Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlen und Gleichungen

Gegeben sind die vier Zahlen -17, $\sqrt{16}$, $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede dieser vier Zahlen an, ob es sich um eine rationale Zahl handelt oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Im Folgenden sei eine Funktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Geben Sie eine (möglichst einfache) nichtlineare Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten in der Form $f(x) = 0$ an, bei der eine Lösung $\sqrt{30}$ ist!

Geben Sie an, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung insgesamt hat, beschreiben Sie die Form des Graphen von f und deuten Sie die Lösungen von $f(x) = 0$ geometrisch!

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlen und Gleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Zahlen -17 und $\sqrt{16}$ sind rational, die Zahlen $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$ sind nicht rational.

Mögliche Begründungen:

-17 ist rational, weil diese Zahl eine ganze Zahl ist und somit auch in der Menge der rationalen Zahlen enthalten ist.

$\sqrt{16}$ ist rational, weil $\sqrt{16} = 4$ gilt. Diese Zahl ist eine natürliche Zahl, somit ist sie auch in der Menge der rationalen Zahlen enthalten.

Die Quadratwurzel von natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind (wie z. B. 18 und 30), ergibt irrationale Zahlen, daher sind die beiden Zahlen $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$ keine rationalen Zahlen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der vier Zahlen richtig erkannt wird, dass es sich um eine rationale Zahl handelt bzw. nicht handelt, und dies jeweils auch korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Gleichung: $f(x) = x^2 - 30 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 30 = 0$

Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen.

Mögliche Beschreibung der Form des Graphen dieser Funktion:

Der Graph von f ist eine zur senkrechten Achse symmetrische, nach oben offene Parabel.

Mithilfe der Gleichung $f(x) = 0$ werden die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse berechnet. Somit geben die Lösungen der Gleichung die Nullstellen von f an.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird, die Anzahl der Lösungen sowie die Form des Graphen richtig angegeben werden und eine korrekte Deutung formuliert wird.

Aufgabe 2

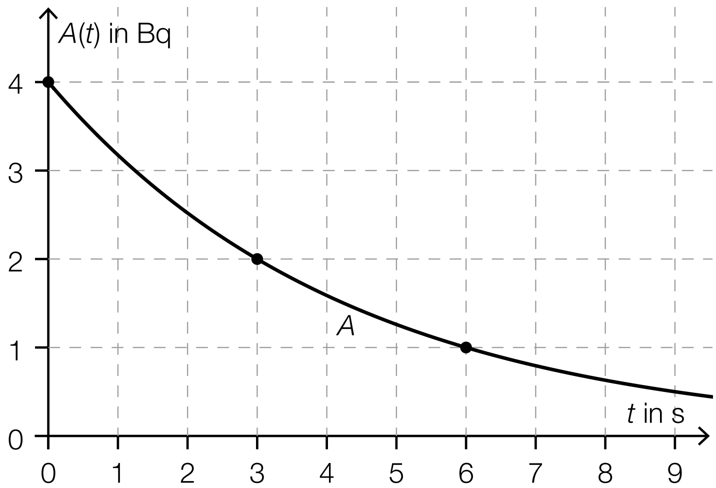
Aktivität eines radioaktiven Stoffes

Unter der Aktivität eines radioaktiven Stoffes versteht man die Anzahl der Kernzerfälle pro Sekunde. Sie wird in Becquerel (Bq) angegeben.

Aufgabenstellung:

Die Aktivität A kann in der Form $A(t) = A_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. A_0 gibt den Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A für das radioaktive Isotop Scandium-53 dargestellt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Ermitteln Sie den Wert des Parameters c für das radioaktive Isotop Scandium-53 und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Abnahme der Aktivität von Scandium-53!

Leitfrage:

Die Aktivität A kann auch in der Form $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ angegeben werden.

Ermitteln Sie den Wert der Zerfallskonstanten λ für das radioaktive Isotop Scandium-53 und geben Sie eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen c und λ beschreibt!

