Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Äquivalenzumformungen

Für $x \in \mathbb{R}$ sind zwei Gleichungen gegeben:

- $3 - \frac{2x}{5} = -1$
- $\frac{3x}{5} + 1 = x - 3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob diese beiden Gleichungen äquivalent sind!

Für den Fall, dass diese äquivalent sind, geben Sie mögliche Äquivalenzumformungen an, um die erste Gleichung in die zweite Gleichung überzuführen!
Falls diese Gleichungen nicht äquivalent sind, begründen Sie, warum dies so ist!

Leitfrage:

Erklären Sie konkret auf das unten angegebene Beispiel bezogen, warum es sich bei der durchgeführten Umformung um keine Äquivalenzumformung handelt! Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen.

$(x - 2)^2 = 25 \quad | \ \sqrt{}$
$x - 2 = 5$

Lösung zur Aufgabe 1

Äquivalenzumformungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent.

Mögliche Äquivalenzumformungen:
Durch die Subtraktion der Zahl 2 erhält man die Gleichung $1 - \frac{2x}{5} = -3$.
Die anschließende Addition von x liefert $1 + \frac{3x}{5} = -3 + x$, und somit erhält man die zweite Gleichung.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Gleichungen als äquivalent erkannt und mögliche Äquivalenzumformungen richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die erste Gleichung hat die Lösungen –3 und 7, die zweite hingegen nur eine Lösung, nämlich 7. Die beiden Gleichungen haben daher nicht die gleiche Lösungsmenge, sind also nicht äquivalent.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt erklärt wird, warum die beiden Gleichungen nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2

Abkühlung

Ein Gefäß mit heißem Wasser wird bei einer Umgebungstemperatur von 0 °C zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ins Freie gestellt. Die Temperatur $T(t)$ (in °C) des Wassers ist abhängig von der Zeit t (in Minuten) und kann durch eine Funktion T mit $T(t) = 90 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Halbwertszeit für diesen Abkühlungsprozess und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate $T'(t)$ der Temperatur des Wassers direkt proportional zur momentanen Temperatur des Wassers zum Zeitpunkt t ist, und geben Sie den Proportionalitätsfaktor k an!

k = ____

Geben Sie an, welche Bedeutung der Betrag von T' für den Abkühlungsprozess hat!

Lösung zur Aufgabe 2

Abkühlung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$45 = 90 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \;\Rightarrow\; t \approx 3,5$

Nach ca. 3,5 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte des Ausgangswerts gesunken (von 90 °C auf 45 °C).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Halbwertszeit korrekt bestimmt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$T'(t) = 90 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2 \cdot t} = -0,2 \cdot T(t)$
$k = -0,2$

Der Betrag von T' gibt die Abkühlungsgeschwindigkeit an.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die direkte Proportionalität gezeigt und der Proportionalitätsfaktor korrekt bestimmt wird (auch $k = -5$ ist als richtig zu werten, weil gilt: $T(t) = -5 \cdot T'(t)$). Weiters muss die Bedeutung von T' (sinngemäß) korrekt angegeben werden.

Aufgabe 3

Rohölpreis

Im Dezember 2015 fiel der Preis für Rohöl täglich tendenziell ab. Der Preis für Rohöl wird in US-Dollar und bezogen auf das *Barrel* (engl. für *Fass*) angegeben, wobei ein Barrel 159 Liter beinhaltet.

Am 1. Dezember 2015 um 12:00 Uhr betrug der Rohölpreis 41,70 US-Dollar pro Barrel, am 11. Dezember 2015 um 12:00 Uhr betrug der Preis 37,94 US-Dollar pro Barrel.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Änderung des Rohölpreises pro Barrel für den angegebenen Zeitraum an!

Leitfrage:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Rohölpreises pro Liter über den angegebenen Zeitraum (in Tagen) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im gegebenen Zusammenhang!

Geben Sie an, welchen Preis 1 Liter Rohöl am 16. Dezember 2015 gehabt hätte, wenn sich der Rohölpreis ab 11. Dezember 2015 mit derselben mittleren Änderungsrate pro Tag weiterentwickelt hätte!

