Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

10. Mai 2016

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Menge von Zahlen

Lösungserwartung:

Es gibt unendlich viele Zahlen in der Menge M, die kleiner als 2,1 sind.	☒
Alle Elemente der Menge M können in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben werden, wobei a und b ganze Zahlen sind und $b \neq 0$ ist.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 2

Äquivalenzumformung

Lösungserwartung:

Mögliche Erklärungen:

Die Gleichung $x^2 - 5x = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 0$ (die Lösungsmenge $L = \{0; 5\}$). Die Gleichung $x - 5 = 0$ hat aber nur mehr die Lösung $x = 5$ (die Lösungsmenge $L = \{5\}$). Durch die durchgeführte Umformung wurde die Lösungsmenge verändert, daher ist dies keine Äquivalenzumformung.

oder:

Bei der Division durch x würde im Fall $x = 0$ durch null dividiert werden, was keine zulässige Rechenoperation ist.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

Aufgabe 3

Treibstoffkosten

Lösungserwartung:

$$K = x \cdot \frac{y}{100} \cdot a$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Quadratische Gleichung

Lösungserwartung:

$p = -4$

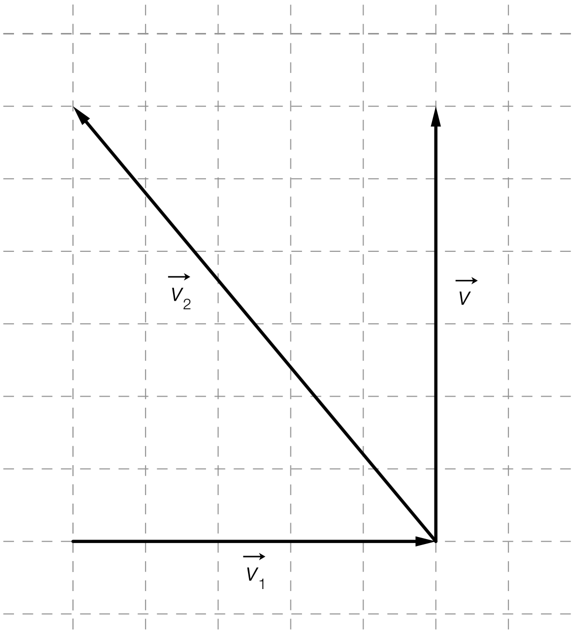
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 5

Vektoraddition

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von $\vec{v}_2$, wobei der gesuchte Vektor auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

Aufgabe 6

Vermessung einer unzugänglichen Steilwand

Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{e} \Rightarrow \overline{BC} \approx 2{,}67$ m

$\tan(\beta) = \frac{\overline{BD}}{e} \Rightarrow \overline{BD} \approx 4{,}69$ m

$h = \overline{BD} - \overline{BC} \approx 2{,}02$ m

Die Höhe h ist ca. 2,02 m.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
Toleranzintervall: [2 m; 2,1 m]

Aufgabe 7

Funktionseigenschaften erkennen

Lösungserwartung:

Die Funktion f ist im Intervall (2; 3) monoton steigend.	☒
Die Funktion f ändert im Intervall (–1; 1) das Krümmungsverhalten.	☒
Die Funktion f ändert im Intervall (–3; 0) das Monotonieverhalten.	☒

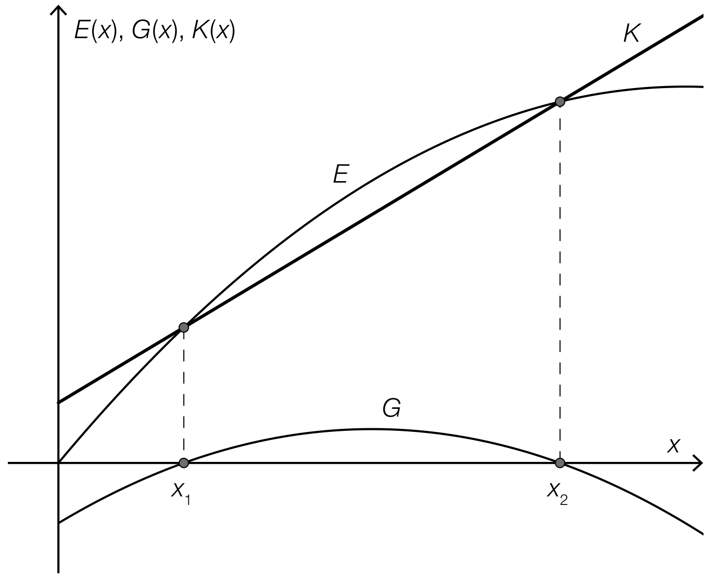
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 8

Kosten, Erlös und Gewinn

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph einer linearen Kostenfunktion skizziert wurde und dieser den Graphen der Erlösfunktion E an den Stellen x_1 und x_2 schneidet.

Aufgabe 9

Erwärmung von Wasser

Lösungserwartung:

$T(t) = 0{,}19 \cdot t + 35{,}6$

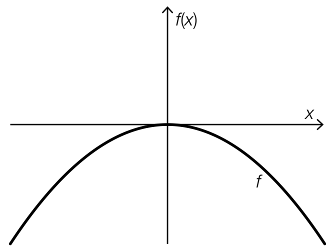
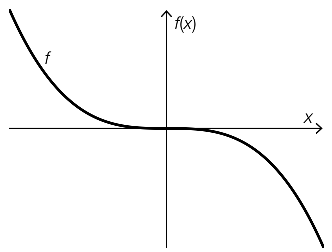
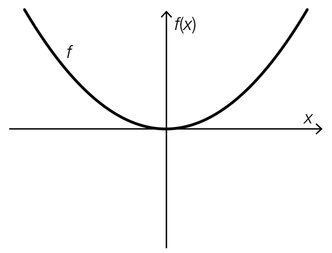
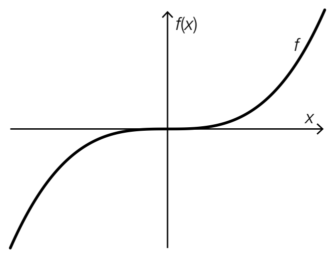
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Lösungen wie z. B. $T(t) = \frac{41{,}3 - 35{,}6}{30} \cdot t + 35{,}6$ sind als richtig zu werten.

Aufgabe 10

Potenzfunktionen

Lösungserwartung:

	E
	F
	B
	C

A	$a > 0, z = 1$
B	$a > 0, z = 2$
C	$a > 0, z = 3$
D	$a < 0, z = 1$
E	$a < 0, z = 2$
F	$a < 0, z = 3$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 11

Ausbreitung eines Ölteppichs

Lösungserwartung:

$1{,}5 \cdot 1{,}05^d = 2 \;\Rightarrow\; d = 5{,}896... \;\Rightarrow$ Nach 6 Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km^2.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Tage“ nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
Toleranzintervall: [5,89; 6]

Aufgabe 12

Parameter von Exponentialfunktionen

Lösungserwartung:

①	
$c > d$	☒

②	
$a < b$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 13

Mittlere Änderungsrate interpretieren

Lösungserwartung:

$f(x_2) > f(x_1)$	☒
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 14

Kapitalsparbuch

Lösungserwartung:

Frau Fröhlich zahlt jährlich € 5.000 auf ihr Kapitalsparbuch ein.	☒
Der relative jährliche Zuwachs des am Ausdruck ausgewiesenen Kapitals ist größer als 3 %.	☒

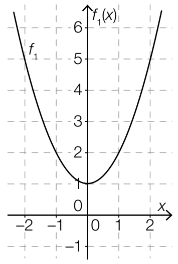
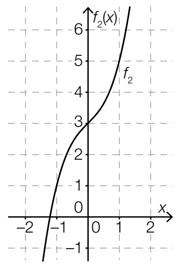
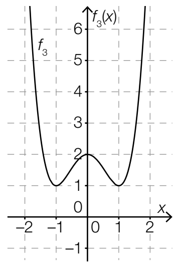
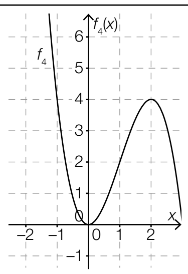
Lösungsschlüssel:

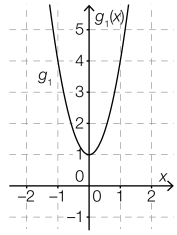
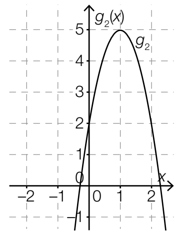
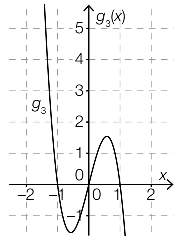
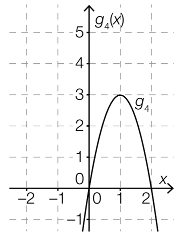
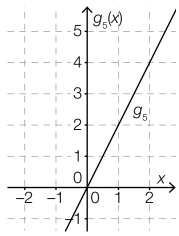
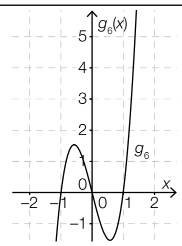
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 15

Funktionen und Ableitungsfunktionen

Lösungserwartung:

	E
	A
	F
	D

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 16

Nachweis eines lokalen Minimums

Lösungserwartung:

Möglicher rechnerischer Nachweis:

$p''(x) = 6x$
$p''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ An der Stelle 1 liegt ein lokales Minimum vor.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 17

Arbeit beim Verschieben eines Massestücks

Lösungserwartung:

$W = \int_0^4 \frac{5}{16} \cdot s^2 \, ds + \frac{5 \cdot 11}{2}$

$W \approx 34{,}17$ J

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [34 J; 35 J]

Aufgabe 18

Integral

Lösungserwartung:

$b = -c$

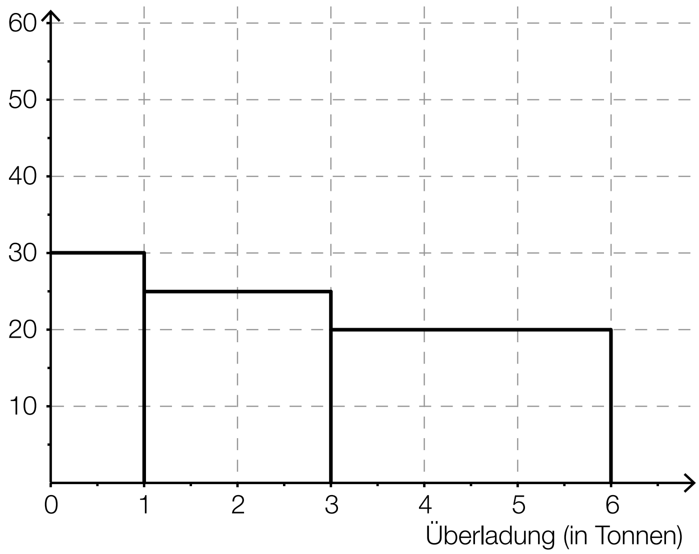
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Relation zwischen b und c. Äquivalente Relationen sind als richtig zu werten, ebenso konkrete Beispiele wie $b = -5$ und $c = 5$.

Aufgabe 19

Beladung von LKW

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für ein korrekt dargestelltes Diagramm.

Aufgabe 20

Eishockeytore

Lösungserwartung:

Der Median der Datenliste ist 6.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 21

Zollkontrolle

Lösungserwartung:

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{15}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,066; 0,07] bzw. [6,6 %; 7 %]

Aufgabe 22

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Lösungserwartung:

$P(X = x_2) = 0{,}2$
$P(X = x_3) = 0{,}4$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte beider Wahrscheinlichkeiten. Andere Schreibweisen der Ergebnisse (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 23

Verschiedenfärbige Kugeln

Lösungserwartung:

Es werden genau zwei schwarze Kugeln gezogen.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Aufgabe 24

Vergleich zweier Konfidenzintervalle

Lösungserwartung:

①	
$\gamma_1 > \gamma_2$	☒

②	
$n_1 < n_2$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

10. Mai 2016

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Intercity-Express (ICE)

a) **Lösungserwartung:**

mittlere Änderungsrate: 0,131 m/s²
möglicher Zeitpunkt für die momentane Änderungsrate: t = 150 s

Der Wert des angegebenen bestimmten Integrals entspricht dem im Zeitintervall [0 s; 700 s] zurückgelegten Weg (in Metern).

