Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

21. September 2015

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 1 enthält 24 Aufgaben. Die Aufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen dafür *120 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift. Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft. Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld.

Alle Antworten müssen in das Aufgabenheft geschrieben werden. In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Das Aufgabenheft ist abzugeben.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

– Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
– Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit $\boxed{\text{A}}$ markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.
  Werden unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
  Werden auch unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
– Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte $\boxed{\text{A}}$) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits ***freie Antwortformate***; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

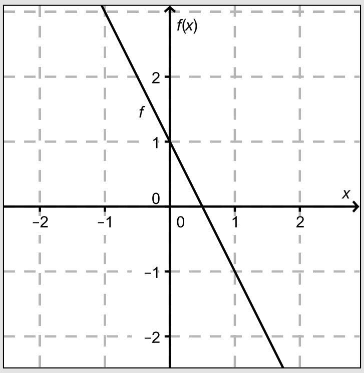
$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:
Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine, zwei, drei, vier** *oder* **fünf Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der **beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten** füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung ______①______ wird als Zusammenzählung oder ______②______ bezeichnet.

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
Multiplikation	☐
Subtraktion	☐
Addition	☒

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

Aufgabe 1

Gleichungen

Gegeben sind fünf Gleichungen in der Unbekannten x.

Aufgabenstellung:

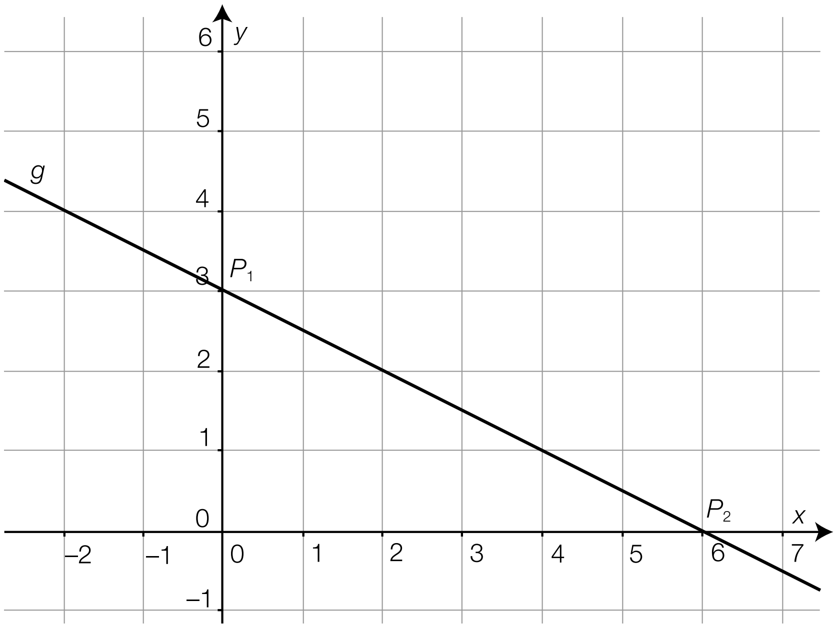
Welche dieser Gleichungen besitzt/besitzen zumindest eine reelle Lösung?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

$2x = 2x + 1$	☐
$x = 2x$	☐
$x^2 + 1 = 0$	☐
$x^2 = -x$	☐
$x^3 = -1$	☐

Aufgabe 2

Gleichungssystem

Eine Teilmenge der Lösungsmenge einer linearen Gleichung wird durch die nachstehende Abbildung dargestellt. Die durch die Gleichung beschriebene Gerade g verläuft durch die Punkte P_1 und P_2, deren Koordinaten jeweils ganzzahlig sind.



Aufgabenstellung:

Die lineare Gleichung und eine zweite lineare Gleichung bilden ein lineares Gleichungssystem.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Hat die zweite lineare Gleichung die Form ___①___, so ___②___.

①	
$2x + y = 1$	☐
$x + 2y = 8$	☐
$y = 5$	☐

②	
hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen	☐
ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{(-2\|4)\}$	☐
hat das Gleichungssystem keine Lösung	☐

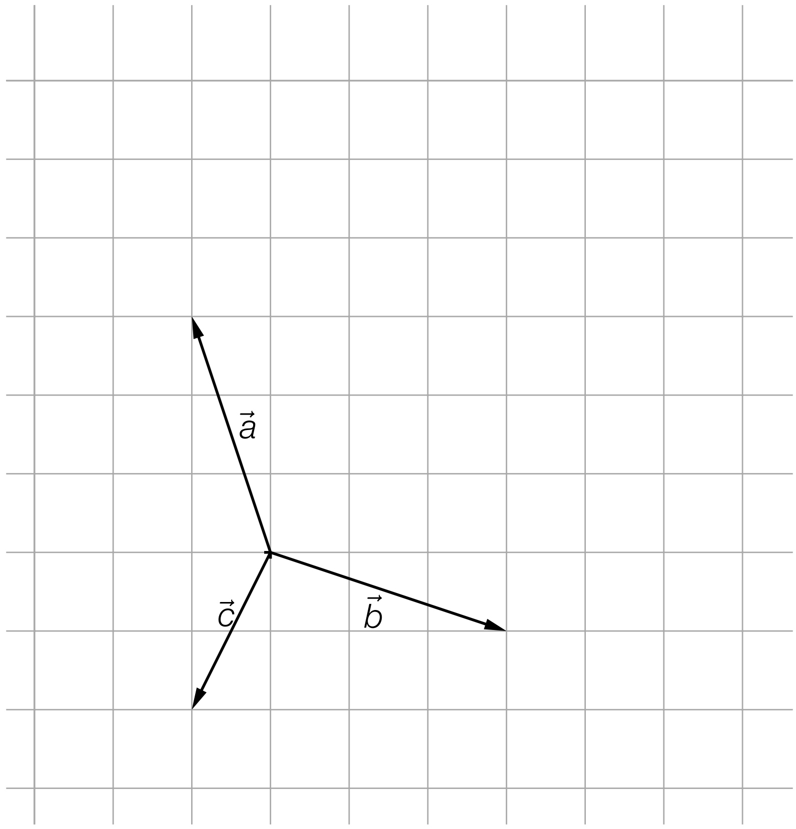
Aufgabe 3

Vektoren

In der unten stehenden Abbildung sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Pfeile dargestellt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$ als Pfeil dar!



