

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

9. Mai 2018

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

Aufgabe 1

Zusammenhang zweier Variablen

Lösungserwartung:

Wenn a kleiner als null ist, dann ist auch b kleiner als null.	<input checked="" type="checkbox"/>
Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $(a \cdot n) \cdot \left(\frac{b}{n}\right) = 1$.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 2

Solaranlagen

Lösungserwartung:

Mögliche Interpretation:

Der Term gibt die Gesamtausgaben der Gemeinde zur Unterstützung der Haushalte bei den Anschaffungskosten für neue Solaranlagen an.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

Aufgabe 3

Lösungsfälle quadratischer Gleichungen

Lösungserwartung:

Wenn r und t verschiedene Vorzeichen haben, dann hat die gegebene Gleichung genau zwei (verschiedene) reelle Lösungen.

Mögliche Begründung:

Lösungen der Gleichung: $x_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4 \cdot r \cdot t}}{2 \cdot r}$

Haben r und t verschiedene Vorzeichen, dann ist $-4 \cdot r \cdot t$ in jedem Fall positiv und es gilt: $s^2 - 4 \cdot r \cdot t > 0$.

Daraus ergeben sich zwei verschiedene reelle Lösungen.

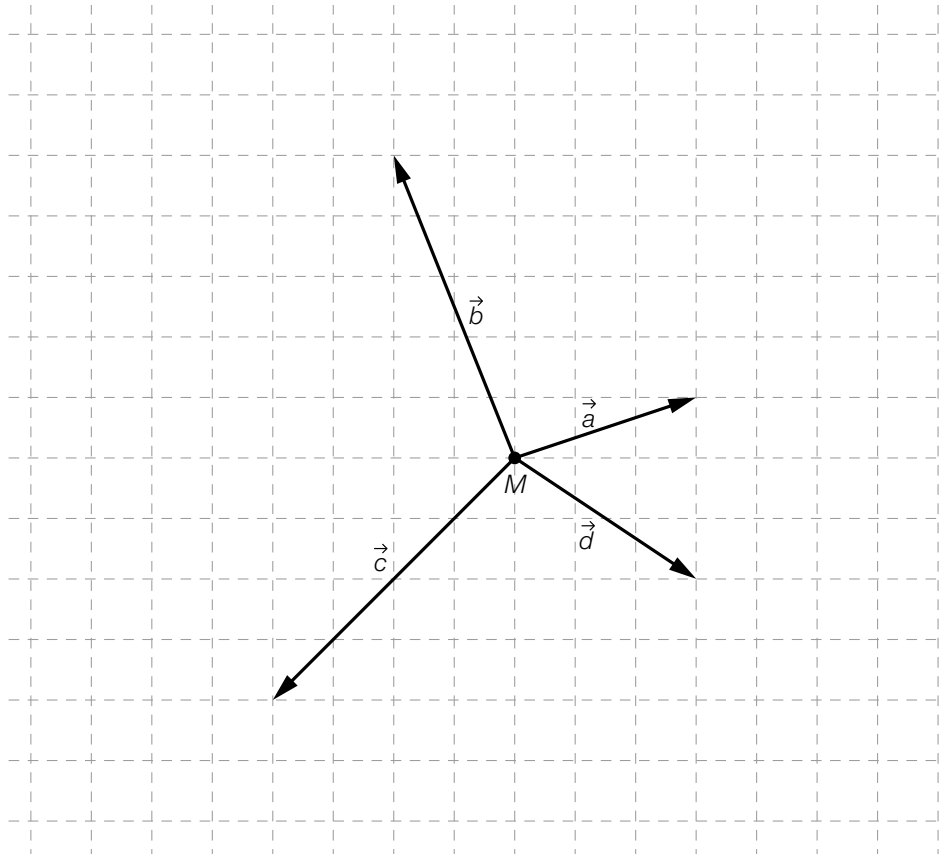
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der richtigen Anzahl und eine korrekte allgemeine Begründung.

Aufgabe 4

Kräfte

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von \vec{d} , wobei \vec{d} auch von einem anderen Ausgangspunkt aus gezeichnet sein kann.

