

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

21. September 2015

# Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## Gleichungen

Lösungserwartung:

$x = 2x$	<input checked="" type="checkbox"/>
$x^2 = -x$	<input checked="" type="checkbox"/>
$x^3 = -1$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

## Aufgabe 2

### Gleichungssystem

Lösungserwartung:

①	
$x + 2y = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
hat das Gleichungssystem keine Lösung	<input checked="" type="checkbox"/>

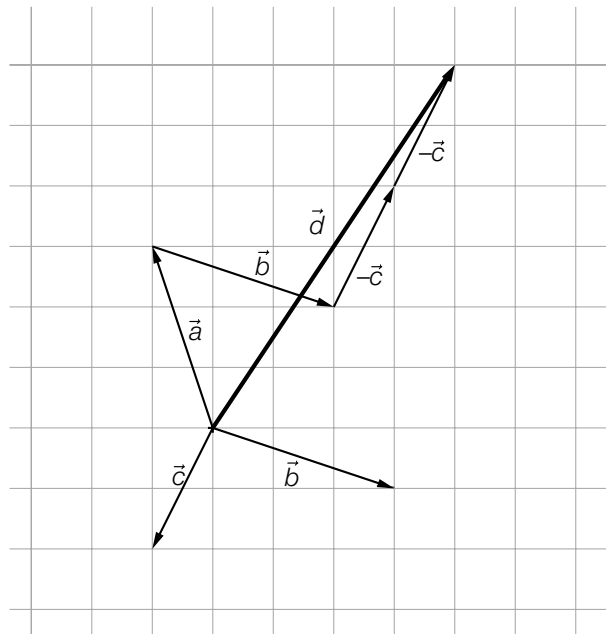
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

# Aufgabe 3

## Vektoren

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Darstellung des gesuchten Pfeils, wobei der Lösungspfeil auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

## Aufgabe 4

### Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse

Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$$\begin{cases} 1 + t = x \\ -5 + 7t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{7}, x = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow S = \left( \frac{12}{7} \mid 0 \right)$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Koordinaten des gesuchten Punktes korrekt angegeben sein müssen. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall für die erste Koordinate: [1,70; 1,72]

# Aufgabe 5

## Normalvektor

Lösungserwartung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jeder Vektor  $\vec{n}$  mit  $\vec{n} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  mit  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$  ist ebenfalls als richtig zu werten.

# Aufgabe 6

## Sonnenhöhe

Lösungserwartung:

$$s = \frac{h}{\tan(\varphi)} \text{ mit } \varphi \in (0^\circ; 90^\circ) \text{ bzw. } \varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$$

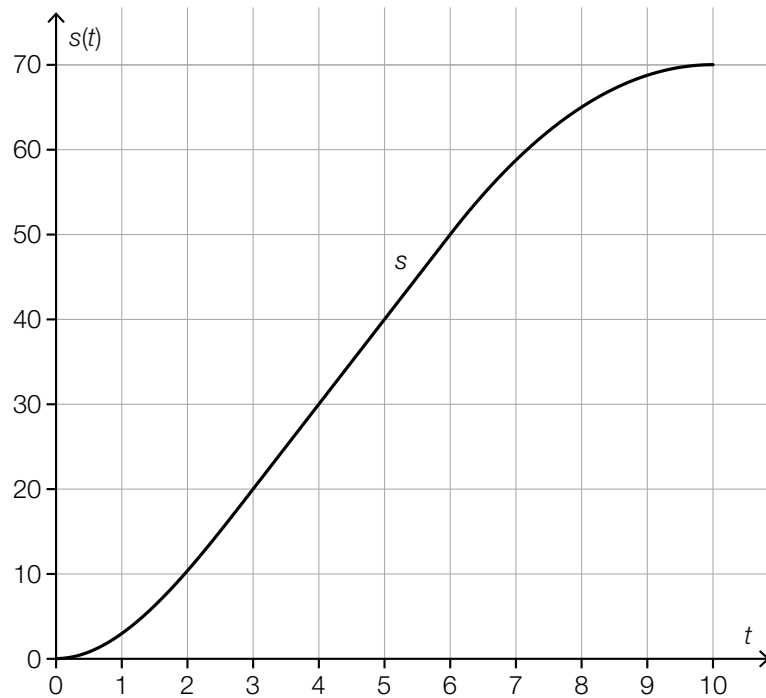
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Formel, wobei der Definitionsbereich für  $\varphi$  nicht angegeben werden muss. Äquivalente Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.

