Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

16. Jänner 2018

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Aufgabe 1

Anzahl der Personen in einem Autobus

Lösungserwartung:

$M + 1 = 2 \cdot F$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.

Aufgabe 2

Fahrzeit von Zügen

Lösungserwartung:

Mögliche Gleichung:

$100 \cdot t + 150 \cdot (t - 0{,}5) = 124$
$t = 0{,}796 \quad \Rightarrow \quad t \approx 0{,}8\ \text{h}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,7 h; 0,8 h]

Aufgabe 3

Lösungen einer quadratischen Gleichung

Lösungsergebnis:

①	
$a > 0$ und $c < 0$	☒

②	
zwei verschiedene reelle Lösungen	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 4

Orthogonale Vektoren

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:
$\vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - x) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 5

Gefälle einer Regenrinne

Lösungserwartung:

$h = l \cdot \sin(\alpha)$

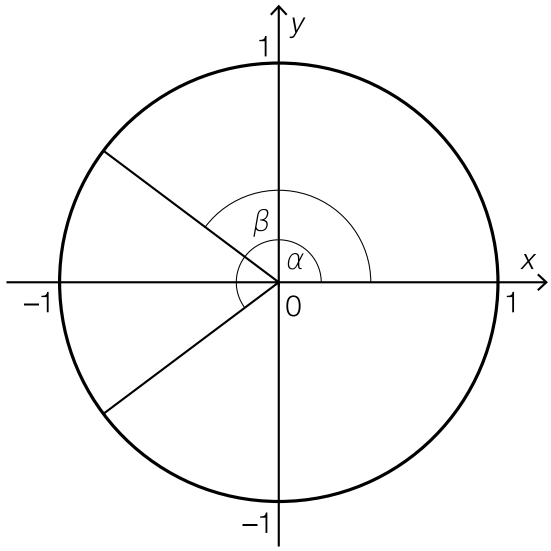
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 6

Winkel im Einheitskreis

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Ergänzung des Winkels β.
Toleranzintervall: [140°; 146°]

Aufgabe 7

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Lösungserwartung:

①	
der Oberflächentemperatur *T*	☒

②	
Potenzfunktion	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 8

Schnittpunkte

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$x^2 - 4 \cdot x - 2 = x - 6$

$x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; a = -5,\, b = 4$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Aufgabe 9

Steigung einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

$k = -\frac{b}{a}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 10

Änderungsprozess

Lösungserwartung:

Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☒

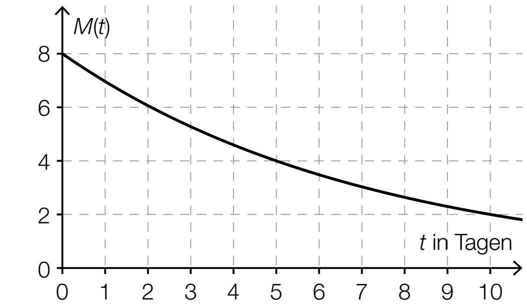
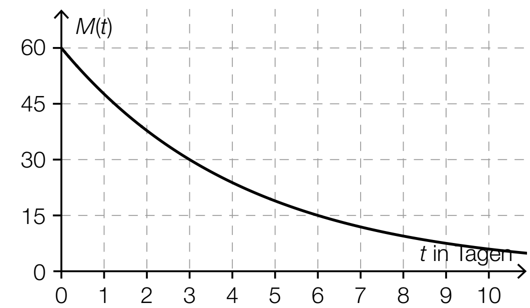
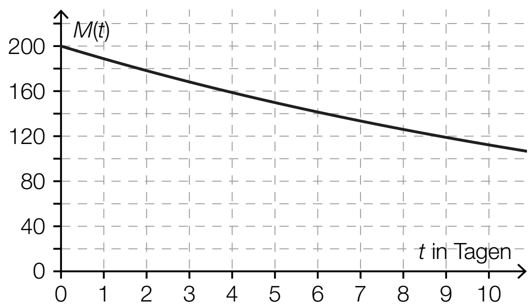
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Änderungsprozess angekreuzt ist.

Aufgabe 11

Halbwertszeiten

Lösungserwartung:

	D
	E
	C
	F

A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 12

Parameter einer Sinusfunktion

Lösungserwartung:

$a = 2$
$b = 1,5$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte beider Parameter.
Toleranzintervall für a: $[1,9; 2,1]$
Toleranzintervall für b: $[1,4; 1,6]$

Aufgabe 13

Radioaktiver Zerfall

Lösungserwartung:

$\frac{m(3) - m(0)}{m(0)}$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Ausdruck angekreuzt ist.

Aufgabe 14

Ableitung

Lösungserwartung:

$f(x) = e^{k \cdot x}$	$\boxtimes$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Funktionsgleichung angekreuzt ist.

Aufgabe 15

Flächeninhalt

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:
$F(4) - F(0) = 7 - 1 = 6$

Flächeninhalt dieses Flächenstücks: 6 FE

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Maßeinheit „FE“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,8; 6,2]

Aufgabe 16

Wendestelle

Lösungserwartung:

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle.

Mögliche Begründung:
$f''(x) = 24 \cdot x - 4$
$f''(6) = 140 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Die Funktion f kann an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle haben.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe, dass die Funktion f an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle hat, und eine korrekte Begründung.

Aufgabe 17

Bestimmtes Integral

Lösungserwartung:

$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$	☒
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen bestimmten Integrale angekreuzt sind.

Aufgabe 18

Schadstoffausstoß

Lösungserwartung:

Der Ausdruck gibt den gesamten Schadstoffausstoß (in Gramm) von 7 Uhr bis 15 Uhr an.

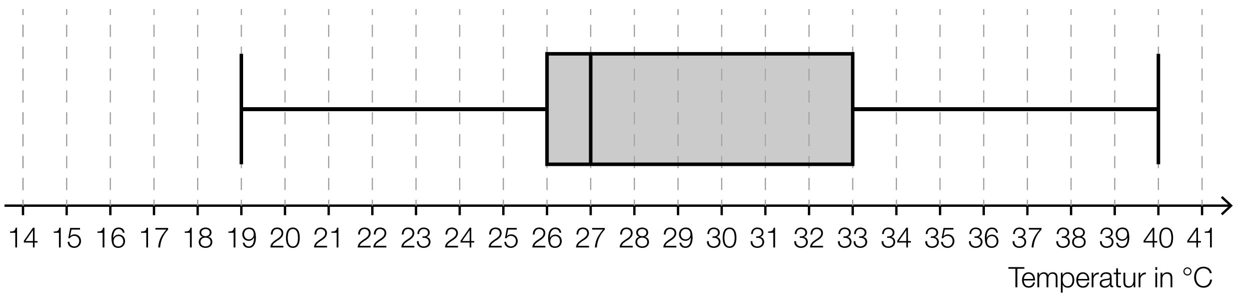
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung, wobei die Einheit „Gramm“ nicht angeführt sein muss.

Aufgabe 19

Statistische Darstellungen

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für ein korrekt dargestelltes Kastenschaubild.

Aufgabe 20

Arithmetisches Mittel

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:
$25 \cdot 12{,}6 - 24 \cdot 12{,}5 = 15$

Die als außerordentlich geführte Schülerin hat 15 Punkte erreicht.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 21

Prüfung

Lösungserwartung:

Der Ausdruck beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällig ausgewählte Prüfungsakt ein positives Prüfungsergebnis aufweist.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

Aufgabe 22

Wahrscheinlichkeit

Lösungserwartung:

$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0{,}27$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 23

Rosenstöcke

Lösungserwartung:

Der Vergleich trifft zu.

