

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

28. September 2017

# Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## Zahlenmengen

Lösungserwartung:

Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl.	<input checked="" type="checkbox"/>
Jede ganze Zahl ist eine reelle Zahl.	<input checked="" type="checkbox"/>
Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

## Aufgabe 2

### Lösungen einer quadratischen Gleichung

Lösungserwartung:

①	
keine reelle Lösung	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
$\frac{p^2}{4} + 3 < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

# Aufgabe 3

Projektwoche

Lösungserwartung:

$x + y = 25$	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

## Aufgabe 4

Würstelstand

Lösungserwartung:

$$\text{Gesamtgewinn} = A \cdot (B - C)$$

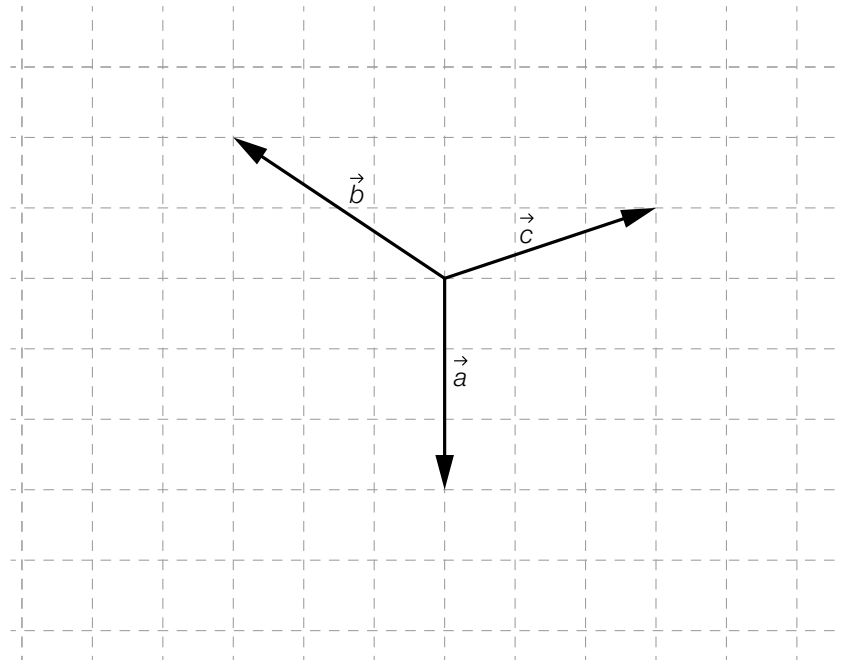
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

# Aufgabe 5

## Vektoren in der Ebene

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von  $\vec{c}$ , wobei der gesuchte Vektor auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

# Aufgabe 6

## Sinkgeschwindigkeit

Lösungserwartung:

$$x = v \cdot \sin(\alpha)$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln (auch in nicht expliziter Darstellung) sind als richtig zu werten.

# Aufgabe 7

## Funktionstypen

Lösungserwartung:

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	E
$f(x) = a \cdot b^x$	A
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	F
$f(x) = a \cdot x + b$	B

A	
B	
E	
F	

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Funktionsgleichungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.



# Aufgabe 8

## Wert eines Gegenstandes

Lösungserwartung:

$k$  ... jährliche Wertminderung (des Gegenstandes), jährlicher Wertverlust, jährliche Abnahme des Wertes

$d$  ... Wert des Gegenstandes zum Zeitpunkt der Anschaffung

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter.

# Aufgabe 9

## Parameter reeller Funktionen

Lösungserwartung:

$b > d$	<input checked="" type="checkbox"/>
$a > 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 10

## Exponentialfunktion

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$f(x) = c \cdot a^x \Rightarrow f(0) = c = 12$$

$$f(4) = 12 \cdot a^4 = 192 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 12 \cdot 2^x$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

# Aufgabe 11

Dicke einer Bleischicht

Lösungserwartung:

$$d = 1,2 \text{ cm}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

# Aufgabe 12

Periodizität

Lösungserwartung:

$\frac{2\pi}{b}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Wert angekreuzt ist.

# Aufgabe 13

## Angestelltengehalt

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$2\,160 + 6 \cdot 225 = 3\,510$$

$$\frac{3\,510 - 2\,160}{2\,160} = 0,625$$

Das Bruttogehalt des Angestellten ist im gesamten betrachteten Zeitraum um 62,5 % gestiegen.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall: [62 %; 63 %]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

# Aufgabe 14

## Schwimmbad

Lösungserwartung:

Die Wasserhöhe nimmt im Zeitintervall  $[2; 5]$  um durchschnittlich 4 dm pro Stunde zu.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

# Aufgabe 15

## Sinusfunktion und Cosinusfunktion

Lösungserwartung:

$f'(x) = g(x)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.



## Aufgabe 16

Differenzieren einer Exponentialfunktion

Lösungserwartung:

$$\lambda = -0,5$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall:  $[-0,55; -0,45]$

# Aufgabe 17

## Zeit-Weg-Funktion

Lösungserwartung:

Die Funktionswerte von $s''$ sind negativ.	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Wert des Differenzialquotienten von $s$ wird immer kleiner.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 18

## Flächeninhaltsberechnung

Lösungserwartung:

$A = \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$	<input checked="" type="checkbox"/>
$A = \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx + \left  \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \right $	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

# Aufgabe 19

## Stängel-Blatt-Diagramme

Lösungserwartung:

Es gab in dieser Woche mehr Vorstellungen des Films <i>A</i> als des Films <i>B</i> .	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Spannweite der Anzahl der Besucher/innen ist bei Film <i>A</i> kleiner als bei Film <i>B</i> .	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Gesamtanzahl der Besucher/innen in dieser Woche war bei Film <i>A</i> größer als bei Film <i>B</i> .	<input checked="" type="checkbox"/>
In einer Vorstellung des Films <i>B</i> waren mehr Besucher/innen als in jeder einzelnen Vorstellung des Films <i>A</i> .	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

## Aufgabe 20

Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit

Lösungserwartung:

$$p = \frac{13}{300} = 0,04\dot{3}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,04; 0,05] bzw. [4 %; 5 %]

# Aufgabe 21

## Mensch ärgere Dich nicht

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,42$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Spielfigur nach maximal drei Versuchen auf das Spielfeld setzen zu dürfen, beträgt ca. 42 %.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,4; 0,45] bzw. [40 %; 45 %]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

## Aufgabe 22

Wahrscheinlichkeit bestimmen

Lösungserwartung:

$$P(4 \leq X < 7) \approx 0,55$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,54; 0,56] bzw. [54 %; 56 %]

## Aufgabe 23

Reifen

Lösungserwartung:

$$1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{80}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.



# Aufgabe 24

## Konfidenzintervall

Lösungserwartung:

$$n = 400, h = 0,2$$

$$0,2 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot (1 - 0,2)}{400}} = 0,2 \pm 0,0392 \Rightarrow [0,1608; 0,2392]$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,160; 0,165]

Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,239; 0,243]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

28. September 2017

# Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## Aktivität und Altersbestimmung

### a) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$A(t) = |N'(t)| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A_0 = \lambda \cdot N_0$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{17}{4,92 \cdot 10^{-18}} \approx 3,46 \cdot 10^{18}$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befinden sich ca.  $3,46 \cdot 10^{18}$  Atomkerne von  $^{238}\text{U}$  in der Probe.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [ $3,4 \cdot 10^{18}$  Atomkerne;  $3,5 \cdot 10^{18}$  Atomkerne]

### b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

lebender Organismus:  $A_0 = 25 \cdot 0,267 = 6,675$  Bq für 25 g Kohlenstoff

$$4 = 6,675 \cdot e^{-1,21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$t \approx 4232 \text{ Jahre}$$

Mögliche Vorgehensweise:

$\tau$  ... Halbwertszeit

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$$

$$\ln(2) = \lambda \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5730$$

Zum Zeitpunkt des Fundes sind weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen, da die Halbwertszeit von  $^{14}\text{C}$  ca. 5730 Jahre beträgt, das Holz aber erst vor ca. 4232 Jahren abgestorben ist.

### Lösungsschlüssel:

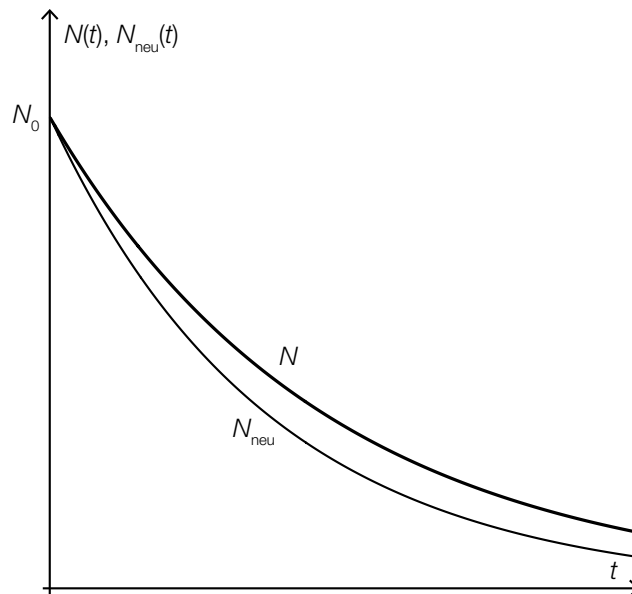
- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [4225 Jahre; 4240 Jahre]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen  $^{14}\text{C}$ -Atomkerne zerfallen sind. Andere korrekte Begründungen (z. B. über das Absinken der Aktivität) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{1}{2} = \frac{N(\tau)}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 0,5^{\frac{\tau}{c}}}{N_0} = 0,5^{\frac{\tau}{c}} \Leftrightarrow \frac{\tau}{c} = 1 \Leftrightarrow \tau = c$$

Die Konstante  $c$  entspricht der Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes.



Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Zusammenhangs.
- Ein Punkt für das Einzeichnen eines korrekten Verlaufs des Graphen einer möglichen Funktion  $N_{\text{neu}}$ . Der skizzierte Graph muss den Punkt  $(0|N_0)$  enthalten, zwischen dem Graphen der Funktion  $N$  und der Zeitachse liegen und als Graph einer (streng) monoton fallenden linksgekrümmten Funktion erkennbar sein.

# Aufgabe 2

## Schwimmzonen

a) Lösungserwartung:

$$A(x) = x \cdot (180 - 2 \cdot x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$A'(x) = 180 - 4 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 45$$

$$(A''(45) = -4 < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum})$$

Aus  $A''(x) < 0$  für alle  $x$  folgt, dass  $A$  rechtsgekrümmt ist und das lokale Maximum daher ein globales Maximum ist.)

Länge = 90 m

Breite = 45 m

Flächeninhalt = 4050 m<sup>2</sup>

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Gleichungspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe aller drei richtigen Werte. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums ist nicht erforderlich.

b) Lösungserwartung:

alle Werte, die  $x$  bei  $h = 40$  m annehmen darf:  $x \in [40; 90]$

alle Werte, die  $h$  bei  $x = 50$  m annehmen darf:  $h \in [0; 50]$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für  $x$ .  
Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für  $h$ .  
Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 3600 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

oder:

$$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 1800 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Mögliche Vorgehensweise:

größtmöglicher Flächeninhalt: bei  $\alpha = 30^\circ$

$$30 + 60 + 30 = 120$$

Der Strandabschnitt ist dabei 120 m lang.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Andere korrekte Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss.  
Toleranzintervall: [115 m; 125 m]

# Aufgabe 3

## Brasilien

### a) Lösungserwartung:

Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der beiden Werte.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

### b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$f(t) = 146917459 + k \cdot t$$

$$k = \frac{190755799 - 146917459}{19} \approx 2307281$$

$$f(t) = 146917459 + 2307281 \cdot t$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$f(23) = 199984922$$

$$\frac{199984922}{202740000} \approx 0,986$$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.  
Toleranzintervall für  $k$ : [2305000; 2310000]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.  
Toleranzintervall: [1 %; 2 %] bzw. [0,01; 0,02]

c) Lösungserwartung:

Mögliche Deutung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl  $x_n$  im Zeitintervall  $[n; n + 1]$  aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

Mögliche Vorgehensweise:

$$x_{2015} \leq 1,01 \cdot x_{2014}$$

$$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14,6 - 6,6}{1000} + m_{2014} \leq 1,01 \cdot x_{2014}$$

daher

$$m_{2014} \leq \left(1,01 - 1 - \frac{14,6 - 6,6}{1000}\right) \cdot x_{2014}$$

$$m_{2014} \leq 0,002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um 1 % größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Deutung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall: [405 000 Personen; 406 000 Personen]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.



# Aufgabe 4

## Wachstumskurve von Kindern

### a) Lösungserwartung:

Stichprobenanteil: 0,9  
Anteil laut Diagramm: 0,94  
Unterschied: 4 Prozentpunkte

Mögliche Berechnung:

$$0,9465 = 0,9 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,9 \cdot (1 - 0,9)}{n}} \Rightarrow n \approx 160 \text{ Buben}$$

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [155 Buben; 165 Buben]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

### b) Lösungserwartung:

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum entspricht einem Drittel der Größenzunahme.

oder:

$$\frac{g(9) - g(6)}{3}$$

Das ungefähre Alter von Buben, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, liegt bei ca. 13 Jahren.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort bzw. eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angeführt sein muss.  
Toleranzintervall: [12 Jahre; 14 Jahre]

c) Lösungserwartung:

Die statistische Kennzahl, die demjenigen Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann, ist der Median.

Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass man zwar das 1. und das 3. Quartil sowie den Median, jedoch weder Minimum noch Maximum ablesen kann (und auch keine Informationen bezüglich Ausreißern hat).

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Ausgleichspunkt für das Anführen der korrekten statistischen Kennzahl.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erläuterung.