Aufgabe 5

Rechter Winkel

Lösungserwartung:

möglicher Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

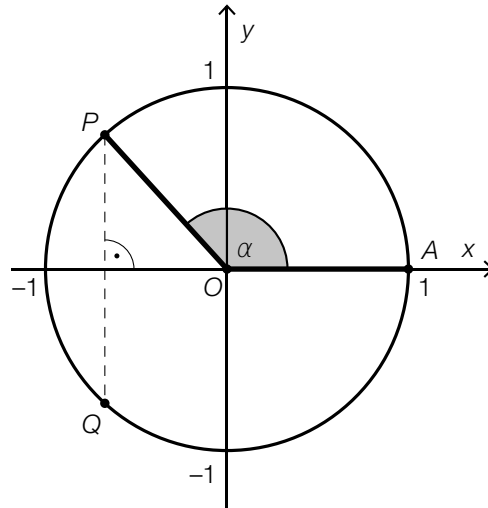
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Lösung. Jeder Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für den $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist als richtig zu werten.

Aufgabe 6

Sinus und Cosinus

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die korrekte Ergänzung von Q .

Aufgabe 7

Quadratische Pyramide

Lösungserwartung:

Für $a = 1 \text{ cm}$ ist die Oberfläche sicher größer als 2 cm^2 .	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Aufgabe 8

Radfahrer

Lösungserwartung:

Der Radfahrer <i>B</i> startet zwei Minuten später als der Radfahrer <i>A</i> .	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Radfahrer <i>B</i> holt den Radfahrer <i>A</i> nach einer Fahrstrecke von 2,4 Kilometern ein.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 9

Graphen quadratischer Funktionen

Lösungserwartung:

$$a_3 < a_1 < a_2$$

$$b_3 < b_2 < b_1$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 10

Polynomfunktion

Lösungserwartung:

Mögliche Begründungen:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen. (Die dargestellte Funktion f hat aber mindestens drei lokale Extremstellen.)

oder:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle. (Die dargestellte Funktion f hat aber mindestens zwei Wendestellen.)

oder:

Die dargestellte Funktion hat bei $x_1 \approx -7$ und bei $x_2 \approx 5$ jeweils eine Nullstelle und bei $x_3 \approx 0$ eine Nullstelle, die auch lokale Extremstelle ist. Damit kann im dargestellten Intervall die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. Der Grad von f wäre somit zumindest vier.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 11

Zellkulturen

Lösungserwartung:

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	F
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	E
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	A
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	B

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0,15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0,5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0,85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1,5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1,85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier beschriebenen Veränderungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 12

Sinusfunktion

Lösungserwartung:

$$a = 3$$

$$b = 2$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Aufgabe 13

Wertschöpfung

Lösungserwartung:

Anteil des Überschusses im Jahr 2007: $\frac{37\,133}{92\,258} \approx 0,4025 = 40,25 \%$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall: [40 %; 41 %] bzw. [0,40; 0,41]

Aufgabe 14

Abkühlungsprozess

Lösungserwartung:

Mögliche Interpretation:

Die momentane Abnahme der Temperatur der Flüssigkeit beträgt 20 Minuten nach dem Start des Abkühlungsprozesses $0,97 \text{ }^\circ\text{C}$ pro Minute.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Interpretation unter Angabe der korrekten Einheiten.

Aufgabe 15

Kredittilgung

Lösungserwartung:

mögliche Differenzengleichung: $S(t + 1) - S(t) = S(t) \cdot 0,004 - 450$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Differenzengleichung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 16

Beziehungen zwischen Funktion, Ableitungs- und Stammfunktion

Lösungserwartung:

①		②	
		f'	<input checked="" type="checkbox"/>
F	<input checked="" type="checkbox"/>		

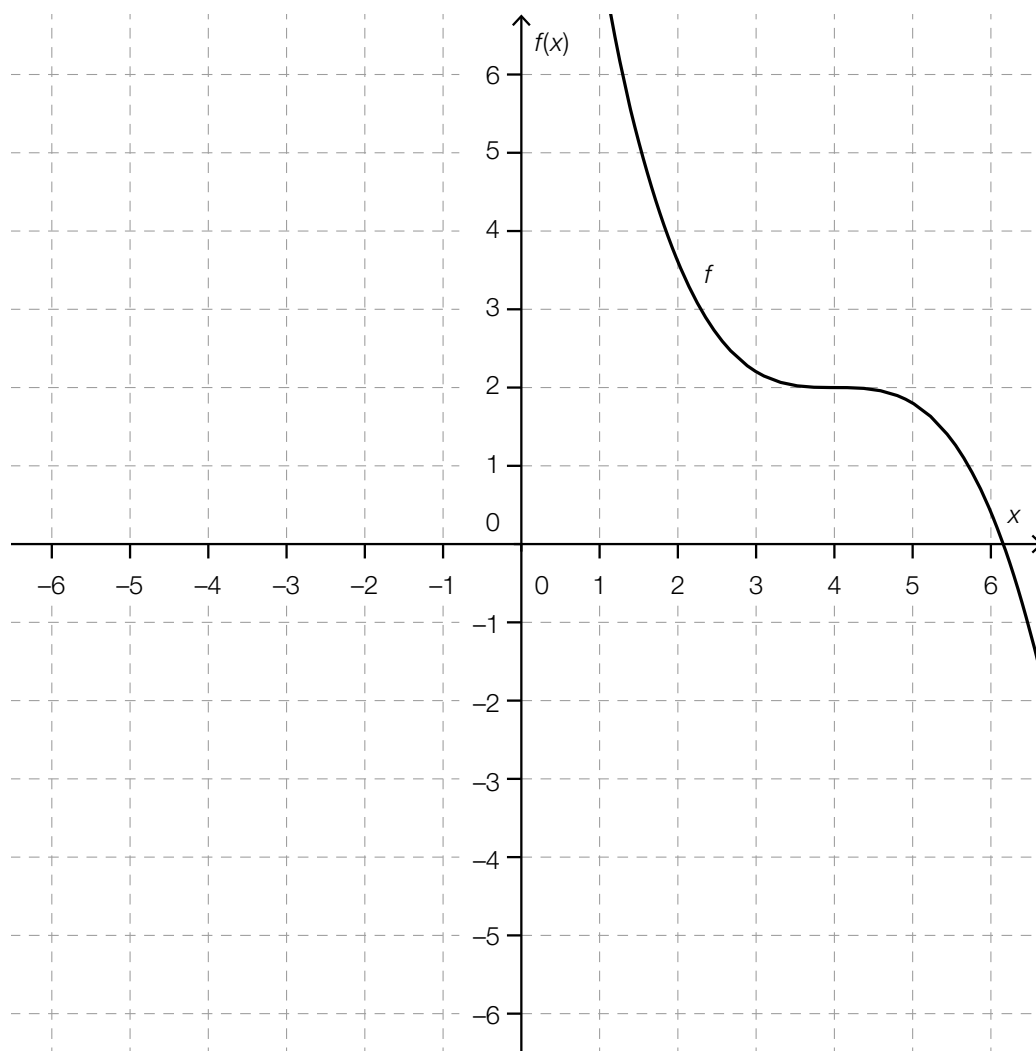
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 17

Funktionsgraph

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung eines möglichen Graphen einer Funktion f , wobei alle in der Angabe angeführten Eigenschaften erkennbar sein müssen.

Aufgabe 18

Wert eines bestimmten Integrals

Lösungserwartung:

$$I = -4$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 19

Hausübungen und Schularbeit

Lösungserwartung:

Die Schülerin mit der geringsten Punkteanzahl bei der Schularbeit hat die wenigsten Hausübungen abgegeben.	<input checked="" type="checkbox"/>
Schülerinnen mit mindestens 10 abgegebenen Hausübungen haben bei der Schularbeit im Durchschnitt mehr Punkte erzielt als jene mit weniger als 10 abgegebenen Hausübungen.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 20

Spenden

Lösungserwartung:

Ist die Spende von Frau Müller eine der fünf größten Spenden?	F
Ist die Spende von Frau Müller eine der zehn größten Spenden?	D
Ist die Spende von Frau Müller die kleinste Spende?	A
Wie viel Euro spenden die 20 Personen insgesamt?	C

A	Minimum
B	Maximum
C	arithmetisches Mittel
D	Median
E	unteres Quartil
F	oberes Quartil

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Fragen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 21

Gummibären

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = \frac{111}{140} \approx 79,3 \%$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,79; 0,80] bzw. [79 %; 80 %]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 22

Vergleich zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Lösungserwartung:

$E(X) = E(Y)$	<input checked="" type="checkbox"/>
$P(X \leq 3) < P(Y \leq 3)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 23

Massenproduktion

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

Die (binomialverteilte) Zufallsvariable X (mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,06$) beschreibt die Anzahl der mangelhaften Stücke in dieser Packung.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,057$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 24

Intervallbreite von Konfidenzintervallen

Lösungserwartung:

Konfidenzintervall mit der kleinsten Intervallbreite: C

Konfidenzintervall mit der größten Intervallbreite: B

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Konfidenzintervalle.

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

9. Mai 2018

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Aufgabe 1

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$

Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.

Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \Rightarrow f'(0) = b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

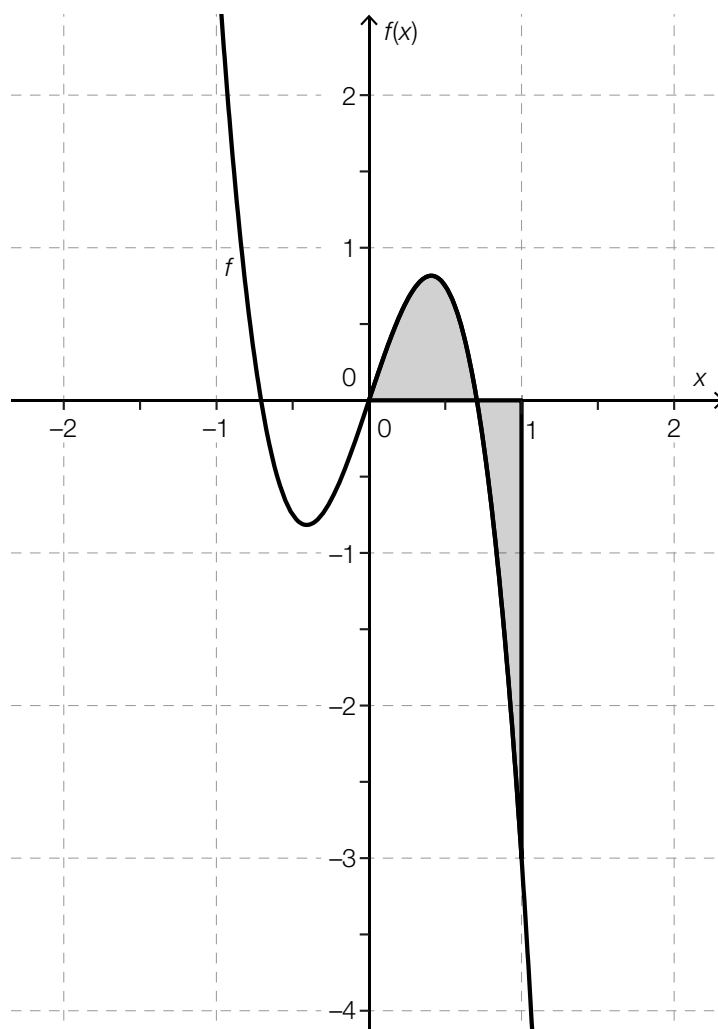
Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x) dx = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x -Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x -Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x -Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f :



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b .
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f . Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Hopfen

a) Lösungserwartung:

möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$$h(10) - h(0) \approx 6,45$$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
Toleranzintervall für den Wert: $[6,4 \text{ m}; 6,5 \text{ m}]$

b) Lösungserwartung:

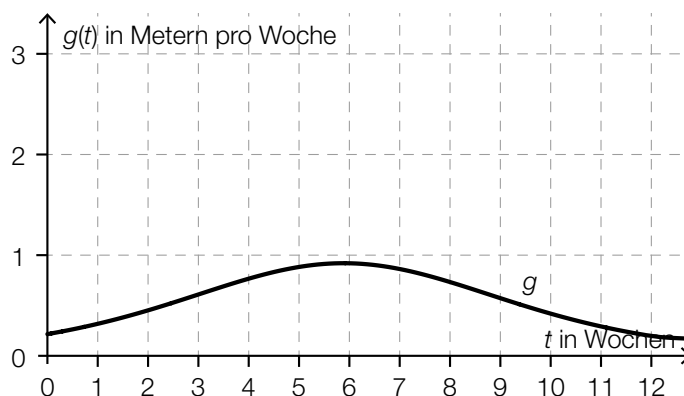
Mögliche Gleichung:

$$h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$$

$$t_2 \approx 5,9 \text{ Wochen}$$

$$h'(t_2) \approx 0,92$$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: $[5,4 \text{ Wochen}; 6,3 \text{ Wochen}]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g .
Toleranzintervall: $[0,90 \text{ Meter pro Woche}; 1 \text{ Meter pro Woche}]$

c) Lösungserwartung:

Mögliche Funktionsgleichung von h_1 :

$$h_1(t) = 0,583 \cdot t + 0,6$$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1 , dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall für die Steigung: $[0,58; 0,59]$
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{k \cdot t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{\max} unabhängig von k .
 $h_{\max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k .

Aufgabe 3

Abstandsmessung

a) Lösungserwartung:

$$q_1 = 0,9$$

$$q_3 = 2,1$$

Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

$$130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s}$$

$36,1 \text{ m/s} \cdot 0,9 \text{ s} = 32,5 \text{ m} \Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrer/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0,25$... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde

$n = 10$... Anzahl der ausgewählten Messungen

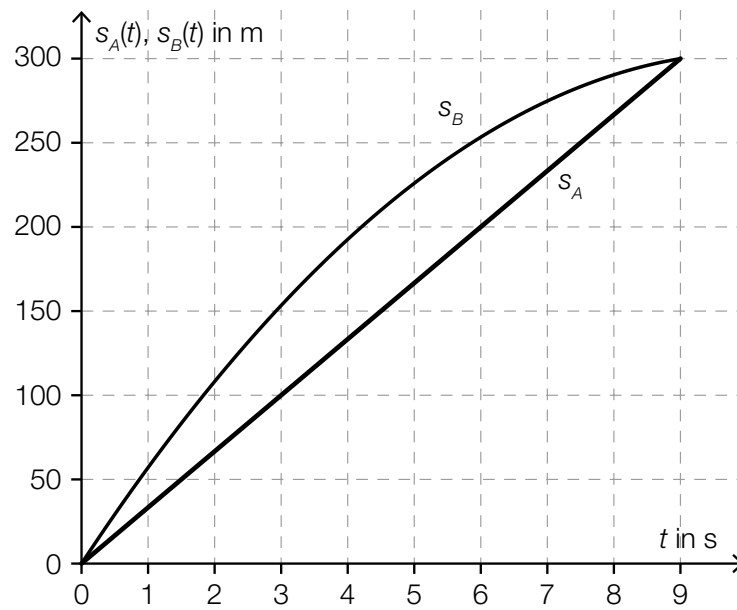
$$P(X \geq 6) \approx 0,0197$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A .
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B .

Aufgabe 4

Bitcoin

a) Lösungserwartung:

Monat: August

Kursverlust: $\approx \text{€ } 55$

$$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1,8$$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. $\text{€ } -1,8$.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. $\text{€ } 1,8$.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust.

Toleranzintervall: $[\text{€ } 50; \text{€ } 70]$

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.

Toleranzintervall: $[-2,3; -1,5]$ bzw. $[1,5; 2,3]$

b) Lösungserwartung:

$$\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0,065$$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$$f(t) = 20 \cdot 10^6$$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$

Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.

Toleranzintervall: $[0,06; 0,07]$ bzw. $[6 \%; 7 \%]$

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall $[16; 17]$ bzw. $[2025; 2026]$

c) Lösungserwartung:

$$n = 171 \quad h \approx 0,807$$

$$0,807 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \approx 0,807 \pm 0,059 \Rightarrow [0,748; 0,866]$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$0,880 - \frac{138}{171} \approx 0,073$$

$$0,073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \Rightarrow z \geq 2,418$$

$$2 \cdot \Phi(2,418) - 1 \approx 0,984$$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]

Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

– Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]