Lösung zur Aufgabe 2

Aktivität eines radioaktiven Stoffes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A(3) = \frac{A_0}{2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}5^{\frac{3}{c}} \quad \Rightarrow \quad c = 3$

Der Parameter c gibt diejenige Zeit (in Sekunden) an, nach der die Aktivität des radioaktiven Isotops Scandium-53 auf die Hälfte gesunken ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Parameters c korrekt ermittelt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 = 4 \cdot e^{-3 \cdot \lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0{,}23105$

mögliche Gleichung: $\frac{\ln(2)}{\lambda} = c$

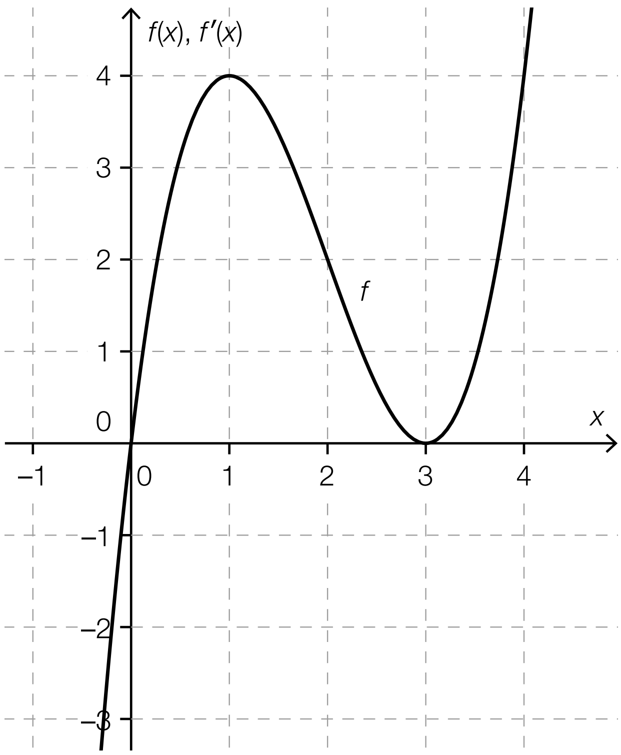
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von λ korrekt ermittelt und ein korrekter Zusammenhang zwischen c und λ angegeben wird.

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' im gegebenen Koordinatensystem und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die abgebildete Polynomfunktion f ist die Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion F.

Nachstehend sind fünf Aussagen über die Polynomfunktion F angeführt.

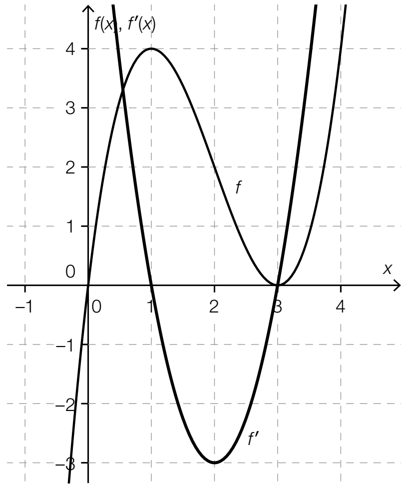
- Aussage 1: Die Funktion F ist eine Polynomfunktion vom Grad 3.
- Aussage 2: Die Funktion F ist für positive x-Werte (streng) monoton steigend.
- Aussage 3: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 0$ eine Minimumstelle.
- Aussage 4: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 3$ eine Wendestelle.
- Aussage 5: Die Funktion F ist für alle $x > 3$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Die Extremstellen von f sind die Nullstellen von f'. In Intervallen, in denen f streng monoton steigend ist, ist f' positiv bzw. in Intervallen, in denen f streng monoton fallend ist, ist f' negativ.
Die Wendestelle von f ist die Extremstelle von f'.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Ableitungsfunktion f' korrekt skizziert und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Dabei muss der Graph von f' klar als nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 \approx 1$ und $x_2 \approx 3$ erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1 ist falsch, da f eine Polynomfunktion dritten Grades ist und somit F vom Grad 4 sein muss.
Aussage 2 ist wahr, da f für positive x-Werte positive Funktionswerte hat ($F'(x) = f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$).
Aussage 3 ist wahr, da die erste Ableitung von F an der Stelle $x = 0$ gleich null ist und die zweite Ableitung von F an der Stelle $x = 0$ positiv ist ($F'(0) = f(0) = 0$ und $F''(0) = f'(0) > 0$).
Aussage 4 ist wahr, da die zweite Ableitung von F an der Stelle $x = 3$ gleich null ist und $F'''(3) \neq 0$ gilt ($F''(3) = f'(3) = 0$).
Aussage 5 ist falsch, da $F''(x) = f'(x)$ im angeführten Bereich positiv ist und somit F linksgekrümmt (positiv gekrümmt) ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der fünf Aussagen die Entscheidung über ihre Richtigkeit korrekt getroffen und (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Aufgabe 4

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Von einem Produkt A werden x Stück und von einem Produkt B werden y Stück gekauft.

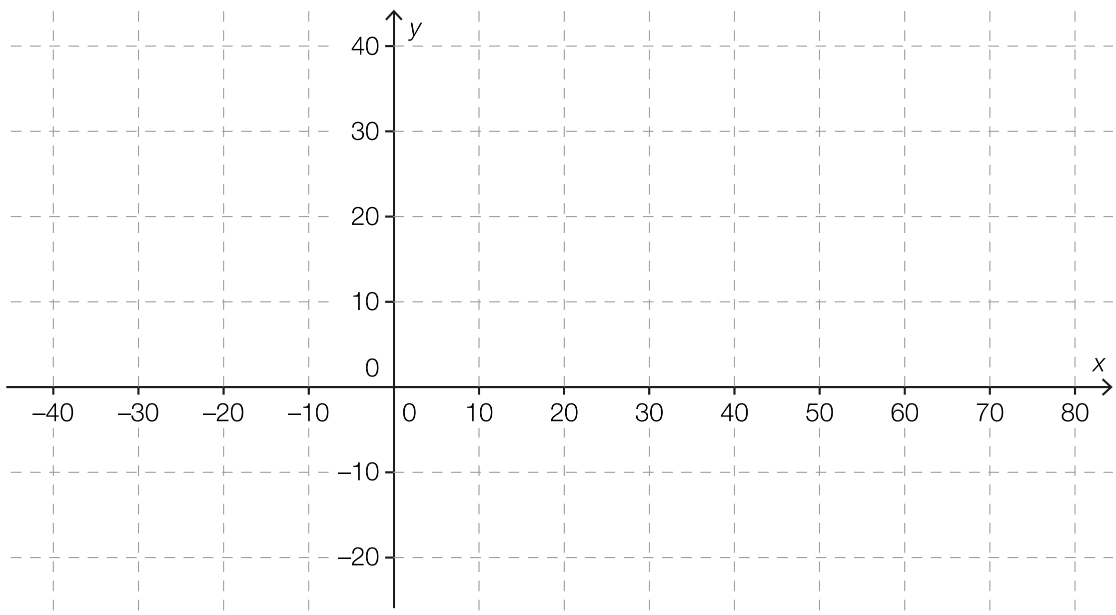
Aufgabenstellung:

Gegeben sind zwei Ungleichungen: $x \leq 2 \cdot y$ und $y \leq 18$.
Deuten Sie beide Ungleichungen im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ein Produkt A kostet € 2 pro Stück, ein Produkt B kostet € 3 pro Stück.

Ein Kunde hat von Produkt A x Stück und von Produkt B y Stück gekauft und dabei genau € 60 gezahlt.
Geben Sie eine Gleichung in den Variablen x und y an, die diesen Zusammenhang beschreibt!
Stellen Sie diese Gleichung im gegebenen Koordinatensystem dar!



Geben Sie weiters ein konkretes ganzzahliges Zahlenbeispiel an, das zusätzlich auch die beiden Ungleichungen $x \leq 2 \cdot y$ und $y \leq 18$ erfüllt!

Lösung zur Aufgabe 4

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Deutungen:

Es werden höchstens doppelt so viele Stück von Produkt *A* wie von Produkt *B* gekauft.
Es werden höchstens 18 Stück von Produkt *B* gekauft.

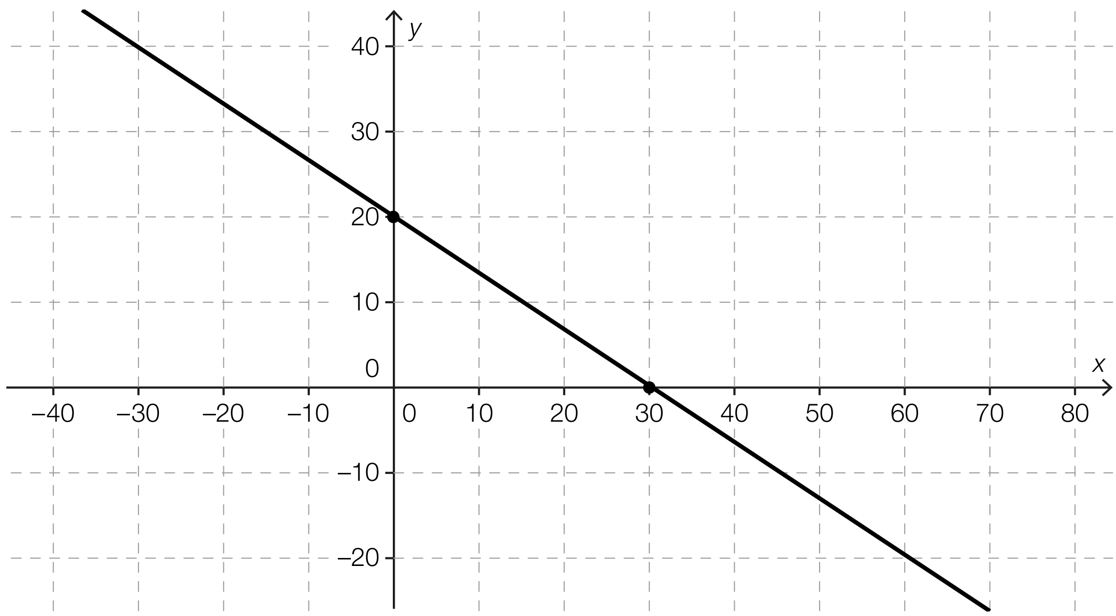
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Ungleichungen (sinngemäß) korrekt gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 60$

$y = -\frac{2}{3} \cdot x + 20$



mögliches Zahlenpaar für (x; y): (3; 18)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben und dargestellt sowie ein richtiges Zahlenbeispiel angegeben wird.
mögliche Zahlenpaare: (3; 18), (6; 16), (9; 14), (12; 12), (15; 10)

Aufgabe 5

Kugelschreiber

In einer Schachtel befinden sich acht verschiedene Kugelschreiber.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{8}{3}$ und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Eine Maschine produziert Kugelschreiber. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Produktion entnommener Kugelschreiber defekt ist, liegt bei 1 %.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in einer Stichprobe von 100 Kugelschreibern mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Bei einer Qualitätskontrolle werden fünf Stichproben mit jeweils 100 neu produzierten Kugelschreibern gezogen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in mindestens einer dieser fünf Stichproben mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Lösung zur Aufgabe 5

Kugelschreiber

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{8}{3} = 56$

Mögliche Deutung:

Es gibt 56 Möglichkeiten, von diesen 8 Kugelschreibern 3 Stück (unabhängig von der Reihenfolge) auszuwählen (ohne Zurücklegen).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Binomialkoeffizienten richtig bestimmt und korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Anzahl X der defekten Kugelschreiber in einer Stichprobe von 100 Kugelschreibern ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}01$.

$P(X \geq 2) \approx 0{,}2642 = 26{,}42\ \%$

Die Anzahl Y der Stichproben mit mindestens zwei defekten Kugelschreibern ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}2642$.

$P(Y \geq 1) \approx 0{,}7843 = 78{,}43\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten richtig angegeben werden.
Toleranzintervalle für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:
[0,26; 0,27] bzw. [26 %; 27 %] und [0,77; 0,80] bzw. [77 %; 80 %]