Aufgabe 4

Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x-Achse an!

S = ______________________________

Aufgabe 5

Normalvektor

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2|1)$ und $B = (3|-1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ an, der auf den Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal steht!

Aufgabe 6

Sonnenhöhe

Unter der Sonnenhöhe φ versteht man denjenigen spitzen Winkel, den die einfallenden Sonnenstrahlen mit einer horizontalen Ebene einschließen. Die Schattenlänge s eines Gebäudes der Höhe h hängt von der Sonnenhöhe φ ab (s, h in Metern).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der die Schattenlänge s eines Gebäudes der Höhe h mithilfe der Sonnenhöhe φ berechnet werden kann!

$s =$ ____

Aufgabe 7

Bewegung

Ein Körper wird entlang einer Geraden bewegt.
Die Entfernungen des Körpers (in Metern) vom Ausgangspunkt seiner Bewegung nach t Sekunden sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

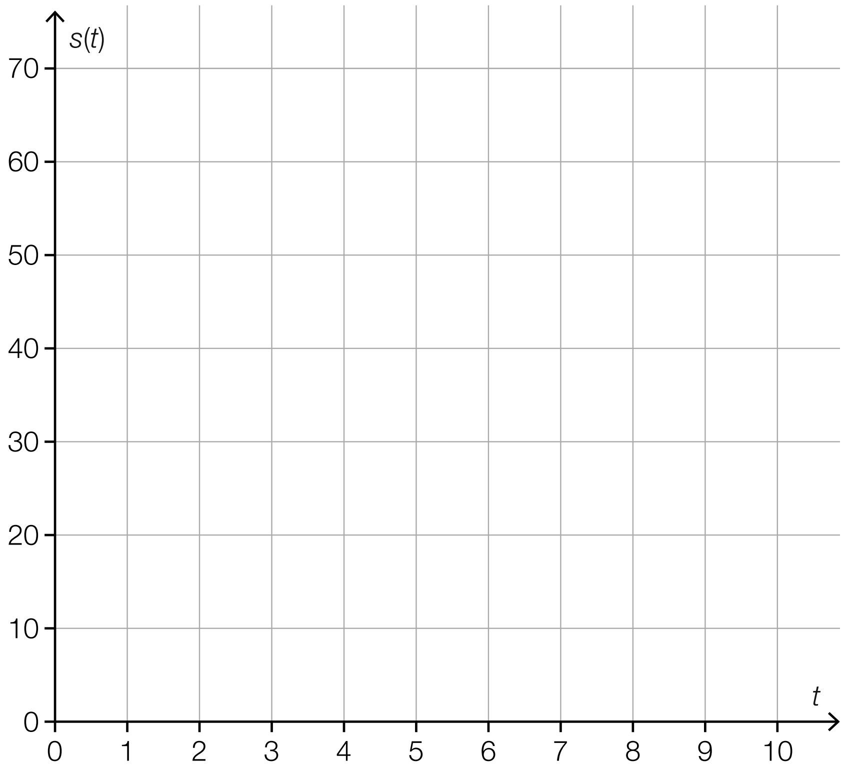
Zeit (in Sekunden)	zurückgelegter Weg (in Metern)
0	0
3	20
6	50
10	70

Der Bewegungsablauf des Körpers weist folgende Eigenschaften auf:

- (positive) Beschleunigung im Zeitintervall [0; 3) aus dem Stillstand bei $t = 0$
- konstante Geschwindigkeit im Zeitintervall [3; 6]
- Bremsen (negative Beschleunigung) im Zeitintervall (6; 10] bis zum Stillstand bei $t = 10$

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer möglichen Zeit-Weg-Funktion s, die den beschriebenen Sachverhalt modelliert, in das nachstehende Koordinatensystem!



Aufgabe 8

Modellierung

Eine lineare Funktion f wird allgemein durch eine Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ mit den Parametern $k \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

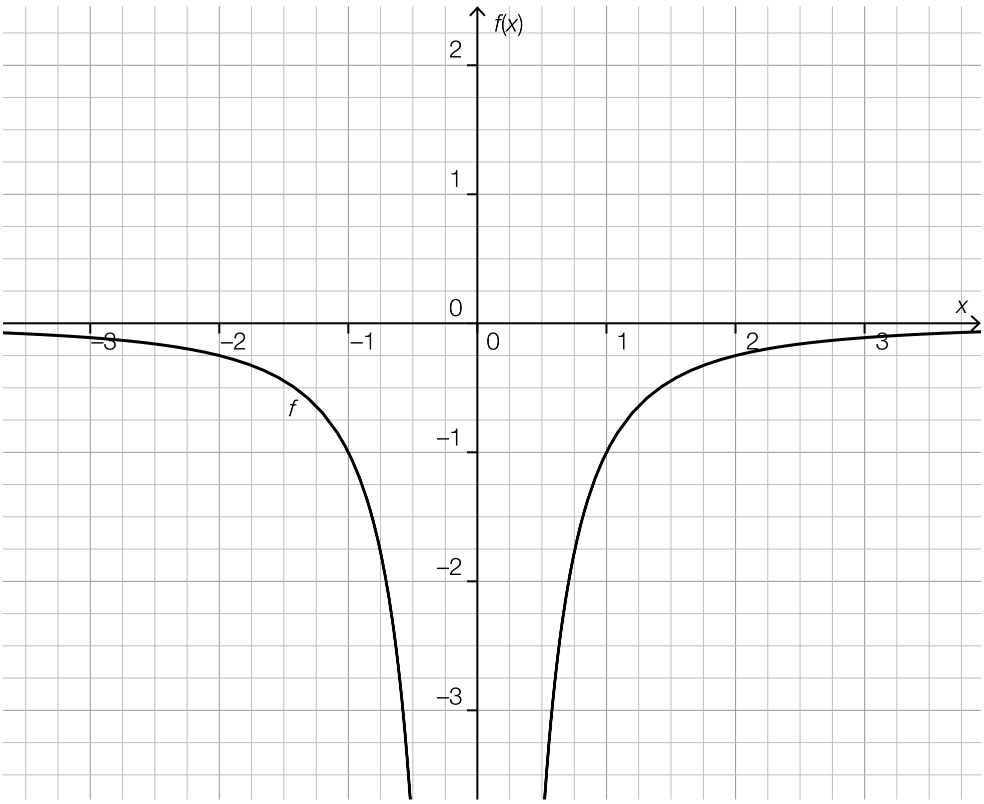
Welche der nachstehend angegebenen Aufgabenstellungen kann/können mithilfe einer linearen Funktion modelliert werden? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aufgabenstellung(en) an!

