Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

20. September 2016

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Eigenschaften von Zahlen

Lösungserwartung:

Jede natürliche Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☒
Das Produkt zweier rationaler Zahlen kann eine natürliche Zahl sein.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 2

Gleichungssystem

Lösungserwartung:

$a = 1{,}5$
$c = -12$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte von a und c. Andere korrekte Schreibweisen der Ergebnisse sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Vektoren

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$D = C + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \;\;\Rightarrow\;\; D = (9|11{,}5)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Koordinaten des gesuchten Punktes *D*.
Andere Schreibweisen der Koordinaten sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 4

Geradengleichung

Lösungserwartung:

Mögliche Werte der Parameter:

$a = 3$
$b = -5$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für mögliche Werte der Parameter a und b, wobei $a = 3t$ und $b = -5t$ mit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gelten muss.

Aufgabe 5

Aufwölbung des Bodensees

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$6\,370 - 6\,370 \cdot \cos\left(\frac{0{,}5846}{2}\right) \approx 0{,}083 \text{ km} \triangleq 83 \text{ m}$

Aufwölbung: 83 Meter

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [82 Meter; 84 Meter]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 6

Winkel bestimmen

Lösungserwartung:

$\sin(\alpha) = 0{,}4 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \approx 23{,}6°;\; \alpha_2 \approx 156{,}4°$
$\cos(\alpha_1) > 0;\; \cos(\alpha_2) < 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha_2 \approx 156{,}4°$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angeführt sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [156°; 157°]

Aufgabe 7

Daten aus einem Diagramm ablesen

Lösungserwartung:

Der Motorradfahrer fährt drei Stunden nach der Abfahrt des Autofahrers los.	☒
Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos ist um 40 km/h niedriger als jene des Motorrads.	☒

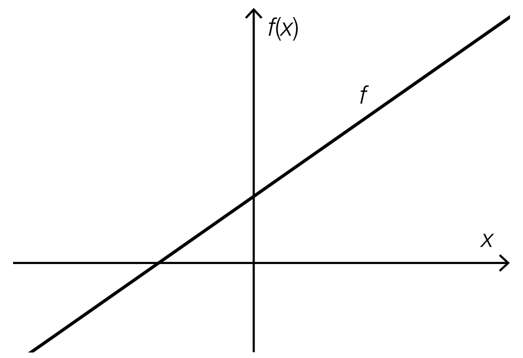
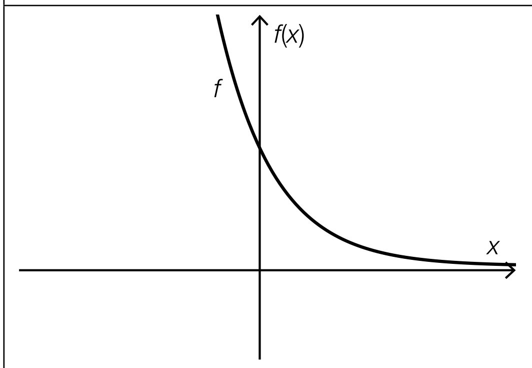
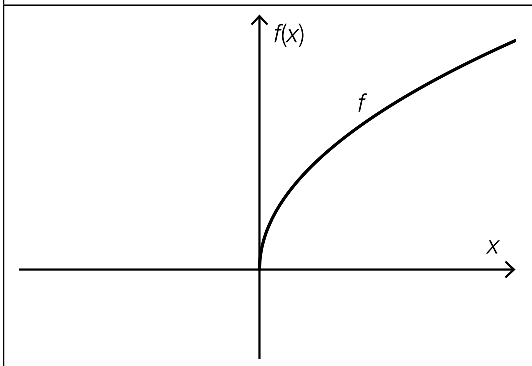
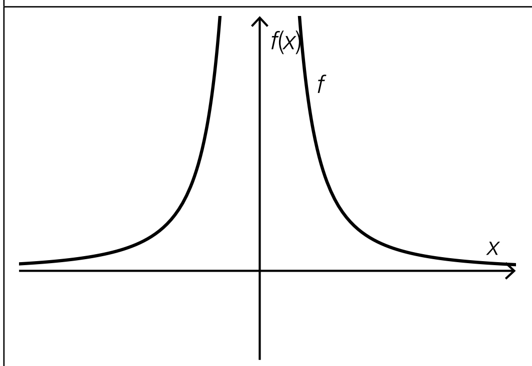
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 8

Graphen und Funktionstypen

Lösungserwartung:

	F
	A
	B
	C

A	$f(x) = a \cdot b^x$
B	$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}}$
C	$f(x) = a \cdot \frac{1}{x^2}$
D	$f(x) = a \cdot x^2 + b$
E	$f(x) = a \cdot x^3$
F	$f(x) = a \cdot x + b$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 9

Funktionsgleichung einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

$f(x) = -2 \cdot x + 1$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 10

Polynomfunktion vom Grad n

Lösungserwartung:

①	
$n > 3$	☒

②	
zwei Wendestellen	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 11

Bienenbestand

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$N_0 \cdot 0{,}5 = N_0 \cdot a^{14}$
$0{,}5 = a^{14} \;\Rightarrow\; a \approx 0{,}9517$

täglicher relativer Bestandsverlust: 4,83 %

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [4,8 %; 4,9 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 12

Periodische Funktion

Lösungserwartung:

$a = 2 \cdot \pi$ rad

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [6,2 rad; 6,3 rad]

Aufgabe 13

Aktienkurs

Lösungserwartung:

Der Kurs der Aktie ist in den (ersten) 10 Tagen um durchschnittlich 2 Euro pro Tag gestiegen.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 14

Ableitungsregeln

Lösungserwartung:

$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	☒

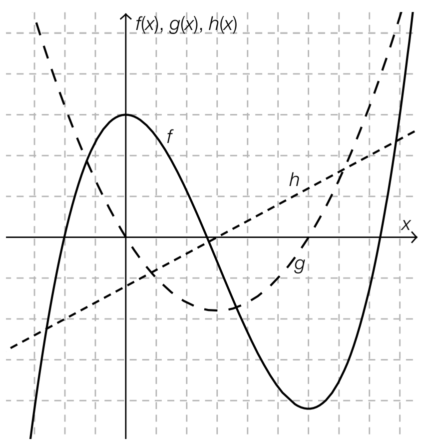
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Aufgabe 15

Graphen von Ableitungsfunktionen

Lösungserwartung:

	☒		

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Aufgabe 16

Differenzierbare Funktion

Lösungserwartung:

$f''(6) = 0$	☒
$f''(11) < 0$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 17

Integral

Lösungserwartung:

$25 \cdot \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a 3\,dx$	☒
$\frac{25 \cdot a^3}{3} + 3 \cdot a$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ausdrücke angekreuzt sind.

Aufgabe 18

Halbierung einer Fläche

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$$\int_2^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_b^4 x^2\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{b^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{4^3}{3} - \frac{b^3}{3}$$

$$b = \sqrt[3]{36}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [3,29; 3,31]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 19

Verurteilungen Jugendlicher

Lösungserwartung:

387 000	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Anzahl angekreuzt ist.

Aufgabe 20

Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt

Lösungserwartung:

$$\frac{39\,560}{42\,162 + 39\,560} \approx 0{,}484$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 21

Einlasskontrolle

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:
$0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 22

Zufallsvariable

Lösungserwartung:

Die Zufallsvariable X kann die Werte $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ annehmen.

Es gilt:
$P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{3}{6}$, $P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die korrekte Angabe aller möglichen Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, und der jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeit. Andere Schreibweisen der Ergebnisse sind ebenfalls als richtig zu werten. Eine korrekte grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 23

Parameter einer Binomialverteilung

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:
$n \cdot 0{,}36 \cdot (1 - 0{,}36) = 7{,}2^2$
$n = 225$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 24

500-Euro-Scheine in Österreich

Lösungserwartung:

$n = 1\,000$, $h = 0{,}234$

$$0{,}234 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}234 \cdot (1 - 0{,}234)}{1\,000}} \approx 0{,}234 \pm 0{,}026 \;\Rightarrow\; [0{,}208; 0{,}260]$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,20; 0,21]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,26; 0,27]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

20. September 2016

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Schilauf-Trainingsstrecke

a) Lösungserwartung:

$\overline{v} = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{23{,}4375 - 0}{3} \approx 7{,}8$

Die mittlere Geschwindigkeit innerhalb der ersten drei Fahrsekunden beträgt ca. 7,8 m/s.

Mögliche Berechnung:

$-\frac{1}{144} \cdot t^4 + \frac{8}{3} \cdot t^2 = 240 \;\;\Rightarrow\;\; {}_1t_2 = \pm 12;\; {}_3t_4 \approx \pm 15{,}5$

also: $t = 12$ s

Die Fahrt von A nach B dauert 12 Sekunden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [7,5 m/s; 8 m/s]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t$

$s''(t) = -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3}$

$s''(t) = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; {}_1t_2 = \pm 8$

also: $t_1 = 8$ s

Mögliche Interpretation:
Die Läuferin erreicht nach 8 Sekunden die maximale Geschwindigkeit.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

c) Lösungserwartung:

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t \;\Rightarrow\; s'(6) = 26$

Zum Zeitpunkt $t_2 = 6$ hat die Läuferin eine Geschwindigkeit von 26 m/s.

Mögliche Berechnung:

$s(6) = 87 \;\Rightarrow\; \frac{240 - 87}{26} \approx 5{,}9$

Die Läuferin würde den Geländepunkt B ca. 5,9 s nach dem Zeitpunkt t_2 erreichen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss. Toleranzintervall: [5,8 s; 5,9 s]

d) Lösungserwartung:

Die Funktion s_1 muss die Eigenschaften
- $s_1'(0) = 0$ und
- $s_1'(t) > 0$ während der Fahrt von A nach B

erfüllen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(0) = 0$.
- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(t) > 0$.

Aufgabe 2

Bevölkerungswachstum in den USA

a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

$B_0 = 3{,}9$ und $B(100) = 62{,}9 \Rightarrow 62{,}9 = 3{,}9 \cdot a^{100} \Rightarrow a = \sqrt[100]{\frac{62{,}9}{3{,}9}} \Rightarrow a \approx 1{,}0282$

$B(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}0282^t$

Das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\,\mathrm{d}t$ gibt denjenigen Wert näherungsweise an, um den die Einwohnerzahl von 1790 bis 1840 gewachsen ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für a: [1,028; 1,029]
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) **Lösungserwartung:**

$t^* = 0$

$B_0 \cdot \ln(a)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Bevölkerung (momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl) zum Zeitpunkt $t = 0$ in Millionen Einwohner/innen pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:
Im Zeitraum von 2003 bis 2013 ist die (absolute) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr annähernd konstant.

Der Parameter k entspricht der (durchschnittlichen) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
– Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Interpretation des Parameters k.

Aufgabe 3

Pong

a) **Lösungserwartung:**

$\tan(\alpha) = \frac{7}{4} = 1{,}75$

$\alpha \approx 60{,}26°$

Unter diesen Bedingungen lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} \pm 19 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ Pixel pro Bildaufbau.
Für den Winkel β_{min} gibt das in jedem Fall:

$\tan(\beta_{min}) = \frac{1}{19}$

$\beta_{min} \approx 3{,}01°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [60°; 60,3°]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [3°; 3,02°]

b) **Lösungserwartung:**

$301 - 3n = 1 \ \Rightarrow \ n = 100$
$100 \cdot 0{,}02 = 2$

Es dauert zwei Sekunden, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 601 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [2 s; 2,02 s]
- Ein Punkt für eine korrekte Parameterdarstellung bzw. Gleichung der Geraden. Äquivalente Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$n = 45$, $h = \frac{31}{45}$

$$\frac{31}{45} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{31}{45} \cdot \frac{14}{45}}{45}} \approx 0{,}689 \pm 0{,}135 \;\; \Rightarrow \;\; [0{,}554;\, 0{,}824]$$

Mögliche Erklärungen:
Es ist nicht sinnvoll, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bilden, da die Intervallgrenzen dann 0 % bis 100 % wären, man hätte also keinen Informationsgewinn.

oder:

Ein 100-%-Konfidenzintervall erstreckt sich über den gesamten Definitionsbereich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,54; 0,56]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,81; 0,83]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

Aufgabe 4

Roulette

a) **Lösungserwartung:**

Die Argumentation ist falsch. Da die einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind, gilt auch für das sechste Spiel (unabhängig von den vorherigen Spielausgängen):

$P(\text{„Rouge“}) = P(\text{„Noir“}) = \frac{18}{37}$

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel in ein rotes Nummernfach fällt.

$n = 100,\ p = \frac{18}{37}$

$P(X \leq 40) \approx 0{,}0418$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Argumentation nicht richtig ist, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,03; 0,06]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Bei 12^M erhält die Spielerin bei einem Einsatz von € 10 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{37}$ einen Gewinn von € 20.

$\frac{12}{37} \cdot 20 - \frac{25}{37} \cdot 10 \approx -0{,}27$

D. h., der erwartete Verlust beträgt ca. € 0,27.
Bankvorteil: € 0,27 bzw. 2,7 % des Einsatzes

Cheval bei einem Einsatz von € a:

erwarteter Gewinn: $\frac{2}{37} \cdot 17 \cdot a - \frac{35}{37} \cdot a = -\frac{1}{37} \cdot a \approx -0{,}027 \cdot a$

Der Bankvorteil bleibt mit ca. 2,7 % des Einsatzes gleich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei diese sowohl in Prozentangabe als auch als Geldbetrag als richtig zu werten ist.
  Toleranzintervall: [€ 0,27; € 0,30] bzw. [2,7 %; 3 %]
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Bankvorteil gleich bleibt, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.