# Aufgabe 7

## Bewegung

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei folgende Aspekte erkennbar sein müssen:

- der Graph verläuft durch die in der Tabelle angegebenen Punkte
- $s'(0) = s'(10) = 0$
- linksgekrümmt in  $[0; 3)$ , rechtsgekrümmt in  $(6; 10]$  und linearer Verlauf in  $[3; 6]$



# Aufgabe 8

## Modellierung

Lösungserwartung:

<p>Die Gesamtkosten bei der Herstellung einer Keramikglasur setzen sich aus einmaligen Kosten von € 1.000 für die Maschine und € 8 pro erzeugtem Kilogramm Glasur zusammen. Stellen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung einer Keramikglasur in Abhängigkeit von den erzeugten Kilogramm Glasur dar!</p>	<input checked="" type="checkbox"/>
<p>Ein zinsloses Wohnbaudarlehen von € 240.000 wird 40 Jahre lang mit gleichbleibenden Jahresraten von € 6.000 zurückgezahlt. Stellen Sie die Restschuld in Abhängigkeit von der Anzahl der vergangenen Jahre dar!</p>	<input checked="" type="checkbox"/>
<p>Bleibt in einem Stromkreis die Spannung konstant, so ist die Leistung direkt proportional zur Stromstärke. Stellen Sie die Leistung im Stromkreis in Abhängigkeit von der Stromstärke dar!</p>	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Aufgabenstellungen angekreuzt sind.

# Aufgabe 9

Potenzfunktion

Lösungserwartung:

$f(x) = -x^{-2}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.

# Aufgabe 10

## Eigenschaften einer Polynomfunktion

Lösungserwartung:

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	<input checked="" type="checkbox"/>
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 11

## Exponentialfunktion

Lösungserwartung:

$$f(x) = 25 \cdot 0,8^x$$

oder:

$$f(x) = 25 \cdot e^{\ln(0,8) \cdot x}$$

Lösungsschlüssel:

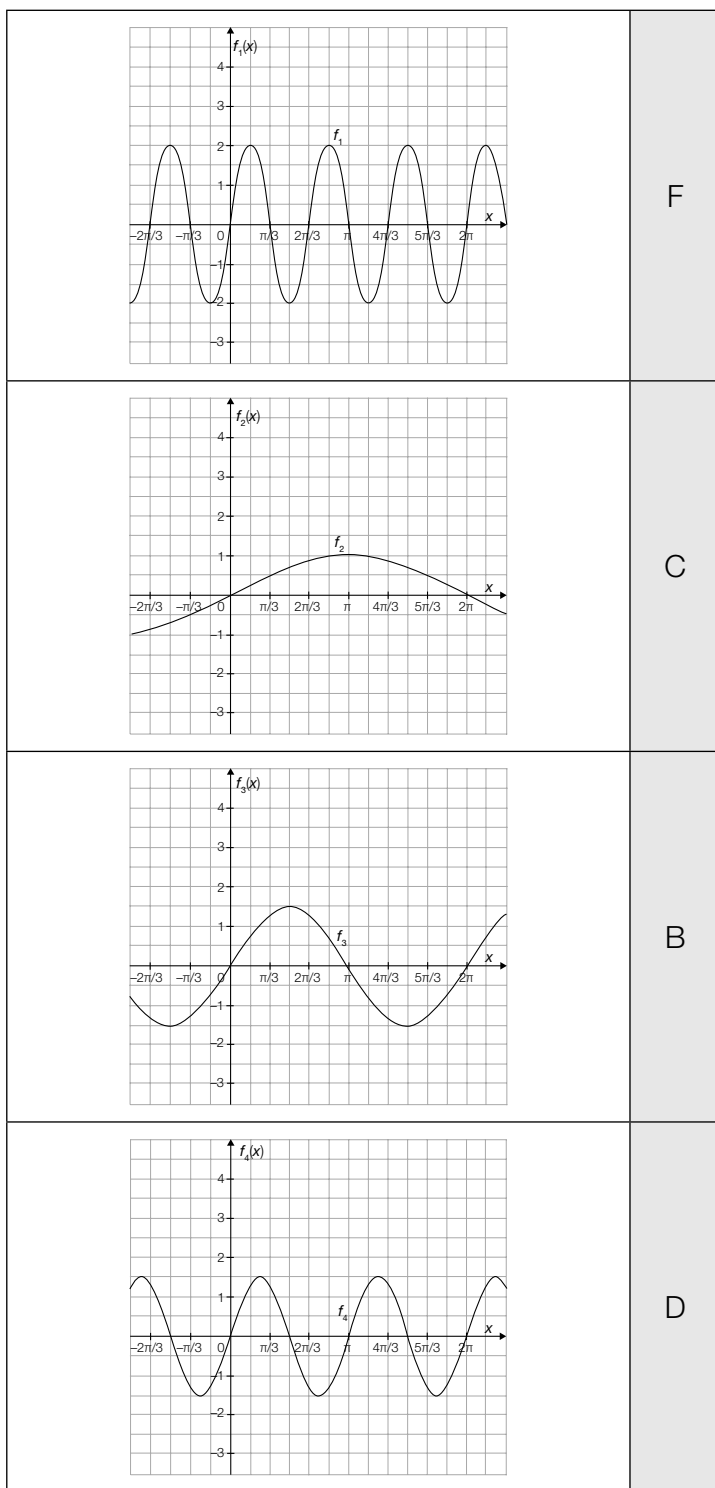
Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall für  $\ln(0,8)$ :  $[-0,23; -0,22]$

# Aufgabe 12

## Sinusfunktion

Lösungserwartung:



A	$\sin(x)$
B	$1,5 \cdot \sin(x)$
C	$\sin(0,5x)$
D	$1,5 \cdot \sin(2x)$
E	$2 \cdot \sin(0,5x)$
F	$2 \cdot \sin(3x)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

# Aufgabe 13

## Differenzen- und Differenzialquotient

Lösungserwartung:

$f'(x_1) = 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 14

## Ableitung einer Winkelfunktion

Lösungserwartung:

$$f'(x) = -5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(3 \cdot x)$$

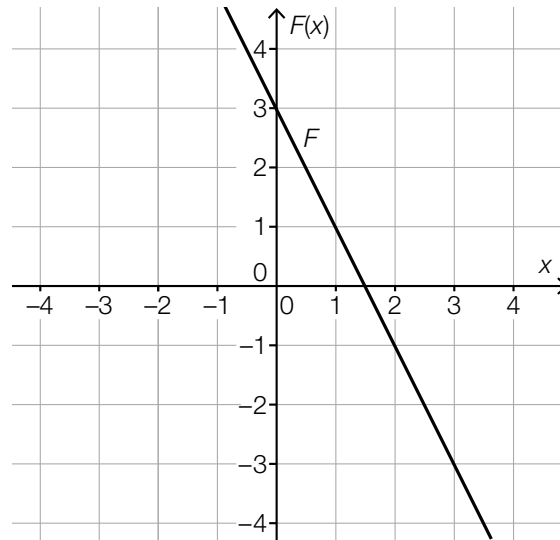
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

## Aufgabe 15

### Stammfunktion einer konstanten Funktion

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn die lineare Stammfunktion  $F$  durch den Punkt  $P = (1|1)$  verläuft und die Steigung  $-2$  hat.