Die Gesamtkosten bei der Herstellung einer Keramikglasur setzen sich aus einmaligen Kosten von € 1.000 für die Maschine und € 8 pro erzeugtem Kilogramm Glasur zusammen. Stellen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung einer Keramikglasur in Abhängigkeit von den erzeugten Kilogramm Glasur dar!	☐
Eine Bakterienkultur besteht zu Beginn einer Messung aus 20000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdreifacht sich alle vier Stunden. Stellen Sie die Anzahl der Bakterien in dieser Kultur in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit (in Stunden) dar!	☐
Die Anziehungskraft zweier Planeten verhält sich indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Planeten. Stellen Sie die Abhängigkeit der Anziehungskraft zweier Planeten von ihrem Abstand dar!	☐
Ein zinsenloses Wohnbaudarlehen von € 240.000 wird 40 Jahre lang mit gleichbleibenden Jahresraten von € 6.000 zurückgezahlt. Stellen Sie die Restschuld in Abhängigkeit von der Anzahl der vergangenen Jahre dar!	☐
Bleibt in einem Stromkreis die Spannung konstant, so ist die Leistung direkt proportional zur Stromstärke. Stellen Sie die Leistung im Stromkreis in Abhängigkeit von der Stromstärke dar!	☐

Aufgabe 9

Potenzfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $z \in \mathbb{Z}$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Gleichungen ist eine Gleichung dieser Funktion f.
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

$f(x) = 2x^{-4}$	☐
$f(x) = -x^{-2}$	☐
$f(x) = -x^{2}$	☐
$f(x) = -x^{-1}$	☐
$f(x) = x^{-2}$	☐
$f(x) = x^{-1}$	☐

Aufgabe 10

Eigenschaften einer Polynomfunktion

Eine reelle Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) heißt Polynomfunktion dritten Grades.

Aufgabenstellung:

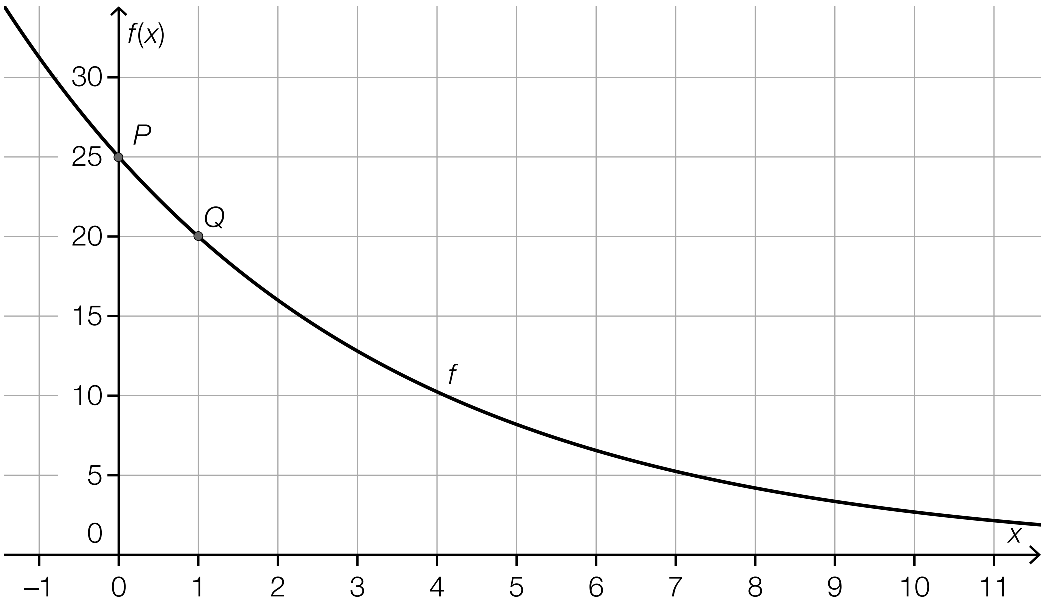
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat immer zwei Nullstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mehr Nullstellen als lokale Extremstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mindestens eine lokale Maximumstelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☐

Aufgabe 11

Exponentialfunktion

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch die Punkte $P = (0|25)$ und $Q = (1|20)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion f an!

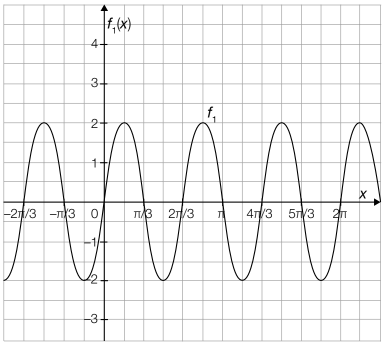
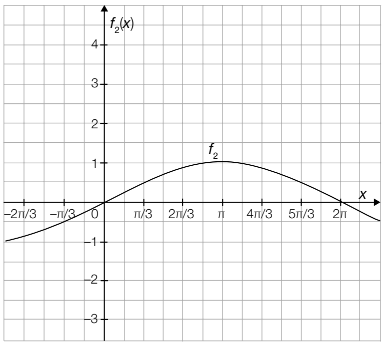
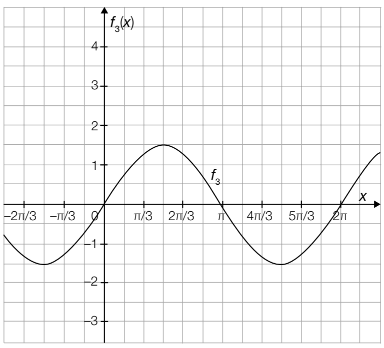
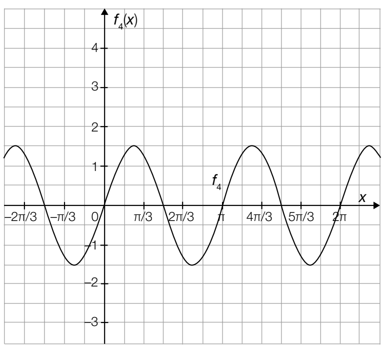
Aufgabe 12

Sinusfunktion

Gegeben sind die Graphen von vier Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jedem Graphen den dazugehörigen Funktionsterm (aus A bis F) zu!

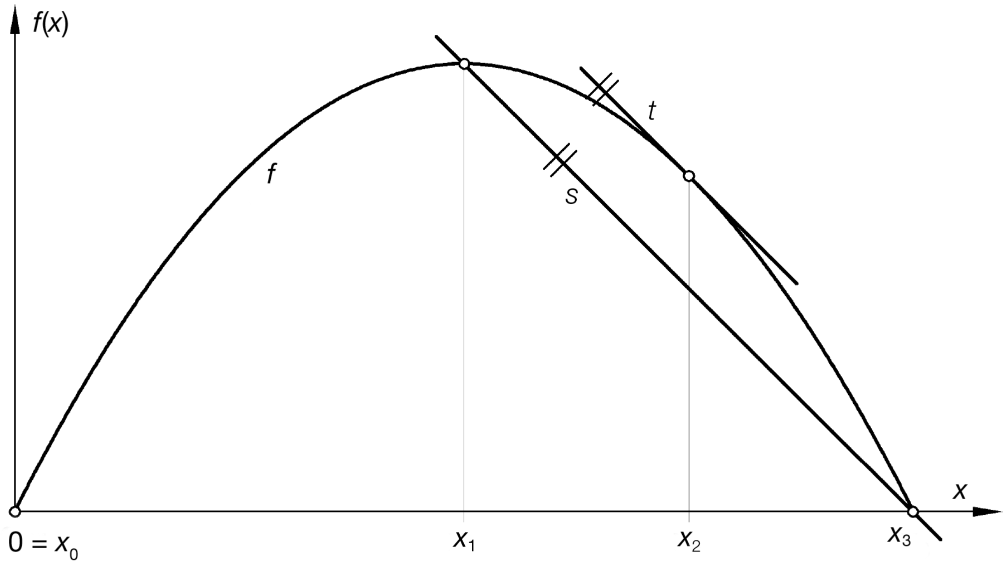
	
	
	
	

A	$\sin(x)$
B	$1{,}5 \cdot \sin(x)$
C	$\sin(0{,}5x)$
D	$1{,}5 \cdot \sin(2x)$
E	$2 \cdot \sin(0{,}5x)$
F	$2 \cdot \sin(3x)$

Aufgabe 13

Differenzen- und Differenzialquotient

Gegeben ist eine Polynomfunktion f zweiten Grades. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph dieser Funktion im Intervall $[0; x_3]$ sowie eine Sekante s und eine Tangente t dargestellt.
Die Stellen x_0 und x_3 sind Nullstellen, x_1 ist eine lokale Extremstelle von f.
Weiters ist die Tangente t im Punkt $(x_2|f(x_2))$ parallel zur eingezeichneten Sekante s.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind für die in der Abbildung dargestellte Funktion f richtig? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(x_0) = f'(x_3)$	☐
$f'(x_1) = 0$	☐
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	☐
$f'(x_0) = 0$	☐
$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} > 0$	☐

Aufgabe 14

Ableitung einer Winkelfunktion

Eine Gleichung einer Funktion f lautet:

$f(x) = 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$

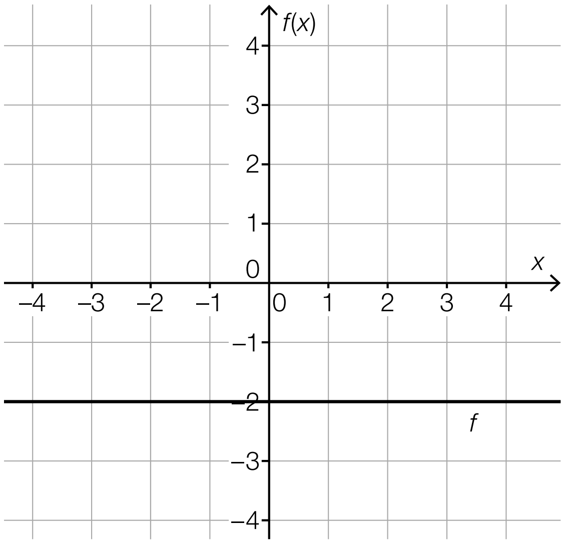
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

Aufgabe 15

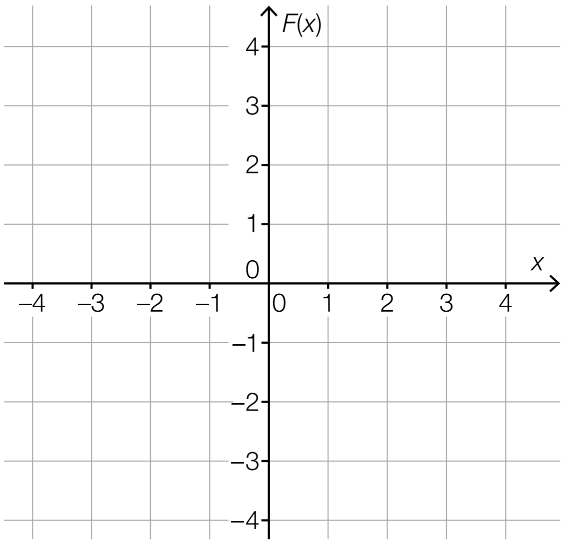
Stammfunktion einer konstanten Funktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer konstanten Funktion *f* dargestellt.