Mögliche Begründung:

Erwartungswert: $\mu = 32$, Standardabweichung: $\sigma = 4$

unter Einbeziehung der Wahrscheinlichkeiten für σ-Umgebungen (bei Approximation durch die normalverteilte Zufallsvariable Y):

$P(28 \leq X \leq 36) \approx P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$

$P(X > 32) \approx P(Y > \mu) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$

Weitere Begründungsvarianten:

n … Anzahl der Rosenstöcke

p … Wahrscheinlichkeit für einen gelbblühenden Rosenstock

$\mu = 32 = n \cdot p,\ \sigma^2 = 16 = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad \Rightarrow \quad n = 64,\ p = 0{,}5$

- mittels Binomialverteilung:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx 0{,}7396$
  $P(X > 32) \approx 0{,}4503 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$
- mittels Approximation mit Stetigkeitskorrektur durch die normalverteilte Zufallsvariable Y:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx P(27{,}5 \leq Y \leq 36{,}5) \approx 0{,}7394$
  $P(X > 32) \approx P(Y > 32{,}5) \approx 0{,}4503 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$
- mittels Approximation ohne Stetigkeitskorrektur durch die normalverteilte Zufallsvariable Y:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx P(28 \leq Y \leq 36) \approx 0{,}6827$
  $P(X > 32) \approx P(Y > 32) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe, dass der Vergleich zutrifft, und eine korrekte Begründung.

Aufgabe 24

Sicherheit eines Konfidenzintervalls

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$n = 1\,000$, $h = \frac{30}{1\,000} = 0{,}03$ Intervallbreite des Konfidenzintervalls = 0,02

aus $z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1 - h)}{n}} = 0{,}01$ folgt: $z \approx 1{,}85$ mit $\phi(1{,}85) \approx 0{,}9678$

$\Rightarrow \quad \gamma = 2 \cdot \phi(1{,}85) - 1 \approx 0{,}9356$

Somit liegt die Sicherheit dieses Konfidenzintervalls bei ca. 93,56 %.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

16. Jänner 2018

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium für Bildung

Aufgabe 1

Funktion

a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$f'(0) = b$
$x_P = 0,\ f(x_P) = c \quad \Rightarrow \quad P = (0|c)$

Steigung der Tangente: b
Abschnitt auf der senkrechten Achse: c
$\Rightarrow \quad t(x) = b \cdot x + c$

$b = 9$ und $c = 4$
$f(-1) = a - 9 + 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 25$
$\Rightarrow \quad a = 25,\ b = 9,\ c = 4$

Lösungsschlüssel:

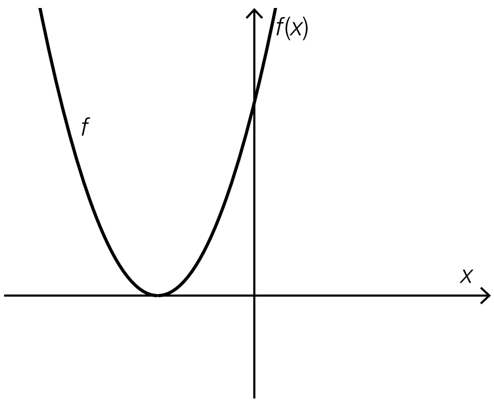
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von P und einer korrekten Gleichung von t. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von a, b und c.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$
$\Rightarrow \quad a = \frac{b^2}{4 \cdot c}$

Mögliche Skizze:



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei der Scheitel erkennbar auf der negativen x-Achse liegen und die Parabel nach oben geöffnet sein muss.

c) Lösungserwartung:

$f(x) = 16 \cdot x^2 + b \cdot x + 9$

$f'(x) = 32 \cdot x + b = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Stelle des lokalen Extremums: $x_E = -\frac{b}{32}$

Funktionswert an der Stelle x_E: $f\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - \frac{b^2}{64}$

$g\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - 16 \cdot \frac{b^2}{32^2} = 9 - \frac{b^2}{64}$, dieser Ausdruck stimmt mit dem Funktionswert an der Stelle des lokalen Extremums der Funktion f überein.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Ansteigende Straße

a) Lösungserwartung:

$$\frac{h(60) - h(0)}{60 - 0} = \frac{10 - 0}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6} \approx 0{,}17$$

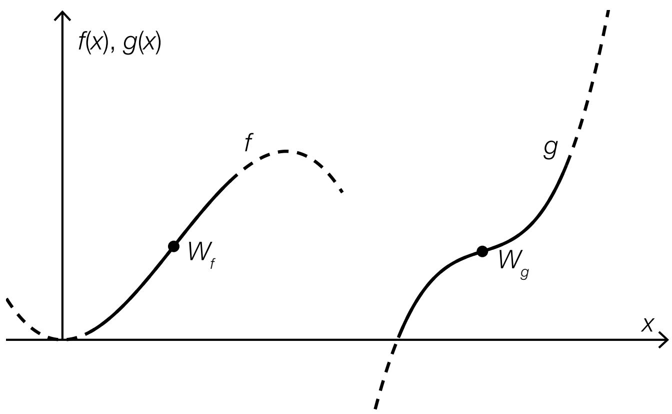
Mögliche Interpretation:

Die Straße steigt von A nach B pro Meter in waagrechter Richtung im Mittel um ca. 17 cm in senkrechter Richtung an.

Die Behauptung trifft nicht zu.

Mögliche Begründungen:

Die Wendestelle einer Funktion 3. Grades kann auch derjenigen Stelle entsprechen, an der der Anstieg minimal ist.



W_f ... Wendepunkt der Funktion f, in dem die Steigung der Tangente maximal ist
W_g ... Wendepunkt der Funktion g, in dem die Steigung der Tangente minimal ist

oder:

$f(x) = x^3$ ... Die Funktion f hat eine Wendestelle, an der die Steigung der Tangente minimal ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,16; 0,17] bzw. [16 %; 17 %].
- Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$h_1(x) = \frac{1}{6} \cdot x$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 9{,}5°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den Wert der Steigung der linearen Funktion h_1: [0,16; 0,17]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [9°; 10°]
  Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$g(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 5 \cdot t - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 5, \ (t_2 = -10)$

Die Fahrt von *A* nach *B* dauert 5 Sekunden.

Die maximale momentane Änderungsrate der Höhe im Zeitintervall [0 s; 5 s] beträgt 3 m/s, also überschreitet die momentane Änderungsrate der Höhe während dieser Zeitspanne einen Wert von 4 m/s nicht.

Mögliche Begründung:

$g'(t) = 0{,}4 \cdot t + 1$

Die momentane Änderungsrate der Höhe ist im Intervall [0 s; 5 s] streng monoton steigend, also liegt ihr maximaler Wert an der Stelle $t = 5$.

$g'(5) = 3$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Human Development Index

a) Lösungserwartung:

$$LEI = \frac{81{,}1 - 20}{85 - 20} = 0{,}94$$
$$EI \approx \frac{\ln(45\,400) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)} \approx 0{,}924$$
$$HDI_{2013} = \sqrt[3]{0{,}94 \cdot 0{,}819 \cdot 0{,}924} \approx 0{,}893$$

$$HDI_{2013} = HDI_{2008} \cdot 1{,}025$$
$$HDI_{2008} \approx 0{,}871$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,88; 0,91]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,85; 0,89]

b) Lösungserwartung:

$$k = \frac{0{,}64 - 0{,}44}{30} = 0{,}006\dot{6}$$
$$d = 0{,}44$$

In der Region „Südasien" entsprach die mittlere jährliche Zunahme des *HDI* im Zeitraum 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten".

Mögliche Begründung:

Die Sekanten durch die Punkte $(1980|0{,}44)$ und $(2010|0{,}64)$ sowie $(1980|0{,}36)$ und $(2010|0{,}54)$ verlaufen annähernd parallel zueinander.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
  Toleranzintervall für k: [0,005; 0,01]
  Toleranzintervall für d: [0,43; 0,45]
- Ein Punkt für die Angabe der Region „Südasien" und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Ab dem Jahr 2004 weist die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 auf.