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe sowohl einer korrekten mittleren Änderungsrate als auch eines entsprechenden Zeitpunkts, wobei die Einheiten „m/s²" bzw. „s" nicht angeführt sein müssen.
Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: [0,130 m/s²; 0,133 m/s²]
Toleranzintervall für den Zeitpunkt: [0 s; 230 s]
– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) **Lösungserwartung:**

$v_2(t) = 70 - 0{,}5 \cdot t$

Mögliche Deutungen von k:
Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um 0,5 m/s ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt –0,5 m/s².

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt 0,5 m/s².

Mögliche Deutung von d:
Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt 70 m/s.

$v_2(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 140\text{ s} \;\Rightarrow\; s(140) = 4\,900\text{ m}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angeführt sein muss.

Aufgabe 2

ZAMG-Wetterballon

a) **Lösungserwartung:**

$$\frac{800 - 906}{906} \approx -0{,}117$$

Der Luftdruck nimmt bei diesem Anstieg um ca. 11,7 % ab.

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m ⟷ Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [–0,12; –0,115] bzw. [–12 %; –11,5 %]
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) **Lösungserwartung:**

Eine lineare Funktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine gleiche Verminderung der Temperatur vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m ⟷ Temperaturverminderung um 8,8 °C).

$k = -0{,}0088$
$d = 22{,}1$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
– Ein Punkt die korrekte Angabe beider Parameterwerte k und d.
  Toleranzintervall für k: [–0,009; –0,0088]

c) **Lösungserwartung:**

$$V(p) = \frac{2\,718}{p}$$

$V(800) - V(906) = 0{,}3975$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt 0,3975 m^3.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^3“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [0,39 m^3; 0,4 m^3]

Aufgabe 3

Einkommensteuer

a) **Lösungserwartung:**

$20\,000 - 9\,000 \cdot 0{,}365 = 16\,715 \ \Rightarrow\ € 16.715$

Mögliche Formeln:

$N = E - (E - 11\,000) \cdot 0{,}365$
oder:
$N = 11\,000 + (E - 11\,000) \cdot 0{,}635$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 16.700; € 16.720]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Formel für das Jahresnettoeinkommen.
  Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) **Lösungserwartung:**

$\frac{14\,000 \cdot 0{,}365 + 15\,000 \cdot 0{,}432}{40\,000} \approx 0{,}29$, d. h. ca. 29 % Durchschnittssteuersatz

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,28; 0,29] bzw. [28 %; 29 %]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

c) Lösungserwartung:

Beide Behauptungen sind falsch.

(1) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.

(2) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 *Prozentpunkte*, das sind $\frac{11,5}{36,5} \approx 31,5$ *Prozent*.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (1) falsch ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (2) falsch ist.

d) Lösungserwartung:

$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0,432$ ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.
5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

ESt_{neu} = (steuerpflichtiges Jahreseinkommen – 31 000) · 0,42 + 6 300

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation beider Zahlenwerte.
– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

a) **Lösungserwartung:**

mögliche Werte für Y: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(=\frac{1}{9}\right)$, bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt $\frac{2}{9}$.
oder:
Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die vollständige Angabe der korrekten Werte für Y.
- Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und einer korrekten Berechnung des Unterschieds.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Zufallsvariable X = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist

P(„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null“) $= p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$

Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5$, $k = 2$, $p = \frac{1}{9}$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}087 \;\Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 %.

Mögliche Berechnung:

x ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe

$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \;\Rightarrow\; x < 48$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,08; 0,09] bzw. [8 %; 9 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

$n = 100$ und $p = 0{,}5$

Erwartungswert: $E(Z) = 50$
Standardabweichung: $\sqrt{V(Z)} = 5$

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):
Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist.
Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$ durch die Normalverteilung mit $\mu = 50$ und $\sigma = 5$ zu approximieren.

$P(Z \geq 59) \approx 0{,}036 = 3{,}6\,\%$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
  Toleranzintervall: [0,035; 0,045] bzw. [3,5 %; 4,5 %]