Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Normalvektor

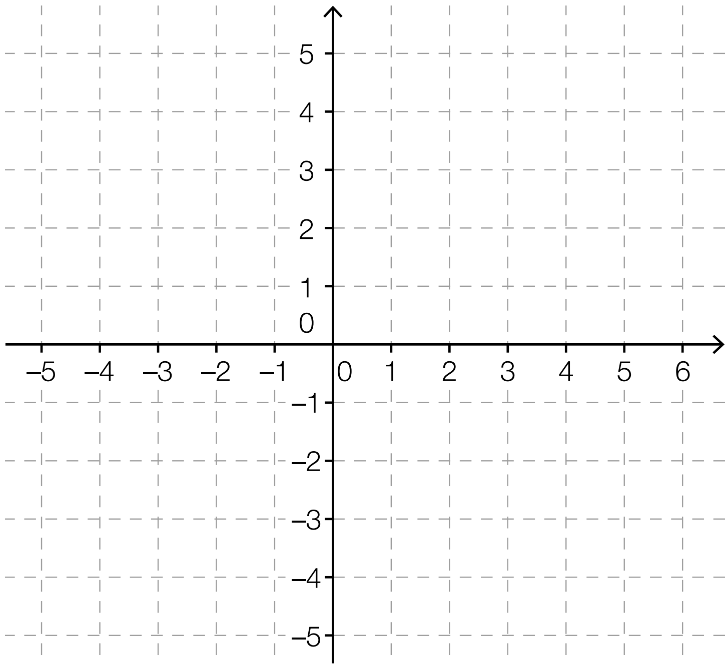
Gegeben sind ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P = (3|-2)$ und $Q = (-7|-8)$ in der Ebene.

Aufgabenstellung:

Eine Gerade g wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben: $X = P + s \cdot \vec{a}$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Gerade g den Punkt Q enthält, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und einen zugehörigen, gleich langen Normalvektor $\overrightarrow{n_a}$ ein!



Ergänzen Sie im obigen Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} + k \cdot \overrightarrow{n_a}$ mit $0 < k < 1$!

Erklären Sie weiters, warum es unterschiedliche Möglichkeiten gibt, zu einem gegebenen Vektor einen Normalvektor anzugeben!

Lösung zur Aufgabe 1

Normalvektor

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Rechnung: $\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

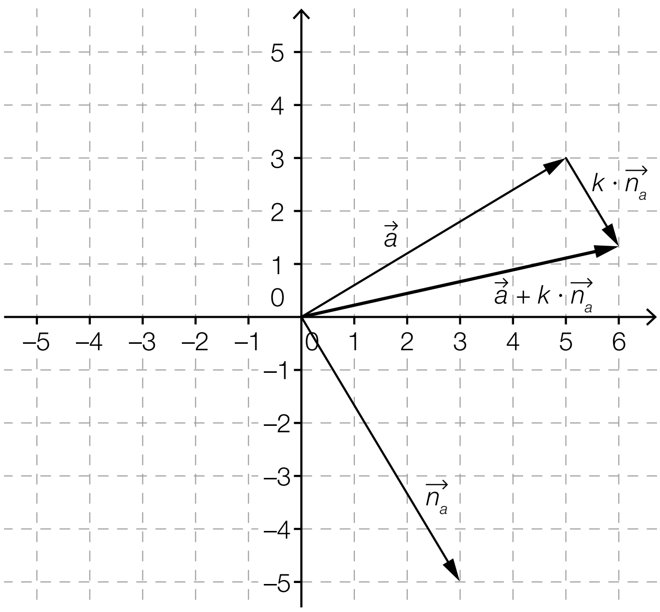
Für $s = -2$ erhält man eine wahre Aussage, also enthält die Gerade g den Punkt Q.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn durch eine Rechnung korrekt gezeigt wird, dass g den Punkt Q enthält, und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vektoren:



Mögliche Erklärung:

Da der Normalvektor zu einem gegebenen Vektor nur durch seine Richtung, aber weder durch seine Länge noch durch seine Orientierung bestimmt ist, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, diesen anzugeben.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Vektor $\vec{a}$ sowie ein Normalvektor $\vec{n_a}$ korrekt eingezeichnet werden und ein korrekter Vektor $\vec{a} + k \cdot \vec{n_a}$ ergänzt wird. Weiters muss eine korrekte Erklärung für die unterschiedlichen Möglichkeiten der Wahl des Normalvektors angegeben werden.

Aufgabe 2

Funktionsgleichung aufstellen

Eine Funktion g hat die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g(x + 1) = g(x) - 0{,}5$

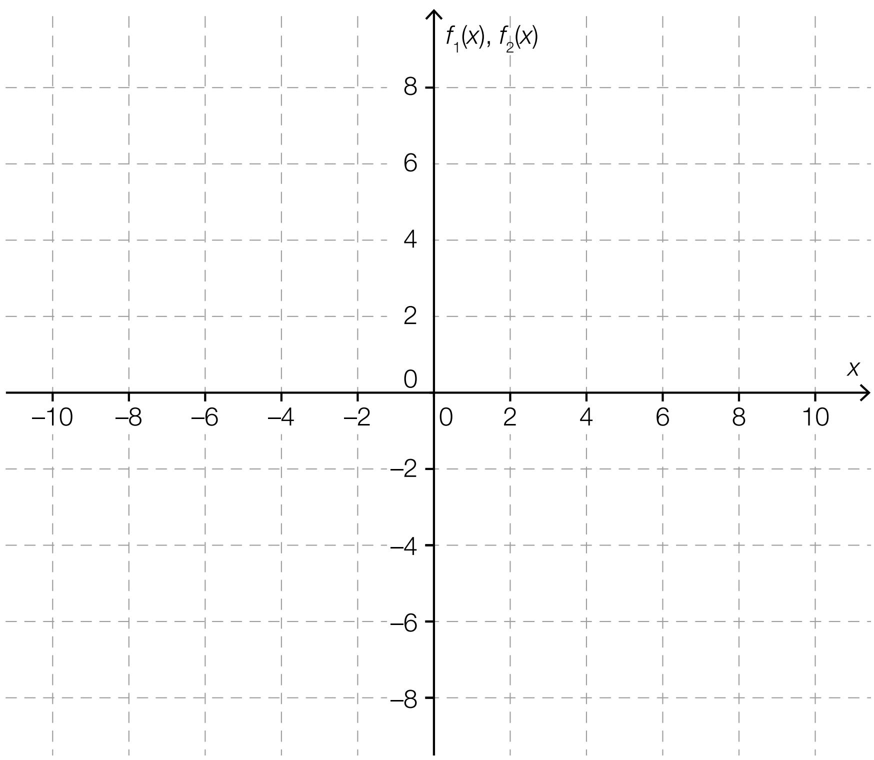
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion g an, die die gegebene Eigenschaft hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f_1(x + 1) = f_1(x) + a$ und $f_2(x + 1) = f_2(x) \cdot a$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 1$

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Verlauf der Graphen von f_1 und f_2!
Geben Sie für beide Funktionen an, welcher Funktionstyp jeweils vorliegt, und geben Sie an, wie sich das Monotonieverhalten der beiden Funktionen ändert, wenn man a aus dem Intervall (0; 1) wählt!



Lösung zur Aufgabe 2

Funktionsgleichung aufstellen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Funktionsgleichung: $g(x) = -0{,}5 \cdot x + 1$

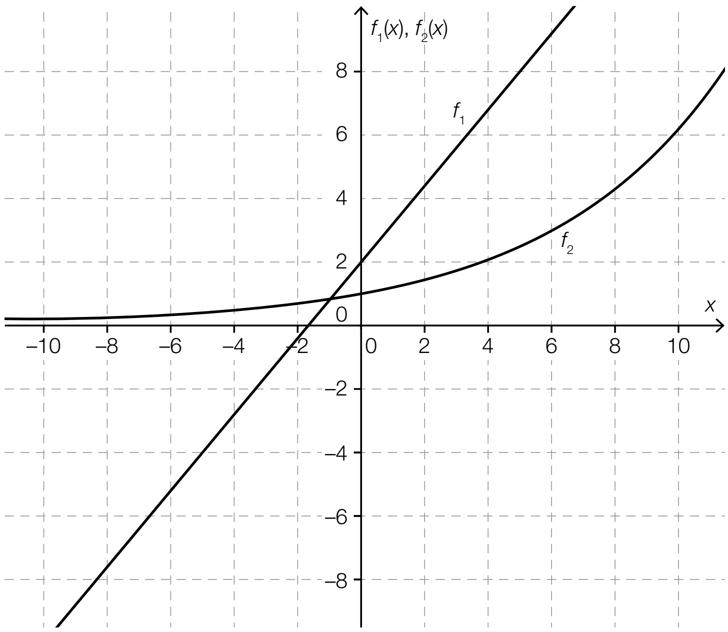
Die gegebene Eigenschaft sagt aus, dass der Funktionswert um 0,5 abnimmt, wenn x um 1 zunimmt. Daraus folgt, dass es sich um eine lineare Funktion mit der Steigung –0,5 handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Funktionsgleichung der Form $g(x) = -0{,}5 \cdot x + d$ mit $d \in \mathbb{R}$ angegeben wird und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Funktionsgraphen:



Funktionstyp: f_1 ist eine lineare Funktion, f_2 ist eine Exponentialfunktion.
Das Monotonieverhalten von f_1 ändert sich nicht, hingegen ist der Graph von f_2 für $a \in (0; 1)$ streng monoton fallend.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Gerade mit einer Steigung größer als 1 und der Graph einer streng monoton steigenden Exponentialfunktion skizziert und die Funktionstypen richtig angegeben werden. Weiters muss das jeweilige Monotonieverhalten beider Funktionen für $a \in (0; 1)$ korrekt angegeben werden.

Aufgabe 3

Lotrechter Wurf

Ein Objekt wird lotrecht nach oben geworfen. Die Funktion s beschreibt dabei die Höhe des Objekts über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t.

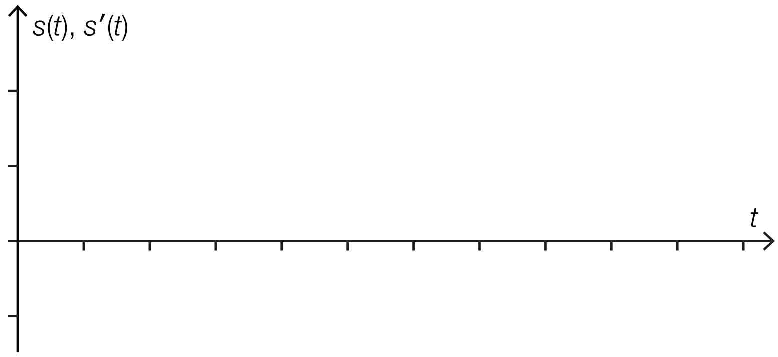
$s(t) = a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2$ mit $a, b > 0$ und $t \in \left[0; \frac{2a}{b}\right]$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion s'' und geben Sie an, was durch die Funktion s'' im gegebenen Kontext beschrieben wird!

Leitfrage:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem mögliche Graphen von s und s'! Achten Sie auf die Zusammenhänge zwischen den Funktionsgraphen!



Geben Sie die Nullstelle(n) der Funktion s' in Abhängigkeit von a und b an und deuten Sie die Nullstelle(n) im gegebenen Kontext!

Lösung zur Aufgabe 3

Lotrechter Wurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

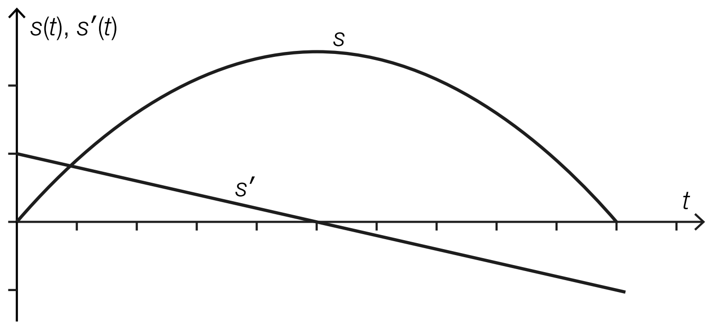
$s'(t) = a - b \cdot t$
$s''(t) = -b$

Die Funktion s'' beschreibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Objekts in Abhängigkeit von der Zeit, also die Momentanbeschleunigung.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Ableitungsfunktion korrekt angegeben und im Kontext korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$0 = a - b \cdot t \;\;\Rightarrow\;\; t = \frac{a}{b}$

Die Nullstelle der Funktion s' beschreibt denjenigen Zeitpunkt t, zu dem das Objekt die größte Höhe über dem Boden erreicht.

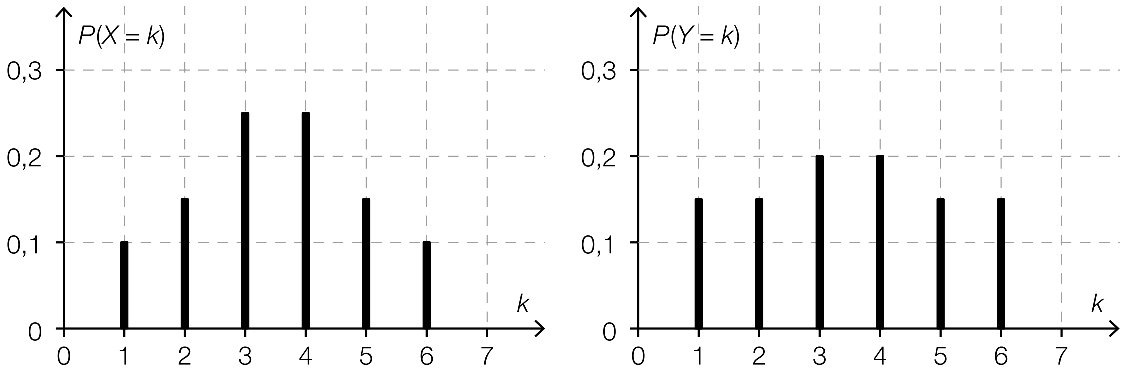
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine passende Skizze vorliegt sowie die Nullstelle der Funktion s' korrekt angegeben und (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.
Dabei muss der Graph von s als eine nach unten offene Parabel erkennbar und der Graph von s' eine fallende Gerade sein. Die Nullstelle von s' muss mit der Extremstelle von s übereinstimmen.

Aufgabe 4

Verteilungen

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Verteilungen zweier Zufallsvariablen X und Y.



Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X und Y werden mit $E(X)$ bzw. $E(Y)$ bezeichnet.
Die Standardabweichungen der Zufallsvariablen X und Y werden mit $\sigma(X)$ bzw. $\sigma(Y)$ bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie anhand der obigen Abbildungen an, ob $E(Y)$ kleiner, größer oder gleich $E(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie weiters anhand der obigen Abbildungen an, ob $\sigma(Y)$ kleiner, größer oder gleich $\sigma(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Verteilungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:
$E(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 = 3{,}5$

Jeder Wert, den die Zufallsvariable annehmen kann, wird mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit multipliziert und diese Produkte werden aufsummiert.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn $E(X)$ korrekt ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise beschrieben wird.
Dabei ist auch das Ablesen des Wertes (aufgrund der Symmetrie der Verteilung) aus der Abbildung zulässig, sofern diese Vorgehensweise richtig beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt $E(Y) = E(X)$, da beide Verteilungen symmetrisch um denselben Wert sind.

Es gilt $\sigma(Y) > \sigma(X)$, weil: Die Wahrscheinlichkeiten für die „Randwerte" bei $k = 1$ und $k = 6$ sind bei Verteilung Y größer als bei Verteilung X und zugleich sind die Wahrscheinlichkeiten für die beiden „mittleren" Werte bei $k = 3$ und $k = 4$ kleiner als bei Verteilung X.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl $E(Y) = E(X)$ als auch $\sigma(Y) > \sigma(X)$ erkannt und korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Wahlumfragen

Zwei Meinungsforschungsinstitute erhoben in unterschiedlichen Zufallsstichproben gleichzeitig den Wähleranteil einer Partei. Anhand von Umfrage *A* mit 500 Befragten wurde das symmetrische Konfidenzintervall [0,315; 0,355] für den relativen Wähleranteil dieser Partei ermittelt. Umfrage *B* mit 1 000 Befragten lieferte (bei gleicher Berechnungsmethode) das symmetrische Konfidenzintervall [0,275; 0,325] für den relativen Wähleranteil dieser Partei.

Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Aussage 1: Das der Berechnung des Konfidenzintervalls der Umfrage *A* zugrunde gelegte Konfidenzniveau ist höher als jenes, das der Berechnung des Konfidenzintervalls der Umfrage *B* zugrunde gelegt wurde.
Aussage 2: Der Wähleranteil dieser Partei liegt mit Sicherheit im Intervall [0,275; 0,355].

Leitfrage:

Ermitteln Sie die statistische Sicherheit (das Konfidenzniveau) des anhand von Umfrage *A* ermittelten Konfidenzintervalls und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!
Geben Sie an, ob eine Verdoppelung der Stichprobengröße bei gleichbleibendem Stichprobenanteil und gleichbleibender Sicherheit zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls führt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 5

Wahlumfragen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aussage 1 ist falsch: Da bei Umfrage *B* trotz deutlich größerer Stichprobe das ermittelte Konfidenzintervall breiter ist, muss das Konfidenzniveau höher gewählt worden sein.
Aussage 2 ist falsch, da der unbekannte Wähleranteil auch außerhalb der beiden Konfidenzintervalle liegen kann.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Aussagen richtig angegeben wird, dass sie falsch sind, und dies auch (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Stichprobenanteil lautet 0,335 und die halbe Breite des Konfidenzintervalls beträgt 0,02.

$0{,}02 = z \cdot \sqrt{\frac{0{,}335 \cdot 0{,}665}{500}}$

$z \approx 0{,}9475$

Sicherheit: $2 \cdot \phi(0{,}9475) - 1 \approx 0{,}657$

Da (im Nenner) die Quadratwurzel der Stichprobengröße berechnet wird, bewirkt eine Verdoppelung der Stichprobengröße keine Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Sicherheit des Konfidenzintervalls richtig ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Weiters muss (sinngemäß) korrekt begründet werden, warum eine Verdoppelung der Stichprobengröße keine Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls bewirkt.