# Aufgabe 16

## Graph einer Ableitungsfunktion

Lösungserwartung:

Die Funktion $f$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 17

## Integrationsregeln

Lösungserwartung:

$\int_a^b (f(x) + x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x dx$	<input checked="" type="checkbox"/>
$\int_a^b (3 \cdot f(x)) dx = 3 \cdot \int_a^b f(x) dx$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

# Aufgabe 18

## Durchflussrate

### Lösungserwartung:

Der Ausdruck beschreibt die durch das Rohr geflossene Wassermenge (in Litern) vom Zeitpunkt  $t = 60$  bis zum Zeitpunkt  $t = 120$ .

### Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

# Aufgabe 19

## Entwicklung der Landwirtschaft in Österreich

Lösungserwartung:

Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 im Jahresdurchschnitt um mehr Hektar zugenommen als von 1999 bis 2010.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Gesamtgröße der land- und forstwirtschaftlich genutzten Fläche hat von 1995 bis 2010 abgenommen.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

# Aufgabe 20

## Statistische Kennzahlen

Lösungserwartung:

Standardabweichung	<input checked="" type="checkbox"/>
Spannweite	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

# Aufgabe 21

## Rote und blaue Kugeln

Lösungserwartung:

①	
$G = \{(r, r), (r, b), (b, r), (b, b)\}$	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
jede Teilmenge des Grundraumes	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

## Aufgabe 22

### Augensumme beim Würfeln

Lösungserwartung:

$$P(E) = \frac{7}{36}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervalle: [0,19; 0,20] bzw. [19 %; 20 %]

## Aufgabe 23

### Gewinn beim Glücksrad

Lösungserwartung:

$$G = 5 - \left( \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 10 + \frac{1}{8} \cdot 15 \right) = \frac{5}{8} \Rightarrow G \approx \text{€ } 0,63$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.

Toleranzintervall: [0,62; 0,63]



## Aufgabe 24

### Sammelwahrscheinlichkeit bei Überraschungseiern

Lösungserwartung:

$$1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl, in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervalle: [0,78; 0,79] bzw. [78 %; 79 %]

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

21. September 2015

# Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## Die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion

a) Lösungserwartung:

$$7 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 16 \Rightarrow -10 = -b$$

$$b = 10$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 10 = 8$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Angabe des Parameters  $b$ .
- Ein Punkt für die korrekte Angabe der Steigung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = -1$ .

b) Lösungserwartung:

$$f'(x) = 2 \cdot x + b \Rightarrow 2 \cdot x_E + b = 0$$

oder:

$$x_E = -\frac{b}{2}$$

$$f\left(-\frac{b}{2}\right) = -9 \Rightarrow \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 16 = -9$$

$$\Rightarrow b = \pm 10$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen  $x_E$  und  $b$ .
- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für  $b$ .

c) Lösungserwartung:

Mögliche Bestimmung der Tiefpunkte:

- Tiefpunkt des Graphen von  $f$  liegt auf der  $x$ -Achse  $\Rightarrow$  Die Funktion  $f$  besitzt genau eine

$$\text{reelle Nullstelle. } f(x) = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16 = 0 \Rightarrow b_1 = -8 \quad b_2 = 8$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -4 \Rightarrow T_1 = (4|0), T_2 = (-4|0)$$

- Tiefpunkt des Graphen von  $f$  liegt auf der senkrechten Achse

$$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow T_3 = (0|16)$$

$$g(x) = a \cdot x^2 + c$$

$$g(0) = 16 \quad c = 16$$

$$g(4) = 0 \Rightarrow 16 \cdot a + 16 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 16$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe aller drei Tiefpunkte.
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Funktionsgleichung der Funktion  $g$ . Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot b + 16 = 2 \cdot b + 20$$

Die Lage der Tangente ergibt sich aus  $f(2) = f'(2) \cdot 2 + d$ .

Daraus folgt:  $2 \cdot b + 20 = (4 + b) \cdot 2 + d$  und daraus  $d = 12$ , daher ist die Lage des Punktes  $R$  unabhängig von  $b$ .

