Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Quadratische Gleichung

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 + a \cdot x = 15$ mit $a \in \mathbb{R}$ angegeben.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie a so, dass $x_1 = -5$ eine der beiden Lösungen der Gleichung ist!

Bestimmen Sie weiters die zweite Lösung x_2 dieser Gleichung!

Leitfrage:

Geben Sie jeweils alle Werte für a an, sodass die Gleichung genau eine Lösung, keine Lösung bzw. zwei Lösungen hat, und begründen Sie jeweils die Wahl der Werte von a!

Lösung zur Aufgabe 1

Quadratische Gleichung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$(-5)^2 + a \cdot (-5) = 15 \;\Rightarrow\; a = 2$

$x^2 + 2 \cdot x = 15 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und x_2 richtig bestimmt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Damit die angegebene Gleichung genau eine Lösung hat, muss die Diskriminante null sein:

$\frac{a^2}{4} + 15 = 0$

$a^2 = -60$

Die Gleichung $a^2 = -60$ hat in den reellen Zahlen keine Lösung, daher gibt es keine Werte für a, sodass die angegebene Gleichung genau eine Lösung hat!

Damit die angegebene Gleichung keine Lösung hat, muss gelten:

$a^2 < -60$

Es gibt keine reelle Zahl, die diese Ungleichung erfüllt. Daher gibt es keine Werte für a, sodass die angegebene Gleichung keine Lösung hat!

Damit die angegebene Gleichung zwei Lösungen hat, muss gelten:

$a^2 > -60$

Jede reelle Zahl erfüllt diese Ungleichung. Daher hat die angegebene Gleichung bei jedem Wert für a genau zwei Lösungen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle drei Fälle die Werte von a richtig angegeben und (sinngemäß) richtig begründet werden.

