Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Die Gerade g wird durch die Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.

Aufgabenstellung:

Die Gleichung $a \cdot x - 6 \cdot y = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beschreibt dieselbe Gerade g. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die durch die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ beschriebene Gerade h verläuft normal zu g. Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt $S = (8 | y_S)$.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = -2$
$b = -22$

Mögliche Vorgehensweise:
Der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ -6 \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor der Geraden und somit gilt: $\begin{pmatrix} a \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

$\Rightarrow \quad 3 \cdot a + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

Da der Punkt $P = (2|3)$ auf der Geraden liegt, gilt: $-2 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = b \quad \Rightarrow \quad b = -22$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte der beiden Parameter a und b sowie eine korrekte Vorgehensweise angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$k = 3$
$d = -23$

Mögliche Vorgehensweise:
Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ von h muss ein Vielfaches des Normalvektors $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ von g sein $\quad \Rightarrow \quad k = 3$.
Da S auf g liegt, muss $S = (8|y_S)$ die Gleichung $-2 \cdot x - 6 \cdot y = -22$ erfüllen $\quad \Rightarrow \quad y_S = 1$.
Da S auf h liegt, muss $S = (8|1)$ die Gleichung $y = k \cdot x + d$ erfüllen $\quad \Rightarrow \quad 1 = 3 \cdot 8 + d \quad \Rightarrow \quad d = -23$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte der beiden Parameter k und d sowie eine korrekte Vorgehensweise angegeben werden.

Aufgabe 2

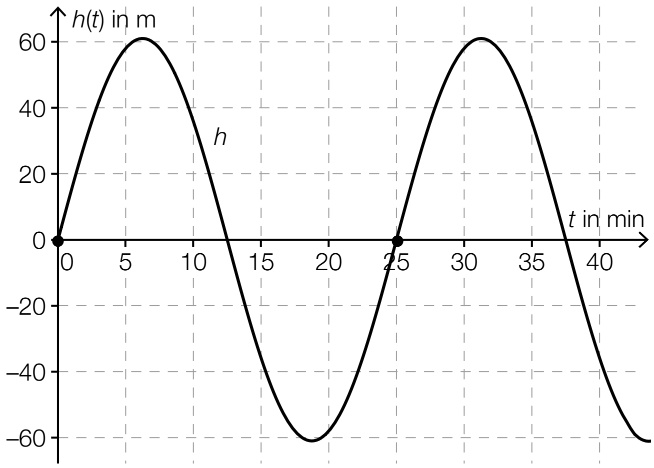
London Eye

Das größte Riesenrad Europas ist das *London Eye* mit einem Durchmesser von 122 Metern und einer Höhe von 135 Metern.

Der Mittelpunkt des Riesenrads befindet sich in 74 Metern Höhe über dem Boden, zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich eine Gondel des Riesenrads auf der Höhe des Mittelpunkts.

Die relative Höhe dieser Gondel in Bezug auf eine horizontale Ebene durch den Mittelpunkt des Riesenrads kann mithilfe einer Funktion h mit $h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Dabei ist $h(t)$ die relative Höhe der Gondel in Metern t Minuten nach Beobachtungsbeginn.

Der Graph der Funktion h ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Periodenlänge der Funktion h an und deuten Sie diese in Bezug auf die Bewegung des Riesenrads!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b der Funktion h!

Ermitteln Sie weiters, in welcher Höhe über dem Boden sich die Gondel nach 10 Minuten befindet und zu welchen Zeitpunkten $t \in [0; 30]$ sich die Gondel in 34 Metern Höhe über dem Boden befindet!

Lösung zur Aufgabe 2

London Eye

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Periodenlänge beträgt 25 Minuten, d. h., das Riesenrad benötigt 25 Minuten für eine volle Umdrehung.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Periodenlänge richtig angegeben und korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a = 61$ und $b = \frac{2\pi}{25}$

$h(t) = 61 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{25} \cdot t\right) \quad \Rightarrow \quad h(10) \approx 36$ Höhe über dem Boden: ca. 110 m

$h(t) = -40 \quad \Rightarrow \quad t \approx 15{,}3$ bzw. $t \approx 22{,}2$

Nach ca. 15 bzw. ca. 22 Minuten befindet sich die Gondel in 34 Metern Höhe.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Werte der Parameter *a* und *b* als auch die Höhe nach 10 Minuten sowie die gesuchten Zeitpunkte korrekt angegeben werden.

Aufgabe 3

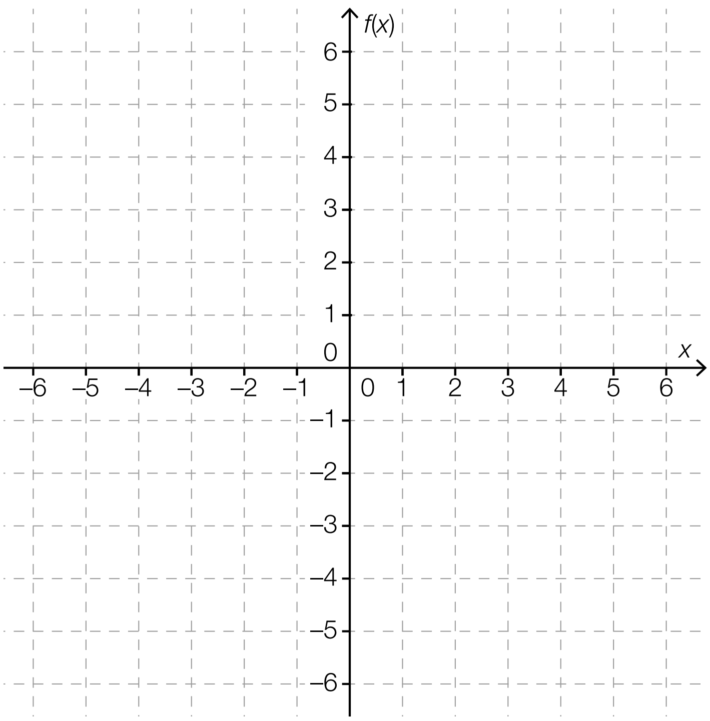
Graph einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion f erfüllt die nachstehend angeführten Bedingungen.

$f'(-2) < 0$
$f'(2) > 0$
$f''(2) = 0$
$f(4) = 4$
$f'(4) = 0$

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f mit kleinstmöglichem Grad!



Leitfrage:

Eine Funktion g soll – zusätzlich zu den für f gegebenen Bedingungen – auch $g''(4) = 0$ erfüllen.

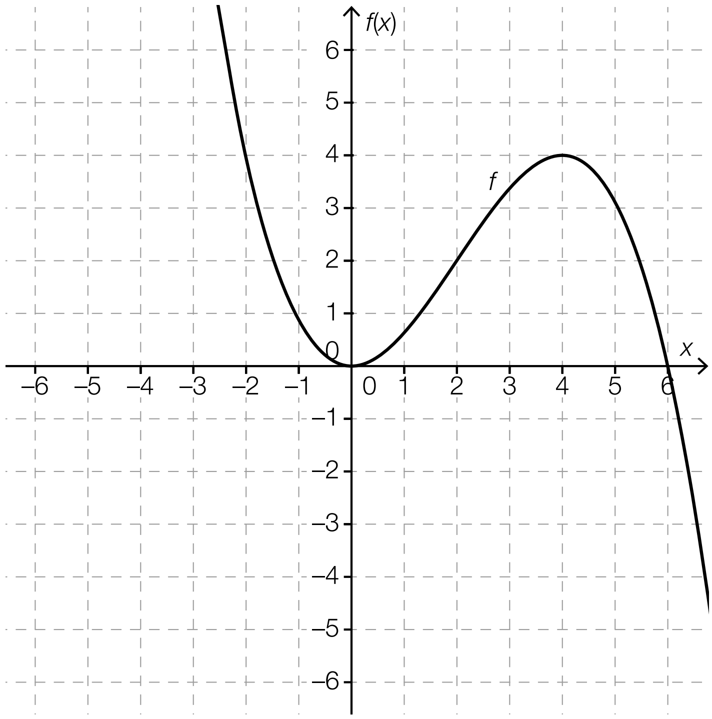
Begründen Sie, warum der Grad von g mindestens um 1 höher als der Grad von f sein muss!

Erläutern Sie, wie sich das Monotonieverhalten der Funktion g von jenem der Funktion f unterscheidet, wenn der Grad von g um genau 1 höher als jener von f ist!