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionswertes  $f(2)$  in Abhängigkeit von  $b$ .
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

# Aufgabe 2

## Mehrkampf

### a) Lösungserwartung:

$$P = 12,91 \cdot (70,24 - 4)^{1,1} \approx 1\,300,64$$

Eine mögliche Interpretation von  $b$ :

$b$  beschreibt die (Mindest-)Leistung (Wurfweite), die übertroffen werden muss, um Punkte zu erhalten.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [1300; 1301]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

### b) Lösungserwartung:

$$P(M) = 1,84523 \cdot (M - 75)^{1,348}$$

$$P'(M) = 2,48737004 \cdot (M - 75)^{0,348}$$

$$P'(209) \approx 13,68$$

Der Wert der Steigung dieser Tangente gibt näherungsweise an, um wie viel sich die Punktezahl bei dieser Leistung pro Zentimeter Sprunghöhenänderung verändert.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [13; 14]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$$P_{1, \text{linear}}(M) = -235,21 \cdot M + 3473,97$$

$$P_{1, \text{linear}}(M) = 0 \Rightarrow M \approx 14,77$$

Um Punkte zu erhalten, dürfte die Laufzeit maximal 14,77 s betragen.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall für  $k$ :  $[-236; -235]$   
Toleranzintervall für  $d$ :  $[3473; 3474]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angegeben werden muss.  
Toleranzintervall:  $[14,7 \text{ s}; 15 \text{ s}]$

d) Lösungserwartung:

mittlere Änderungsrate zwischen  $M = 100$  und  $M = 150$ :  $-15,14$  Punkte pro Sekunde  
mittlere Änderungsrate zwischen  $M = 150$  und  $M = 200$ :  $-9,82$  Punkte pro Sekunde

Da die Funktion linksgekrümmt ist, sind die Änderungsraten bei kürzeren Laufzeiten (betragsmäßig) größer als bei längeren Laufzeiten.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Werte.  
Toleranzintervalle:  $[-16; -14]$  und  $[-10; -9]$
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

# Aufgabe 3

## Lorenz-Kurve

a) Lösungserwartung:

$$100 - f(80) = 38,816$$

Es entfallen ca. 38,8 % des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte.

$$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$$

$$f'(x) = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-1}$$

$$f''(x) = 4,8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3}$$

Die Funktion  $f$  ist linksgekrümmt, weil:  $f''(x) = 4,8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3} > 0$  für alle  $x \in [0; 100]$ .

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervalle: [38 %; 39 %] bzw. [0,38; 0,39]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

$$A_1 = \int_0^{100} f(x) dx = 3466,\bar{6}$$

$$A_2 = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5000$$

$$\frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{1533,\bar{3}}{5000} = 0,306\bar{6} \approx 0,31$$

Der Gini-Koeffizient für das Land mit der Lorenz-Kurve  $f$  beträgt 0,31.

$$\frac{0}{5000} = 0$$

Der Wert des Gini-Koeffizienten für einen Staat, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen, beträgt 0.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [0,30; 0,31]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

# Aufgabe 4

## FSME-Impfung

### a) Lösungserwartung:

$$0,05 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0045$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,45 %.

In einem Risikogebiet ist schlimmstenfalls jede zwanzigste Zecke mit FSME infiziert, d. h., der Anteil infizierter Zecken ist bis zu 1 000-mal höher als in einem Nichtrisikogebiet.

Daher ändert sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung um den Faktor  $\frac{1}{1000}$ .

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervalle: [0,4 %; 0,5 %] bzw. [0,004; 0,005]
- Ein Punkt für die richtige Lösung sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Bei einer entsprechenden (sinngemäß) korrekten Begründung ist der Faktor 1 000 ebenfalls als richtig zu werten.

### b) Lösungserwartung:

Da im Durchschnitt 1 % der Erkrankungen tödlich verlaufen, war nur ein Todesfall (1 % von 113) zu erwarten. Vier Todesfälle sind daher mehr, als zu erwarten war.

Mögliche Berechnung:

$$n = 400, h = 0,16$$

$$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0,16 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,16 \cdot (1-0,16)}{400}} \approx 0,16 \pm 0,036 \Rightarrow [0,124; 0,196]$$

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Antwort sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,12; 0,13]  
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,19; 0,2]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.