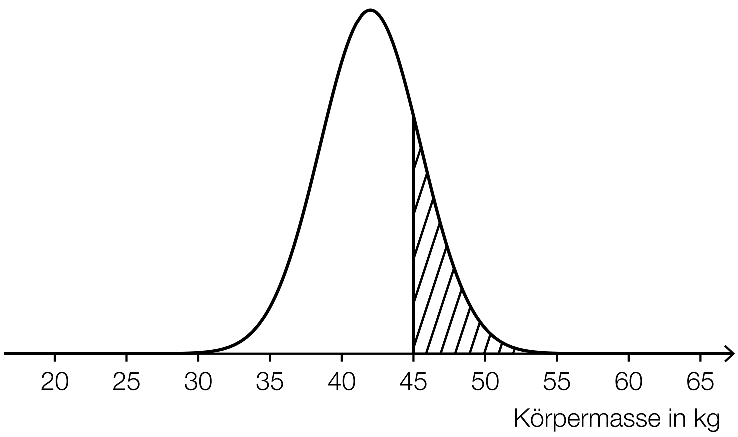
Möglicher Lösungsweg

a1) Median: 41 kg
3. Quartil: 45 kg

a2) Die Behauptung in der Tageszeitung ist falsch, weil 42 kg größer als der Median sind.

b1) Bestimmung der statistischen Kennzahlen mittels Technologieeinsatz:
– arithmetisches Mittel: 43,6 kg
– Median: 39 kg

c1)



c2) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [36{,}2 \text{ kg}; 47{,}8 \text{ kg}]$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der beiden statistischen Kennzahlen (KA)
1 × D: für die richtige Begründung (KA)
b) 1 × B: für die richtige Bestimmung des arithmetischen Mittels und des Medians (KA)
c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in einer Skizze der Dichtefunktion (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls (KB)

Aufgabe 7 (Teil B)

Werbung

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_G(8) = 835,8...$

Nach 8 Tagen kennen rund 835 Studierende das Gerücht.

b1) $N_W(t) = N_G(t)$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6,779... \approx 6,78$

Nach etwa 6,78 Tagen haben gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

c1) Die Ableitung N_G' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.
Die Funktion N_G hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.

c2) Zur Zeit t_0 ist der Zuwachs der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben, am größten.

c3) Die Funktion N_G ist zwar für $0 \leq t < t_0$ positiv gekrümmt, für $t > t_0$ jedoch negativ gekrümmt. Somit gilt hier für $t > t_0$: $N_G''(t) < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Studierenden, die nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben (Auch ein Runden des Ergebnisses auf 836 Studierende ist als richtig zu werten.) (KA)

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz (KA)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Zeitpunkts (KB)

c) 1 × C1: für die richtige Beschreibung zur Ableitung N_G' (KA)
1 × C2: für die richtige Beschreibung zur Funktion N_G (KA)
1 × C3: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × D: für eine richtige Argumentation (KA)

Aufgabe 8 (Teil B)

Flugbahn und Bewegungsgleichung

Möglicher Lösungsweg

a1) $P = (15 \mid 10)$

a2) Die Punkte $(0 \mid 0)$, $(15 \mid 10)$ und $(30 \mid 0)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$(0 \mid 0)$: $c = 0$

$(15 \mid 10)$: $15^2 \cdot a + 15 \cdot b = 10$

$(30 \mid 0)$: $30^2 \cdot a + 30 \cdot b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $a = -\frac{2}{45}$; $b = \frac{4}{3}$