Aufgabenstellung:

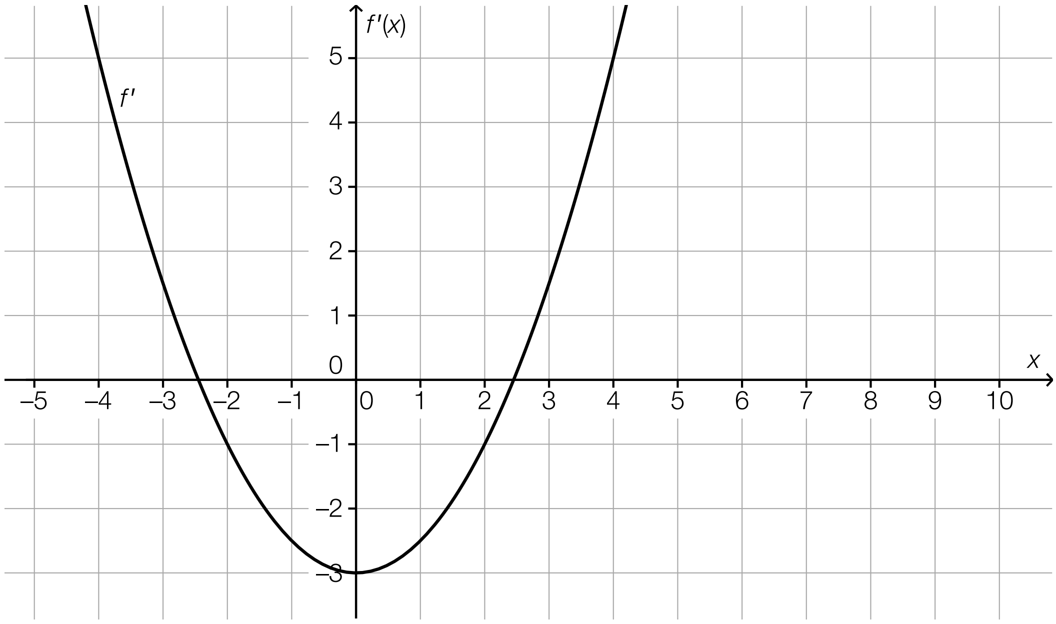
Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$.
Zeichnen Sie den Graphen der Stammfunktion F im nachstehenden Koordinatensystem ein!



Aufgabe 16

Graph einer Ableitungsfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Die Funktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 4] streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; –3] streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; 4] links gekrümmt.	☐

Aufgabe 17

Integrationsregeln

Zwei der nachstehend angeführten Gleichungen sind für alle Polynomfunktionen f und bei beliebiger Wahl der Integrationsgrenzen a und b (mit $a < b$) richtig.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int_a^b (f(x) + x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b x\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b f(2 \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b (1 - f(x))\,\mathrm{d}x = x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b (f(x) + 2)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2$	☐
$\int_a^b (3 \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐

Aufgabe 18

Durchflussrate

In einem Wasserrohr wird durch einen Sensor die Durchflussrate (= Durchflussmenge pro Zeiteinheit) gemessen. Die Funktion D ordnet jedem Zeitpunkt t die Durchflussrate $D(t)$ zu. Dabei wird t in Minuten und $D(t)$ in Litern pro Minute angegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Zahl $\int_{60}^{120} D(t)\,\mathrm{d}t$ im vorliegenden Kontext an!

Aufgabe 19

Entwicklung der Landwirtschaft in Österreich

Der Website der Statistik Austria kann man folgende Tabelle über die Entwicklung der Agrarstruktur in Österreich entnehmen:

Jahr	1995	1999	2010
Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe insgesamt	239 099	217 508	173 317
durchschnittliche Betriebsgröße in Hektar	31,5	34,6	42,4

Datenquelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/land_und_forstwirtschaft/index.html

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe ist im Zeitraum von 1995 bis 2010 in jedem Jahr um die gleiche Zahl gesunken.	☐
Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 im Jahresdurchschnitt um mehr Hektar zugenommen als von 1999 bis 2010.	☐
Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 um durchschnittlich 0,5 ha pro Jahr abgenommen.	☐
Die Gesamtgröße der land- und forstwirtschaftlich genutzten Fläche hat von 1995 bis 2010 abgenommen.	☐
Die Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe ist im Zeitraum von 1995 bis 2010 um mehr als ein Drittel gesunken.	☐

Aufgabe 20

Statistische Kennzahlen

Gegeben ist eine Liste mit n natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Aufgabenstellung:

Welche statistischen Kennzahlen der Liste bleiben gleich, wenn jeder Wert der Liste um 1 erhöht wird? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

arithmetisches Mittel	☐
Standardabweichung	☐
Spannweite	☐
Median	☐
Modus	☐

Aufgabe 21

Rote und blaue Kugeln

In einem Behälter befinden sich 15 rote Kugeln und 18 blaue Kugeln. Die Kugeln sind bis auf ihre Farbe nicht unterscheidbar. Es sollen nun in einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nacheinander gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht zurückgelegt wird und es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt.

Die Buchstaben *r* und *b* haben folgende Bedeutung:

r ... das Ziehen einer roten Kugel
b ... das Ziehen einer blauen Kugel

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein Grundraum *G* für dieses Zufallsexperiment lautet ___①___, und ___②___ ist ein Ereignis.

①	
$G = \{r, b\}$	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, b)\}$	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, r), (b, b)\}$	☐

②	
die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine blaue Kugel gezogen wird,	☐
jede Teilmenge des Grundraumes	☐
b	☐

Aufgabe 22

Augensumme beim Würfeln

Zwei unterscheidbare, faire Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden gleichzeitig geworfen und die Augensumme wird ermittelt. Das Ereignis, dass die Augensumme durch 5 teilbar ist, wird mit E bezeichnet. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

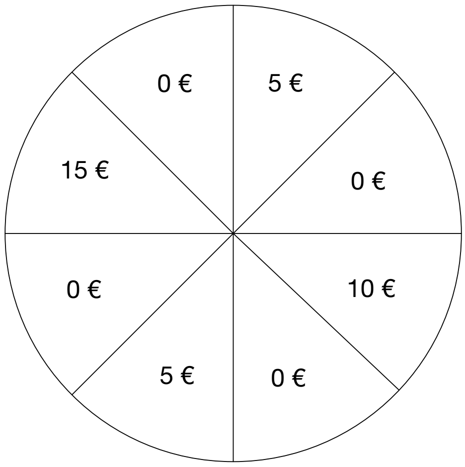
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E!

$P(E) =$ ______________________________________

Aufgabe 23

Gewinn beim Glücksrad

Das unten abgebildete Glücksrad ist in acht gleich große Sektoren unterteilt, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Für einmaliges Drehen des Glücksrades muss ein Einsatz von 5 € gezahlt werden. Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem Glücksrad abgebildet.



Aufgabenstellung:

Das Glücksrad wird einmal gedreht. Berechnen Sie den entsprechenden Erwartungswert des Reingewinns *G* (in Euro) aus der Sicht des Betreibers des Glücksrades! Der Reingewinn ist die Differenz aus Einsatz und Auszahlungsbetrag.

Aufgabe 24

Sammelwahrscheinlichkeit bei Überraschungseiern

Ein italienischer Süßwarenhersteller stellt Überraschungseier her. Das Ei besteht aus Schokolade. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug oder eine Sammelfigur. Der Hersteller wirbt für die Star-Wars-Sammelfiguren mit dem Slogan „Wir sind jetzt mit dabei, in jedem 7. Ei!“.

Bildquelle: http://www.eierlei.de/images/news/main_news/strawars_0294968706.jpg [26.05.2015]

Aufgabenstellung:

Peter kauft in einem Geschäft zehn Überraschungseier aus dieser Serie. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens eine Star-Wars-Sammelfigur erhält!

Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

21. September 2015

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

– Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
– Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit $\boxed{\text{A}}$ markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.
  Werden unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
  Werden auch unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
– Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte $\boxed{\text{A}}$) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits *freie Antwortformate*; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

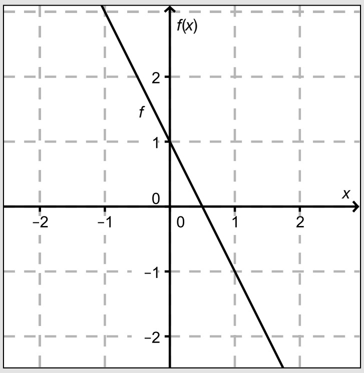
$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:
Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine, zwei, drei, vier *oder* fünf Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung ______①______ wird als Zusammenzählung oder ______②______ bezeichnet.

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
Multiplikation	☐
Subtraktion	☐
Addition	☒

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

Aufgabe 1

Die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion

Betrachtet werden Polynomfunktionen f mit $f(x) = x^2 + b \cdot x + 16$ ($b \in \mathbb{R}$).

Aufgabenstellung:

a) Der Graph einer solchen Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (-1|7)$.

$\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie den Parameter b dieser Funktion f!

Geben Sie die Steigung dieser Funktion f an der Stelle $x = -1$ an!

b) Geben Sie an, welcher allgemeine Zusammenhang zwischen der Extremstelle x_E einer solchen Funktion f und dem Parameter b besteht!

Berechnen Sie alle Werte des Parameters b, für die $f(x_E) = -9$ gilt!

c) Für bestimmte Werte von b liegt der Tiefpunkt des Graphen von f auf einer der Koordinatenachsen. Bestimmen Sie diese Tiefpunkte!

Der Graph der Polynomfunktion g zweiten Grades geht durch diese Punkte. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für g!

d) Auf dem Graphen einer solchen Funktion f liegt der Punkt $Q = (2|f(2))$.

Drücken Sie den Funktionswert $f(2)$ in Abhängigkeit vom Parameter b aus!

Die Tangente im Punkt Q an den Graphen der Funktion f schneidet die senkrechte Achse in einem Punkt R. Zeigen Sie mittels einer Rechnung, dass die Lage dieses Punktes R von der Wahl von b unabhängig ist!

Aufgabe 2

Mehrkampf

Für die beiden Leichtathletikwettbewerbe *Zehnkampf der Männer* und *Siebenkampf der Frauen* gibt es eine international gültige Punktewertung für Großveranstaltungen (Weltmeisterschaften, Olympische Spiele). Die Einzelbewerbe werden nach den unten angeführten Formeln bepunktet. Die Summe der Punkte der Einzelbewerbe ergibt die Gesamtpunkteanzahl, die ein Sportler bzw. eine Sportlerin beim Zehn- bzw. Siebenkampf erreicht.

Für die Errechnung der Punkte P bei Laufwettbewerben gilt:
$P = a \cdot (b - M)^c$ für $M < b$, sonst $P = 0$.

Für die Errechnung der Punkte P bei Sprung- und Wurfwettbewerben gilt:
$P = a \cdot (M - b)^c$ für $M > b$, sonst $P = 0$.

In beiden Formeln beschreibt M die erzielte Leistung. Dabei werden Läufe in Sekunden, Sprünge in Zentimetern und Würfe in Metern gemessen. Die Parameter a, b und c sind vorgegebene Konstanten für die jeweiligen Sportarten. Die errechneten Punkte P werden im Allgemeinen auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aus den beiden folgenden Tabellen kann man die Werte der Parameter a, b und c entnehmen:

Tabelle 1: Zehnkampf der Männer

Männer			
Disziplin \ Parameter	a	b	c
100 m	25,4347	18	1,81
400 m	1,53775	82	1,81
1 500 m	0,03768	480	1,85
110 m Hürden	5,74352	28,5	1,92
Weitsprung	0,14354	220	1,4
Hochsprung	0,8465	75	1,42
Stabhochsprung	0,2797	100	1,35
Kugelstoß	51,39	1,5	1,05
Diskuswurf	12,91	4	1,1
Speerwurf	10,14	7	1,08

Tabelle 2: Siebenkampf der Frauen

Frauen			
Disziplin \ Parameter	a	b	c
200 m	4,99087	42,5	1,81
800 m	0,11193	254	1,88
100 m Hürden	9,23076	26,7	1,835
Weitsprung	0,188807	210	1,41
Hochsprung	1,84523	75	1,348
Kugelstoß	56,0211	1,5	1,05
Speerwurf	15,9803	3,8	1,04

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Punktewertung_(Leichtathletik) [26.06.2015]

Aufgabenstellung:

a) Am 1. Mai 1976 gelang dem US-Amerikaner Mac Wilkins der erste Diskuswurf über 70 m. Wilkins erreichte eine Wurfweite von 70,24 m, also $M = 70{,}24$.

$\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie sein Punkteergebnis im Diskuswurf!

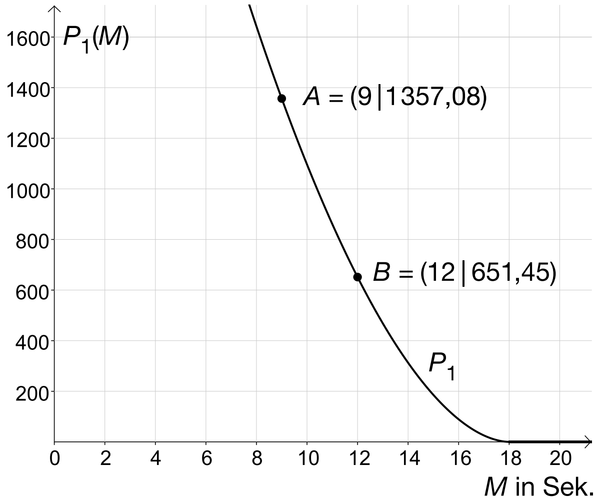
Geben Sie eine Bedeutung des Parameters b der Punkteformel im Hinblick auf die erzielte Punkteanzahl für den Diskuswurf der Herren an!

b) Die Bulgarin Stefka Kostadinowa übersprang am 30. August 1987 in Rom eine Höhe von 2,09 m und hält seitdem den Hochsprung-Weltrekord. Die Funktion P: $M \mapsto P(M)$ beschreibt die Abhängigkeit der Punktezahl $P(M)$ von der Leistung M bei Hochsprungleistungen.

Berechnen Sie die Steigung der Tangente an die Funktion P bei dieser Weltrekordhöhe im Hochsprung!

Interpretieren Sie den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

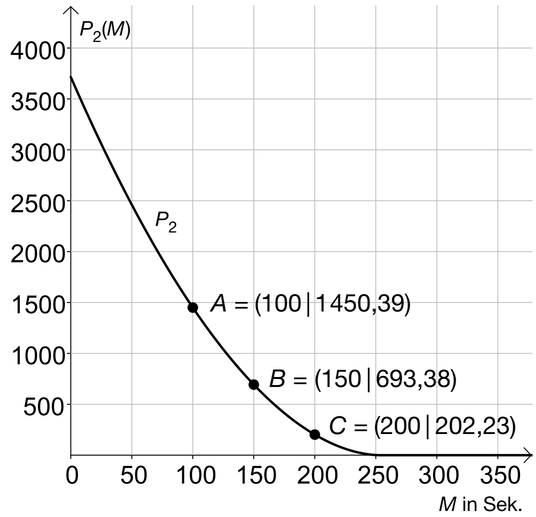
c) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_1(M)$ für den 100-m-Lauf beim Zehnkampf der Männer:



Nähern Sie den Graphen P_1 durch eine lineare Funktion an, deren Graph durch die Punkte A und B geht! Geben Sie eine Gleichung dieser Näherungsfunktion an!

Geben Sie an, wie viele Sekunden die Laufzeit bei dieser Näherung betragen dürfte, um Punkte zu erhalten!

d) Die folgende Grafik zeigt den funktionalen Zusammenhang $P_2(M)$ für den 800-m-Lauf beim Siebenkampf der Frauen:



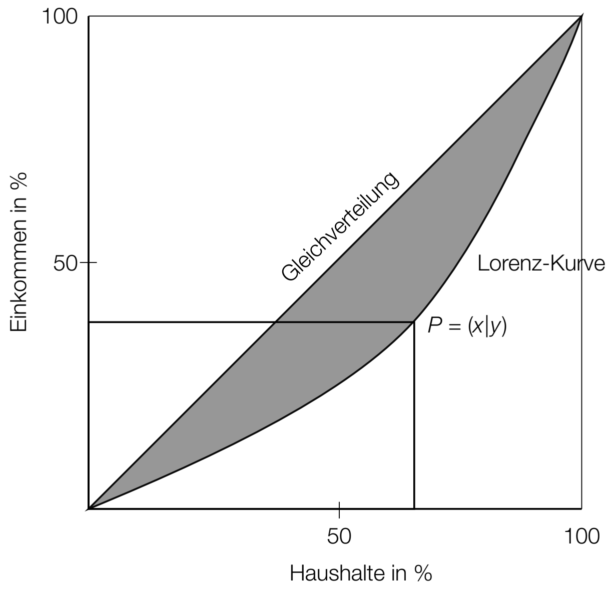
Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von P_2 sowohl zwischen den Stellen $M = 100$ und $M = 150$ als auch zwischen den Stellen $M = 150$ und $M = 200$ in Punkten pro Sekunde!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum sich eine Änderung der Leistung bei besserer Leistung stärker auf die Punktezahl auswirkt als bei schwächerer Leistung!

Aufgabe 3

Lorenz-Kurve

Der US-amerikanische Statistiker Max Otto Lorenz entwickelte im Jahr 1905 zur Veranschaulichung von Einkommensverteilungen die Lorenz-Kurve. Für die Darstellung der Lorenz-Kurve ordnet man die Haushalte eines Staates nach der Höhe ihres Einkommens.
Die Lorenz-Kurve gibt für jeden Prozentsatz der Haushalte an, wie viel Prozent des Volkseinkommens auf ihn entfallen. So steht jeder Punkt $P = (x|y)$ auf der Kurve für folgende Aussage: „Die unteren x % aller Haushalte beziehen y % des Gesamteinkommens.“ Die nachstehende Abbildung zeigt die Lorenz-Kurve von Österreich für das Jahr 2009.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [26.05.2015] (bearbeitet)

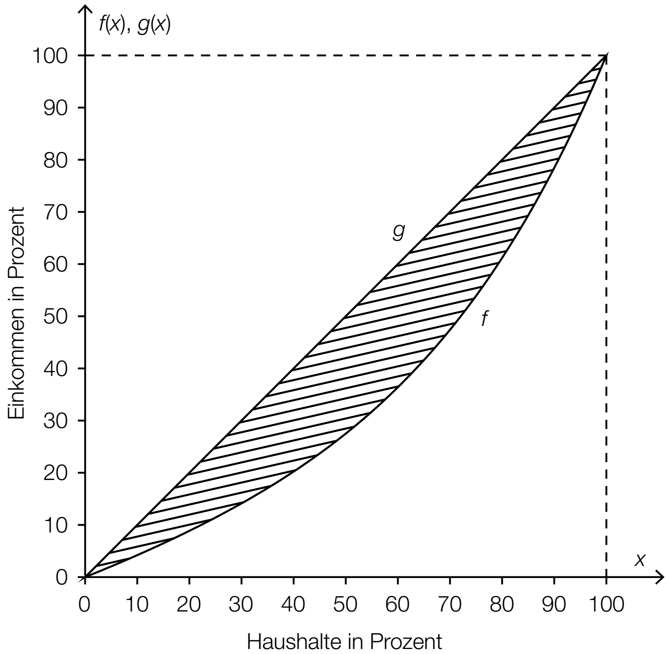
Nehmen Sie an, dass die Lorenz-Kurve eines Landes durch die Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$$

und die Gleichverteilungsgerade durch die Funktion g mit

$$g(x) = x$$

modelliert werden können (x in %; $f(x)$ in %; $g(x)$ in %). Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g. Der charakteristische „Bauch“ der Lorenz-Kurve unterhalb der Diagonalen ist ein Maß für die Ungleichverteilung der Einkommen. Er ist in der Abbildung schraffiert dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte des Landes entfallen!

Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f im Intervall [0; 100] linksgekrümmt ist!

b) Der Gini-Koeffizient ist der Anteil der schraffierten Fläche an der Fläche zwischen der Gleichverteilungsgeraden und der x-Achse im Intervall [0; 100].
Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten des Landes mit der Lorenz-Kurve f!

Geben Sie den Gini-Koeffizienten für einen Staat an, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen!

Aufgabe 4

FSME-Impfung

Die Frühsommer-Meningoenzephalitis (FSME) ist eine durch das FSME-Virus ausgelöste Erkrankung, die mit grippeähnlichen Symptomen und bei einem Teil der Patientinnen und Patienten mit einer Entzündung von Gehirn und Hirnhäuten verläuft.
Die FSME wird durch den Biss einer infizierten Zecke übertragen, wobei die Übertragungswahrscheinlichkeit bei einem Biss 30 % beträgt. Nur bei 10 % bis 30 % der mit dem FSME-Virus infizierten Personen treten Krankheitserscheinungen auf. Im Durchschnitt verläuft 1 % der Erkrankungen tödlich.
In Risikogebieten liegt der Anteil der FSME-infizierten Zecken bei etwa 0,5 % bis 5 %, während man sonst davon ausgeht, dass nur jede 20 000. Zecke das FSME-Virus in sich trägt.

Aufgabenstellung:

a) Eine nicht geimpfte Person wird in einem Risikogebiet von einer Zecke gebissen.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person Krankheitserscheinungen zeigt, in Prozent an; gehen Sie dazu bei den angegebenen Wahrscheinlichkeiten immer von dem Fall aus, der für die gebissene Person am ungünstigsten ist!

Geben Sie an, mit welchem Faktor sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung verändert, wenn der Zeckenbiss nicht in einem Risikogebiet erfolgt ist!

b) $\boxed{\text{A}}$ Im Jahr 2011 gab es in Österreich vier FSME-bedingte Todesfälle.
Waren dies weniger oder mehr Todesfälle, als bei 113 Erkrankungen zu erwarten waren? Begründen Sie Ihre Antwort auf Basis der gegebenen Daten!

In einem österreichischen Risikogebiet nahmen 400 Personen an einer Umfrage teil. Es wird angenommen, dass die Personen, die an dieser Umfrage teilnahmen, eine Zufallsstichprobe darstellen. Von den befragten Personen gaben 64 Personen an, schon einmal von einer Zecke gebissen worden zu sein.
Berechnen Sie auf Basis dieses Umfrageergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Personen in diesem Gebiet, die schon einmal von einer Zecke gebissen worden sind!