Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

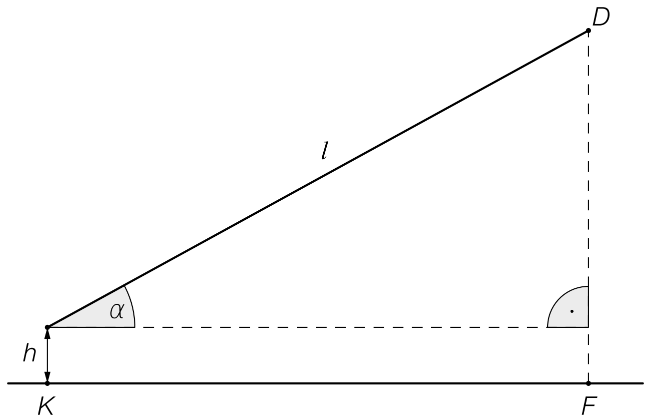
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Drachensteigen

Ein Kind lässt einen Drachen steigen. Die Positionen von Kind (*K*) und Drachen (*D*) zu einem bestimmten Zeitpunkt sind in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



Der Standpunkt *K* des Kindes sowie der Punkt *F* liegen in einer waagrechten Ebene. Das Kind hält den Drachen in einer Höhe *h* von 1,5 m über dem Boden, die Länge der gespannten Drachenschnur beträgt $l = 50$ m.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe $\overline{FD}$ des Drachens über der Ebene (in Metern) in Abhängigkeit vom Winkel α an!

Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Winkel α, für den die waagrechte Entfernung $\overline{KF}$ gleich der Höhe $\overline{FD}$ des Drachens ist, berechnet werden kann, und ermitteln Sie α!

Lösung zur Aufgabe 1

Drachensteigen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\overline{FD} = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel angegeben wird. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\overline{KF} = \overline{FD} \quad \Rightarrow \quad 50 \cdot \cos(\alpha) = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$
$\alpha \approx 43{,}78°$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl eine korrekte Gleichung zur Berechnung von α als auch der Winkel α korrekt angegeben ist.
Toleranzintervall: [43°; 44°]

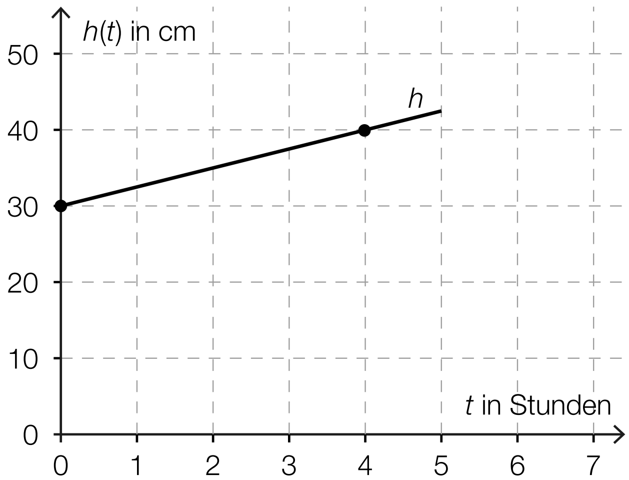
Aufgabe 2

Schneefall

Die Höhe einer Schneedecke während eines fünfstündigen Schneefalls kann mithilfe einer linearen Funktion h modelliert werden. Dabei ist $h(t)$ die Höhe der Schneedecke in cm und t die Zeit in Stunden mit $0 \leq t \leq 5$.

Aufgabenstellung:

Der nachstehend dargestellte Graph veranschaulicht die Höhe der Schneedecke während dieses fünfstündigen Schneefalls. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Schneedeckenhöhe h von der Zeit t durch eine Funktionsgleichung und geben Sie die Bedeutung der in dieser Funktionsgleichung auftretenden Zahlenwerte an!

Leitfrage:

Geben Sie für eine Funktion h_1 alle Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, damit durch h_1 eine direkte Proportionalität zwischen der Schneedeckenhöhe $h_1(t)$ (in cm) und der Zeit t (in Stunden) beschrieben wird!

Geben Sie eine Funktionsgleichung derjenigen Funktion h_1 an, die eine derartige direkte Proportionalität beschreibt, wenn die Schneedecke nach einem fünfstündigen Schneefall 20 cm hoch ist!

Lösung zur Aufgabe 2

Schneefall

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$h(t) = 30 + 2{,}5 \cdot t$

Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) beträgt die Höhe der Schneedecke 30 cm.
Pro Stunde nimmt die Höhe der Schneedecke um 2,5 cm zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung und die Bedeutung der Zahlenwerte (sinngemäß) korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Zu Beginn der Beobachtungen (bei $t = 0$) muss die Schneehöhe null sein und der (absolute) Höhenzuwachs pro Zeiteinheit muss konstant sein.

$h_1(t) = 4 \cdot t$

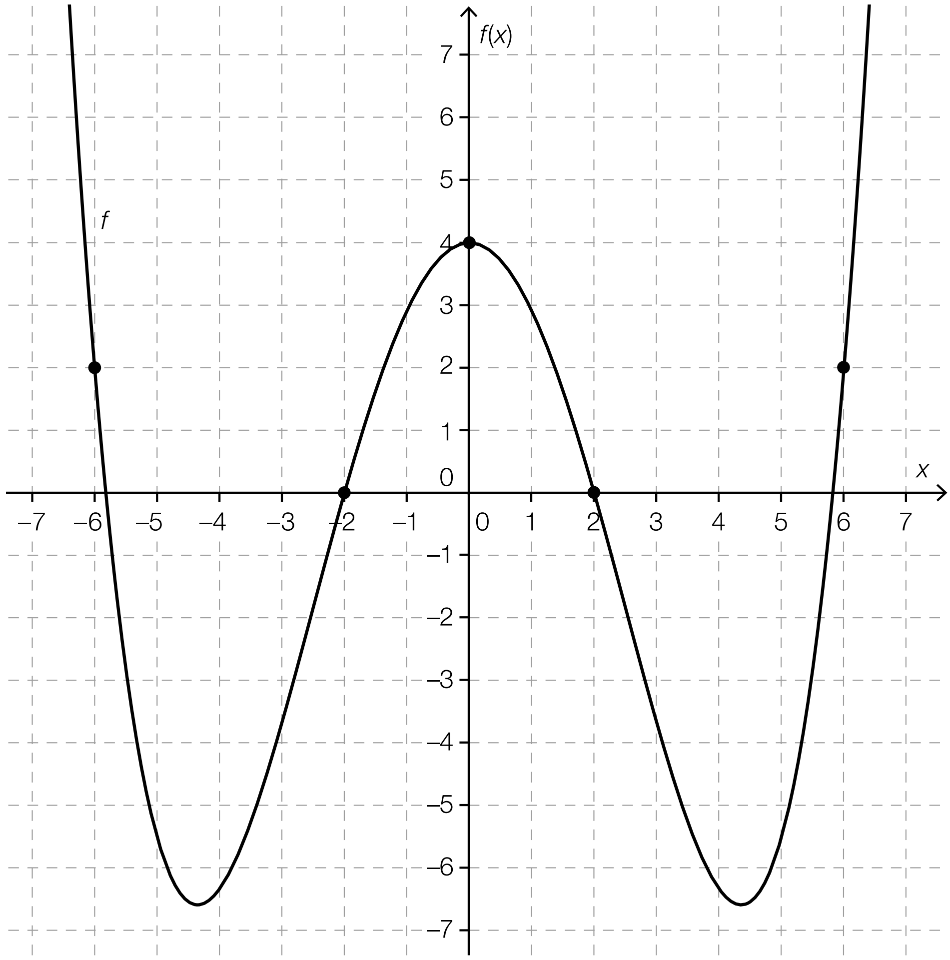
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl beide in der Lösungserwartung genannten Bedingungen (sinngemäß) korrekt angegeben werden als auch die Funktionsgleichung korrekt angegeben wird.

Aufgabe 3

Polynomfunktion vierten Grades

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f vierten Grades mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ dargestellt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Parameter a, b und c der Funktion f!
Geben Sie diejenigen Intervalle an, in denen $f'(x) > 0$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie ein $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 2$ so an, dass die nachstehende Gleichung allgemeingültig ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$$

Es gibt einen weiteren Wert $h \in \mathbb{R}$, $0 \leq h \leq 2$, für den die Gleichung $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$ erfüllt ist. Berechnen Sie diesen Wert!