Lösung zur Aufgabe 3

Graph einer Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein möglicher Graph korrekt gezeichnet wird.
Der Graph muss die charakteristischen Merkmale einer Polynomfunktion dritten Grades aufweisen.
Der Wendepunkt muss sich an der Stelle $x = 2$ und der Hochpunkt im Punkt $(4|4)$ befinden.
An der Stelle $x \approx 0$ muss ein Tiefpunkt vorliegen.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründung:

Die zweite Ableitungsfunktion von g hat zwei verschiedene Nullstellen und ist daher mindestens vom Grad 2. Somit muss die Funktion g mindestens vom Grad 4 sein.

Die Funktion g ist für $x > 0$ streng monoton steigend, hingegen ist die Funktion f im Intervall $(4; \infty)$ streng monoton fallend.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Grad der Funktion richtig angegeben und begründet wird und der Unterschied im Monotonieverhalten der beiden Funktionen korrekt erläutert wird.

Aufgabe 4

Zugfahrt

Ein Zug startet seine Fahrt von einer Station, fährt ohne Zwischenstopp zur nächsten Station und hält dort an.

In diesem Zeitintervall kann seine Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v mit
$v(t) = -0{,}15 \cdot t^2 + 0{,}90 \cdot t$ modelliert werden. Dabei wird t in Minuten und $v(t)$ in km/min angegeben.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem die Geschwindigkeit des Zuges maximal ist, und geben Sie diese maximale Geschwindigkeit v_{max} an!

t_0 = ____________________ min

v_{max} = ____________________ km/min

Leitfrage:

Ermitteln Sie die Fahrtdauer des Zuges für die Fahrt zwischen den beiden Stationen!

Beschreiben Sie die Entfernung s zwischen den beiden Stationen mithilfe eines bestimmten Integrals und ermitteln Sie diese Entfernung!

Geben Sie denjenigen Zeitpunkt $\overline{t}$ an, zu dem 80 % der Wegstrecke zurückgelegt sind!

Lösung zur Aufgabe 4

Zugfahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 3$ min
$v_{max} = v(3) = 1{,}35$ km/min

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gesuchte Zeitpunkt und die Maximalgeschwindigkeit korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 6$ und $t_2 = 0$

Die Fahrtdauer des Zuges zwischen den beiden Stationen beträgt 6 Minuten.

$s = \int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad s = 5{,}4$ km

Die Entfernung der beiden Stationen beträgt 5,4 km.

$\int_0^{\overline{t}} v(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}8 \cdot 5{,}4 \quad \Rightarrow \quad \overline{t} \approx 4{,}28$

Nach ca. 4,28 Minuten sind 80 % der Wegstrecke zurückgelegt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Fahrtdauer, das bestimmte Integral und die Entfernung sowie der Zeitpunkt $\overline{t}$ korrekt angegeben werden.

Aufgabe 5

Datenlisten

Gegeben ist eine aus acht Zahlen bestehende Datenliste $x_1, x_2, \dots, x_8$ mit dem arithmetischen Mittel $\bar{x} = 10$ und der Standardabweichung $s_x = 2$.

Aufgabenstellung:

Die Datenliste wird um die beiden Zahlen $x_9 = 12$ und $x_{10} = 13$ erweitert.

Ermitteln Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}_1$ der erweiterten Datenliste $x_1, x_2, \dots, x_{10}$!

Leitfrage:

Wenn man jeden Wert der ursprünglichen Datenliste $x_1, x_2, \dots, x_8$ mit einer Zahl $a \in \mathbb{N}$ multipliziert und dann eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ addiert, entsteht eine neue Datenliste $y_1, y_2, \dots, y_8$.
Es gilt also: $y_i = a \cdot x_i + b$ mit $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Standardabweichung der neuen Datenliste mit jener der ursprünglichen Datenliste übereinstimmt und das arithmetische Mittel $\bar{y}$ der neuen Datenliste den Wert 21 annimmt!

Lösung zur Aufgabe 5

Datenlisten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} = \frac{8 \cdot 10 + 12 + 13}{10} = 10{,}5$$

Das arithmetische Mittel der erweiterten Datenliste beträgt 10,5.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das arithmetische Mittel der erweiterten Datenliste richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für die Standardabweichung s_y der neuen Datenliste $y_1, y_2, \ldots, y_8$ gilt: $s_y = s_x \quad \Rightarrow \quad a = 1$.

$\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b \quad \Rightarrow \quad 21 = 1 \cdot 10 + b \quad \Rightarrow \quad b = 11$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte der Parameter *a* und *b* angegeben werden.