Lösung zur Aufgabe 3

Rohölpreis

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

absolute Änderung: –3,76 US-Dollar pro Barrel
relative Änderung: –9 % bzw. –0,09

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Werte richtig angegeben werden.
Auch die Angabe von positiven Werten (3,76 US-Dollar und 9 %) ist gültig, wenn verbal eindeutig darauf hingewiesen wird, dass es sich um eine Abnahme handelt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Lösung:
mittlere Änderungsrate: $\dfrac{\frac{37,94}{159} - \frac{41,7}{159}}{10} \approx -0,00236$

Der Rohölpreis pro Liter hat in diesem Zeitraum um durchschnittlich ca. 0,00236 US-Dollar pro Tag abgenommen.

Preis pro Liter am 16.12.2015 bei beschriebener Entwicklung: $\frac{37,94}{159} - 5 \cdot 0,00236 \approx 0,2268$
Der Preis pro Liter hätte ca. 0,2268 US-Dollar betragen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate des Rohölpreises pro Liter richtig angeben und (sinngemäß) korrekt interpretiert wird sowie der Rohölpreis pro Liter für den 16.12.2015 korrekt angegeben wird.
Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: [–0,0024; –0,002]
Toleranzintervall für den Preis pro Liter: [0,22; 0,23]

Aufgabe 4

Integral

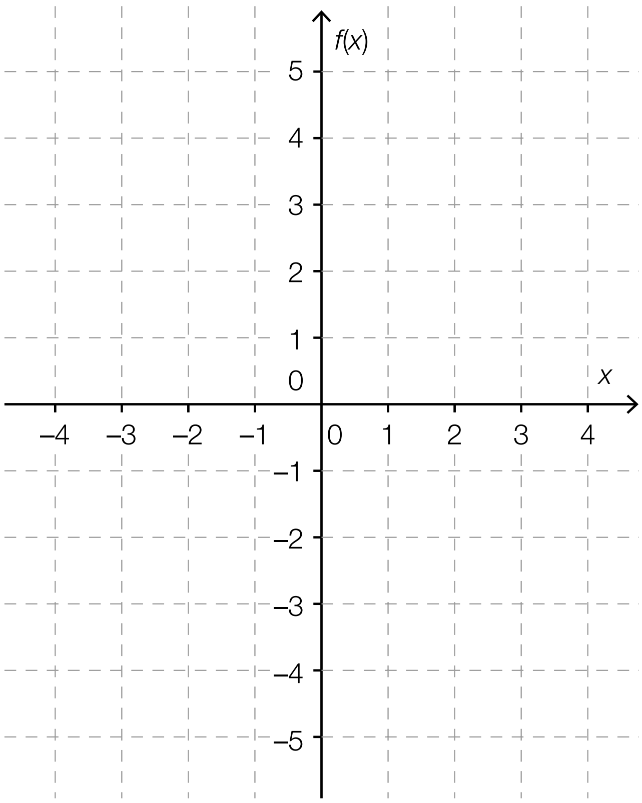
Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x + 2$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 1$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!
Stellen Sie den Graphen der Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem dar und erklären Sie, warum in diesem Fall der Wert des bestimmten Integrals nicht mit dem Inhalt derjenigen Fläche übereinstimmt, die im Intervall [0; 3] vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossen wird!



Lösung zur Aufgabe 4

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

Für alle Stammfunktionen gilt: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + c$.
Wegen $F(2) = 1$ gilt: $-2^2 + 2 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.
Somit: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung von F angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

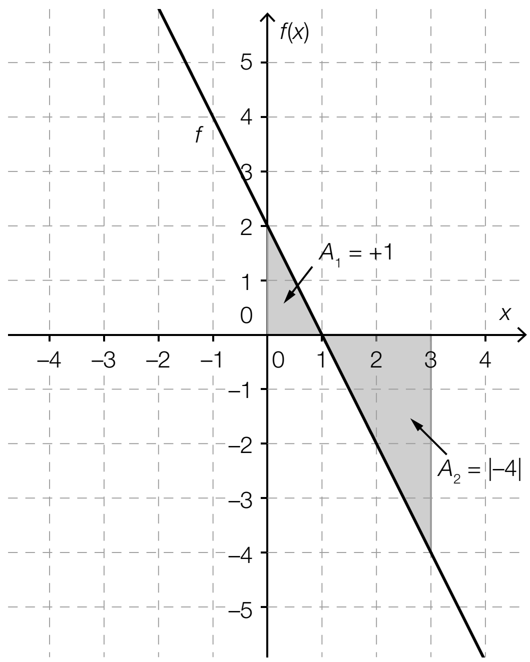
Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt:
$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (-2 \cdot x + 2)\,dx = (-x^2 + 2 \cdot x)\Big|_0^3 = -3$ bzw. $F(3) - F(0) = -2 - 1 = -3$

Mögliche Erklärung: Bei der Berechnung von Flächeninhalten ist zu berücksichtigen, dass das Integral der Funktion bei denjenigen Flächenteilen, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ ist. Daher muss die Berechnung unter Beachtung der Lage der Teilflächen stückweise erfolgen.

$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 + (-4) = -3$

Flächeninhalt:
$A_1 + A_2 = 1 + |-4| = 5$



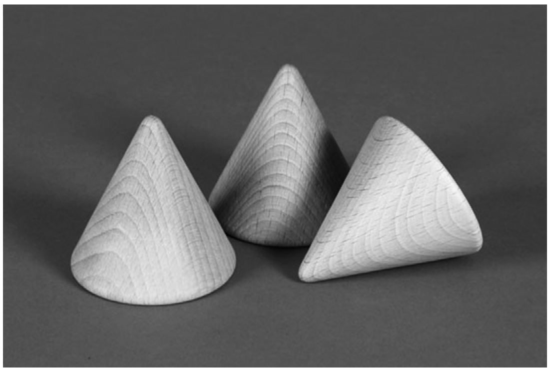
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals korrekt ermittelt, eine korrekte Vorgehensweise angeführt, der Graph richtig dargestellt und eine (sinngemäß) korrekte Erklärung angegeben wird.

Aufgabe 5

Kegel

Ein Kegel, der geworfen wird, kann entweder auf der Mantelfläche oder auf der Grundfläche zu liegen kommen.



Bildquelle: http://www.holzbausteine.at/images/Spitzkegel60.jpg [28.04.2016].

Aufgabenstellung:

Das Werfen eines derartigen Kegels wird als Zufallsexperiment betrachtet. Der Kegel wird zuerst 50-mal geworfen. Dabei kommt er in 12 Fällen auf der Grundfläche zu liegen.

Felix gibt folgende Rechnung an:

$$\left(\frac{12}{50}\right)^2 = \frac{144}{2\,500} = 0{,}0576 = 5{,}76\ \%$$

Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang!

Leitfrage:

Selin behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, eigentlich gar nicht bekannt ist.

Geben Sie an, welches Argument sie zur Untermauerung ihrer Behauptung heranziehen kann und wie man das Zufallsexperiment verändern muss, um diese Wahrscheinlichkeit möglichst genau zu bestimmen!

Lösung zur Aufgabe 5

Kegel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Werfen des Kegels dieser bei beiden Würfen auf der Grundfläche zu liegen kommt, beträgt 5,76 % (unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, $\frac{12}{50}$ beträgt).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine (sinngemäß) korrekte Interpretation im gegebenen Zusammenhang angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die relative Häufigkeit liefert nur einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.
Wird ein Zufallsexperiment nur 50-mal durchgeführt, wird die Wahrscheinlichkeit durch die Angabe der relativen Häufigkeit nur sehr ungenau approximiert.
Man muss das Zufallsexperiment viel öfter durchführen, um einen genaueren Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechende Antwort gegeben wird.