Lösung zur Aufgabe 3

Polynomfunktion vierten Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a \approx 0{,}0295$ $b \approx -1{,}1181$ $c = 4$
Intervalle: $(-4{,}35; 0)$ und $(4{,}35; \infty)$

Mögliche Vorgehensweise:
In einem Intervall $(x_1; x_2)$ gilt $f'(x) > 0$, wenn an jeder Stelle $x \in (x_1; x_2)$ die Tangente an den Graphen der Funktion f steigend ist. Durch die Ermittlung der Extremstellen können die Grenzen dieser Intervalle festgelegt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Parameter a, b und c als auch beide Intervalle korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Halboffene oder geschlossene Intervalle sowie andere korrekte Schreibweisen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervalle für die beiden unteren Intervallgrenzen: $[-4{,}4; -4{,}3]$ bzw. $[4{,}3; 4{,}4]$

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für $k = 3$ ist die Gleichung allgemeingültig.

Mögliche Vorgehensweise:
Es gilt: $f'(0) = 0$, da $x = 0$ eine lokale Maximumstelle ist. Damit auch die Differenz der bestimmten Integrale null ergibt, müssen die beiden von null verschiedenen Integralgrenzen (unter der Bedingung $k > 2$) symmetrisch zum Ursprung liegen (da die Funktion f eine gerade Funktion ist bzw. der Funktionsgraph symmetrisch zur senkrechten Achse ist).

Auch für $h \approx 0{,}91$ ist die Gleichung allgemeingültig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl k korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert als auch h richtig berechnet wird.

Aufgabe 4

Bevölkerungszahl

Die Bevölkerungszahl eines bestimmten Landes im Jahr t wird im Folgenden mit $B(t)$ bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die beiden nachstehenden Gleichungen im Hinblick auf die Bevölkerungszahl dieses Landes!

- $\frac{B(2015)}{B(1950)} = 2$
- $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$

Leitfrage:

Interpretieren Sie die Gleichung $\frac{B(2015) - B(2000)}{15} = 100\,000$ im gegebenen Kontext!

Ermitteln Sie anhand der gegebenen Gleichungen die Bevölkerungszahl dieses Landes im Jahr 2015 und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 4

Bevölkerungszahl

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Interpretationen:
- Die Bevölkerungszahl des Landes ist 2015 doppelt so hoch wie 1950.
- Die Bevölkerungszahl des Landes ist 2015 um 10 % höher als 2000.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Gleichungen (sinngemäß) korrekt interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Bevölkerungszahl des Landes hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um durchschnittlich 100 000 Einwohner/innen pro Jahr zugenommen.

Die Bevölkerungszahl im Jahr 2015 beträgt 16,5 Millionen.

Mögliche Vorgehensweise:
In den 15 Jahren hat die Bevölkerungszahl somit um 1,5 Millionen zugenommen.
Da dies laut der Gleichung $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$ einer 10%igen Zunahme entspricht, muss $B(2000) = 15$ Millionen gelten.
$B(2015) = B(2000) + 1{,}5 = 16{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Gleichung im Kontext korrekt interpretiert als auch die Bevölkerungszahl im Jahr 2015 richtig ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Aufgabe 5

Rabattwürfeln

Ein Geschäft veranstaltet ein Gewinnspiel. Ziel dieses Gewinnspiels ist es, mit einem „fairen" Würfel eine möglichst hohe Zahl zu würfeln. (Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)
Würfelt man eine Zahl von 1 bis 5, so entspricht diese gewürfelte Zahl dem Rabatt in Prozent. Würfelt man beim ersten Mal einen Sechser, darf man ein zweites Mal würfeln, und die Summe der beiden gewürfelten Zahlen ergibt den Rabatt in Prozent.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Kunde 10 % Rabatt erhält!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X beschreibt den Rabatt in Prozent, den ein Kunde erhalten kann.

Geben Sie alle möglichen Werte samt den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten an, die die Zufallsvariable X annehmen kann!

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariable X und deuten Sie den ermittelten Wert im gegebenen Kontext!

Lösung zur Aufgabe 5

Rabattwürfeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Ein Kunde erhält 10 % Rabatt, wenn er beim ersten Wurf einen Sechser und beim zweiten Wurf einen Vierer würfelt.

$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Werte der Zufallsvariablen:
1, 2, 3, 4, 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\ \%$
7, 8, 9, 10, 11, 12 mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot \frac{1}{6} + (7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) \cdot \frac{1}{36} \approx 4{,}08$

Im Durchschnitt ist ein Rabatt von 4 % zu erwarten.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Werte, die die Zufallsvariable annehmen kann, und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten richtig angegeben werden. Weiters muss der Erwartungswert richtig ermittelt und korrekt gedeutet werden.