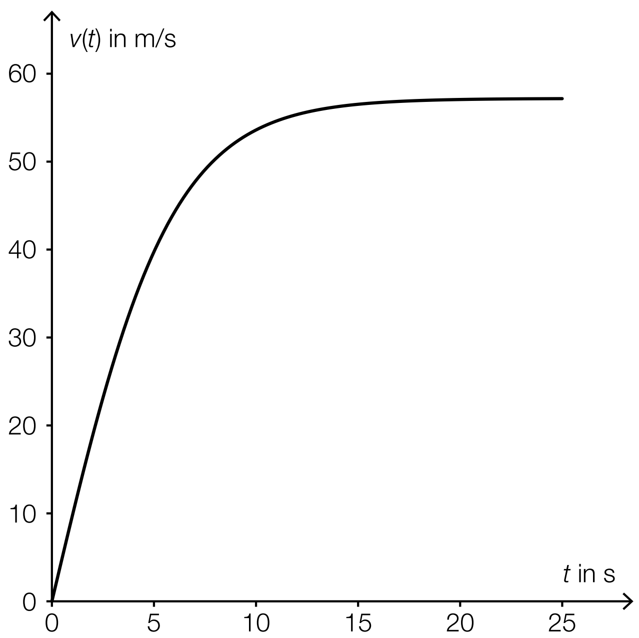
$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{45} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x$

Der Vergleich mit der gegebenen Funktionsgleichung zeigt:

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}130...° \approx 53{,}13°$

b1)



b2) Daraus wird v_{max} mit rund 57 m/s abgelesen.
Toleranzbereich: [55; 60]

c1) $v(t) = \dot{s}(t) = 10 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$

c2) $v(0) = 10$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Auskuppelns beträgt 10 m/s.

Lösungsschlüssel

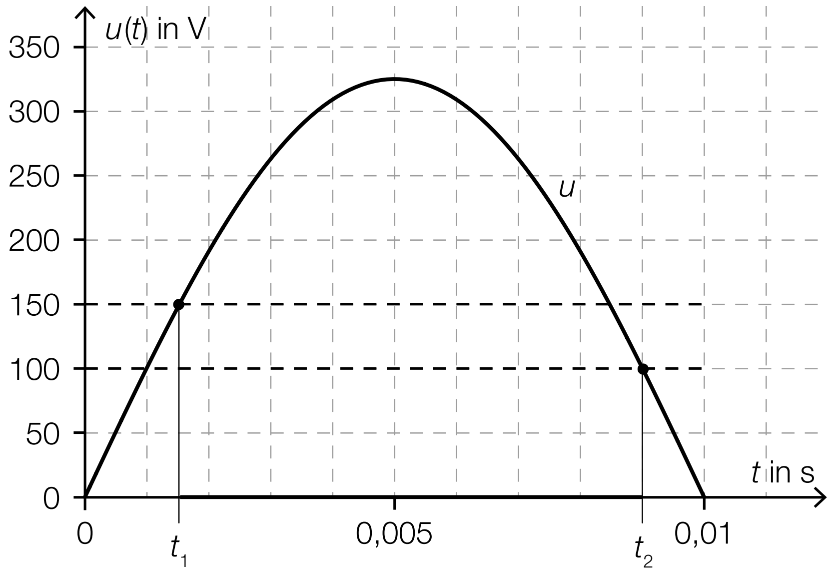
a) 1 × C: für die richtige Angabe der Koordinaten (KA)
   1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels (Modellierung der quadratischen Funktion) (KB)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α (KB)
b) 1 × B: für die richtige grafische Darstellung der Fallgeschwindigkeit (KA)
   1 × C: für das richtige Ablesen eines Näherungswerts für die maximale Fallgeschwindigkeit im Toleranzbereich [55; 60] (KB)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit (KB)

Aufgabe 9 (Teil B)

Sinusfunktionen

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}00152\ldots$
$u(t_2) = 100 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}00900\ldots$
$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477\ldots$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$$

$$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

c1) $A = 10$
$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$
(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (KA)
b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2 (KA)
   1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte) (KA)
   1 x D: für den richtigen Nachweis (KB)
c) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d (KA)
   1 x B1: für das richtige Bestimmen von ω (KA)
   1 x B2: für das richtige Bestimmen von φ (KB)