Aufgabe 2

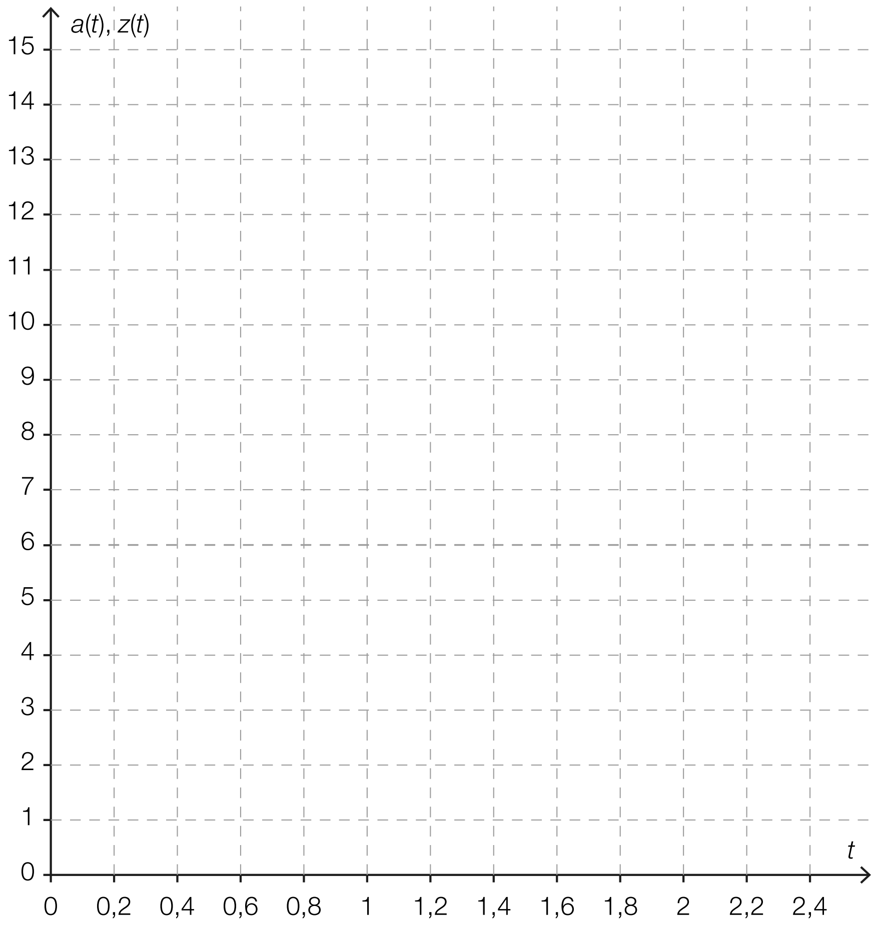
Zwischenspeicher

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich in einem Zwischenspeicher 1 000 m^3 Wasser. Der Zwischenspeicher besitzt eine Zuleitung und einen Abfluss.

Die Zuflussrate z wird durch die Gleichung $z(t) = 3 \cdot t + 4$ beschrieben. Die Abflussrate a wird durch die Gleichung $a(t) = 2 \cdot t + 5$ beschrieben. Dabei werden $z(t)$ und $a(t)$ in m^3/h und t in Stunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Graphen der Funktionen z und a dar!



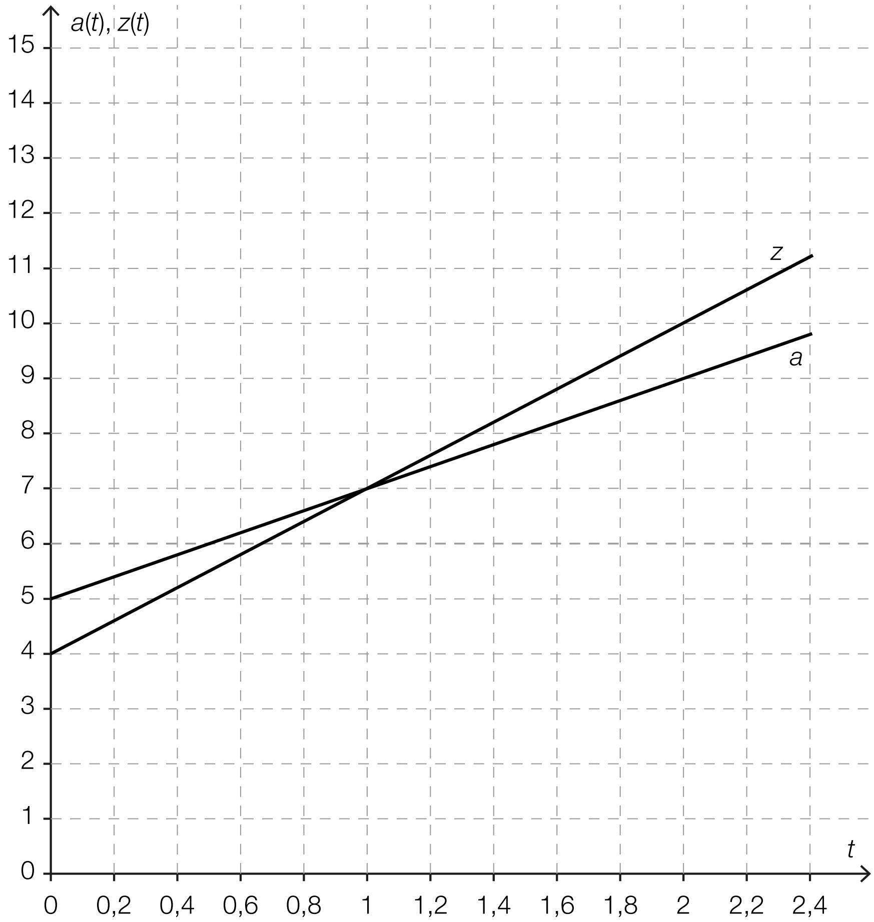
Leitfrage:

Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Funktion V, die zu jedem Zeitpunkt die Füllmenge des Zwischenspeichers angibt!

Lösung zur Aufgabe 2

Zwischenspeicher

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Graphen (die einander im Punkt (1|7) schneiden) korrekt dargestellt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Differenz von Zu- und Abflussrate ist $z(t) - a(t) = t - 1$.

$\Rightarrow \; V(t) = 1\,000 + \frac{t^2}{2} - t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung von V korrekt ermittelt wird.