Nein, es gilt nicht als sicher, dass ab diesem Zeitpunkt ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Mögliche Begründung:

Wenn eine sehr kleine Anzahl an Ländern mit sehr hohen *HDI*-Werten einer großen Anzahl an Ländern mit niedrigen *HDI*-Werten (< 0,7) gegenübersteht, kann dennoch das arithmetische Mittel der *HDI*s größer als 0,7 sein, ohne dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Lösungsschlüssel:

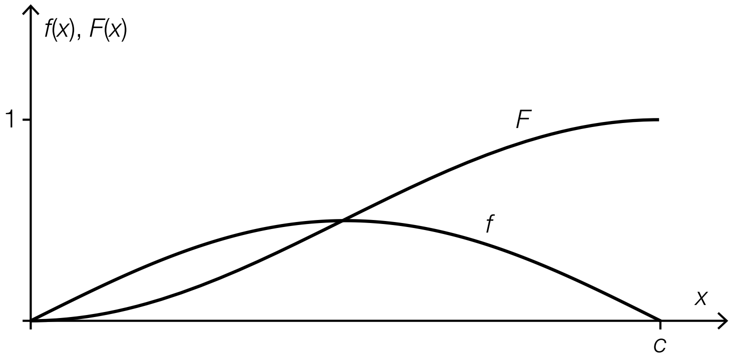
– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [2003; 2005]
– Ein Punkt für eine richtige Antwort und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen (z. B. anhand sinnvoller Zahlenbeispiele oder mit der Feststellung, dass das arithmetische Mittel nicht notwendigerweise der Median sein muss) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

a) **Lösungserwartung:**

$F(0) = 0$
$F(c) = 1$ bzw. $P(X \leq c) = 1$, d. h., die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich c annimmt, beträgt 100 %, da $f(x) = 0$ für $x > c$.



Bis zum lokalen Maximum von f ist die Funktion F linksgekrümmt, danach ist die Funktion F rechtsgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze und eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung des Krümmungsverhaltens der Funktion F. Die Skizze ist als korrekt zu betrachten, wenn das korrekte Krümmungsverhalten des Graphen von F in der Skizze klar erkennbar ist und die Wendestelle von F dabei bei $x = \frac{c}{2}$ liegt. Für $x > c$ muss der Graph von F, sofern er in diesem Bereich skizziert ist, waagrecht verlaufen.

b) **Lösungserwartung:**

Der Wert von k ist durch die Eigenschaft $F(c) = 1$ festgelegt, d. h., der Inhalt der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; c]$ eingeschlossenen Fläche muss 1 sein.
Da die rechte Nullstelle bei $x = \pi$ liegt und somit $c = \pi$ ist, muss gelten:
$\int_0^{\pi} k \cdot \sin(x)\,dx = 1 \Rightarrow k = 0{,}5.$

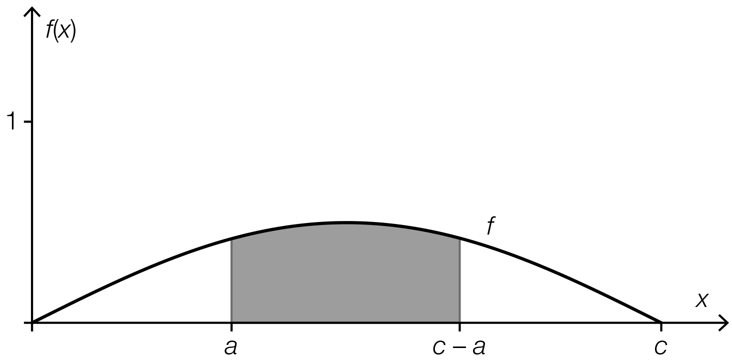
Mögliche Vorgehensweise:
$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + C$
$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0{,}5$
$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe, welche Eigenschaft von f den Wert von k festlegt, und für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Das Ereignis E beschreibt, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der größer (oder gleich) $c - a$ ist.



Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion gilt: $P(X \leq a) = P(X \geq c - a)$.
Aus $F(c) = 1$ folgt: $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - P(X \leq a) - P(X \geq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung.
– Ein Punkt für eine korrekte Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Fläche, wobei die beiden Grenzen symmetrisch zur Stelle des Maximums der Funktion f liegen müssen, und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.