Aufgabe 3

Änderungsmaße

Wird ein bestimmter Körper senkrecht nach oben geworfen, so kann die Höhe des Körpers über dem Boden näherungsweise durch eine Funktion h mit der Gleichung $h(t) = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 2$ beschrieben werden. Dabei ist $h(t)$ die Höhe des Körpers über dem Boden in Metern (m) und t die Zeit in Sekunden (s), die nach dem Wurf vergangen ist.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Änderung der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie die Ergebnisse im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem die momentane Änderungsrate der Funktion h gleich der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall [0 s; 2 s] ist, und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Lösung zur Aufgabe 3

Änderungsmaße

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$h(2) - h(0) = 42 - 2 = 40$
Die Höhe nimmt während der ersten beiden Sekunden um 40 m zu.

$\frac{h(2) - h(0)}{h(0)} = 20$

Mögliche Deutungen:

Die Höhe hat in den ersten beiden Sekunden um 2 000 % zugenommen.

oder:

In den ersten beiden Sekunden hat die Höhe um das 20-Fache zugenommen.

oder:

Nach zwei Sekunden ist die Höhe 21-mal so groß wie zu Beginn.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Änderungsmaße richtig angegeben und (sinngemäß) richtig gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = 20 \text{ m/s}$
Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in den ersten beiden Sekunden beträgt 20 m/s.

$h'(t) = -10 \cdot t + 30$
$h'(t_0) = 20 \;\Rightarrow\; -10 \cdot t_0 + 30 = 20 \;\Rightarrow\; t_0 = 1$
Die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ ist gleich der mittleren Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0 s; 2 s].

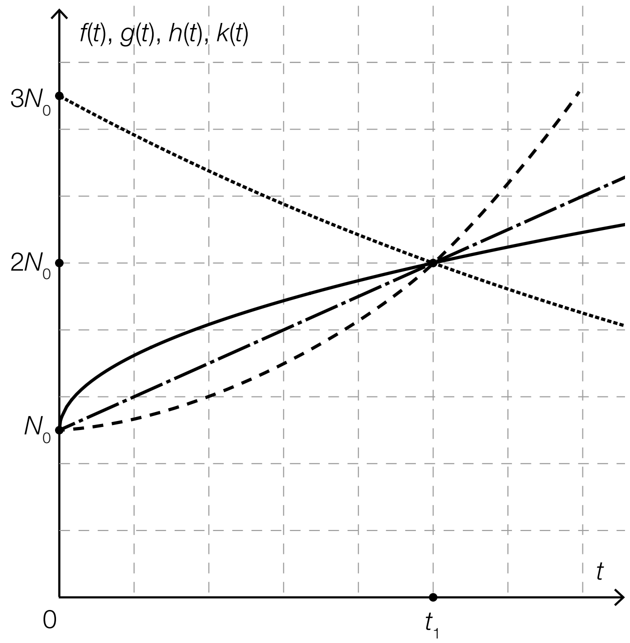
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig ermittelt und gedeutet wird. Weiters muss der Zeitpunkt t_0 korrekt bestimmt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben werden.

Aufgabe 4

Funktionsgraphen

Nachstehend sind die Graphen von vier Funktionen f, g, h und k dargestellt.



Aufgabenstellung:

Für die vier Funktionen f, g, h und k gelten für alle $t \in (0; t_1)$ folgende Aussagen:

- $f''(t) = 0$ und $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$ und $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$ und $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$ und $k'(t) < 0$

Beschriften Sie in der obigen Abbildung die Graphen korrekt mit f, g, h und k und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Leitfrage:

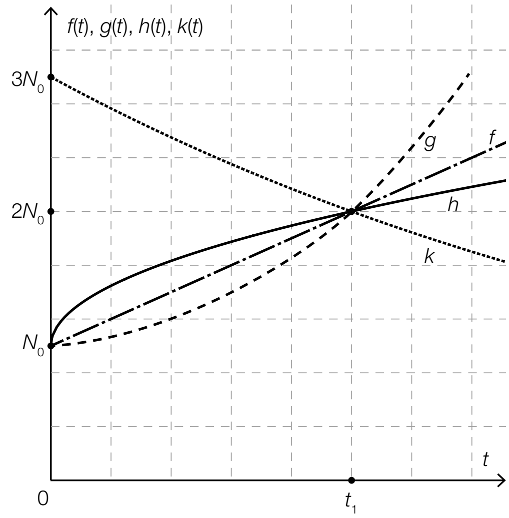
Ermitteln Sie unter Verwendung von N_0 und t_1 die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von t und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie an, ob für die Funktion f die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant" richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Funktionsgraphen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$f''(t) = 0 \;\Rightarrow\;$ Der Graph der Funktion f hat die Krümmung null (ist eine Gerade).

$g''(t) > 0$ und $g'(t) > 0 \;\Rightarrow\;$ Der Graph der Funktion g ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton steigend.

$h''(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Der Graph der Funktion h ist rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

$k''(t) > 0$ und $k'(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Der Graph der Funktion k ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle Graphen richtig beschriftet werden und jeweils eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Funktion f ist eine lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte $(0|N_0)$ und $(t_1|2N_0)$ verläuft.

Daher gilt: $f(t) = \frac{N_0}{t_1} \cdot t + N_0$.

Die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant“ ist falsch.

Mögliche Begründung:

Im Zeitintervall $[0; t_1]$ verdoppelt sich zwar der Funktionswert von N_0 auf $2N_0$, der Funktionswert im Zeitintervall $[t_1; 2t_1]$ steigt hingegen von $2N_0$ auf $3N_0$. Er verdoppelt sich also nicht.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung der Funktion f korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Weiters muss die Aussage als falsch erkannt und dies (sinngemäß) richtig begründet werden.

Aufgabe 5

Kugeln

In einer Urne befinden sich zehn schwarze und fünf weiße Kugeln.

Aufgabenstellung:

David entnimmt zuerst eine schwarze Kugel aus der Urne. Dann entnimmt er nach dem Zufallsprinzip eine weitere Kugel, ohne die erste Kugel zurückzulegen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_1, dass auch die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leo entnimmt (wieder aus allen 15 Kugeln) nach dem Zufallsprinzip hintereinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_2, dass die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Für ein Zufallsexperiment wird zusätzlich zu der in der Einleitung erwähnten Urne eine zweite Urne verwendet, die zehn weiße und fünf schwarze Kugeln enthält.

David muss nach dem Zufallsprinzip eine der beiden Urnen auswählen und dann nach dem Zufallsprinzip aus der ausgewählten Urne zwei Kugeln entnehmen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_3, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind!

Leo führt das gleiche Zufallsexperiment durch, darf aber die Kugeln anders auf die beiden Urnen verteilen, um die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Kugeln (hintereinander und ohne Zurücklegen) zu entnehmen, zu erhöhen.
Er gibt dazu alle schwarzen Kugeln in die erste Urne und alle weißen Kugeln in die zweite Urne.

Überprüfen Sie rechnerisch, ob Leo dadurch bessere Chancen als David hat, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen!

Lösung zur Aufgabe 5

Kugeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P_1 = \frac{9}{14} \approx 0{,}643 = 64{,}3\ \%$

Mögliche Erläuterung:

Wenn man weiß, dass die erste entnommene Kugel schwarz ist, befinden sich unter den 14 verbleibenden Kugeln noch 9 schwarze Kugeln.

Die für Leo günstigen Versuchsausgänge sind: schwarz – schwarz bzw. weiß – schwarz.

Mögliche Berechnung:

$P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 = 66{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten korrekt ermittelt und jeweils (sinngemäß) korrekte Vorgehensweisen erläutert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{42} \approx 0{,}2619 = 26{,}19\ \%$

Wahrscheinlichkeit, dass Leo bei seinem Zufallsexperiment zwei schwarze Kugeln entnimmt:

$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$

Leos Chancen, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen, sind deutlich höher!

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit P_3 korrekt ermittelt wird und rechnerisch nachgewiesen wird, dass Leo bessere Chancen hat, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen.