Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Parallelogramm

Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C eines Parallelogramms $ABCD$.

$A = (-2|0)$

$B = (2|b)$ mit $b \in \mathbb{R}$

$C = (6|4)$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D dieses Parallelogramms in Abhängigkeit von b! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Es gibt genau einen Wert für b, sodass das Viereck $ABCD$ ein entartetes Parallelogramm ergibt (das bedeutet, dass die Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen). Ermitteln Sie diesen Wert für b und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Parallelogramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$D = A + \overrightarrow{BC}$

$D = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - b \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 - b \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten von D korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Möglicher Lösungsweg:

Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und C:

$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

B soll auf g liegen:

$\begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

daher: $s = 0{,}5$ und $b = 2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Parameter b korrekt bestimmt ist und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.

Aufgabe 2

Coulomb-Kraft

Zwischen zwei Ladungsmengen q_1 und q_2 (mit q_1, $q_2 > 0$), die sich im Abstand r befinden, wirkt die Coulomb-Kraft $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, wobei k eine positive Konstante ist.

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, welche Auswirkungen es auf die Coulomb-Kraft F hat, wenn die in der Formel auftretenden Größen folgendermaßen verändert werden!

a) Beide Ladungsmengen und der Abstand werden halbiert.

b) Eine Ladungsmenge und der Abstand werden verdoppelt, die zweite Ladungsmenge bleibt unverändert.

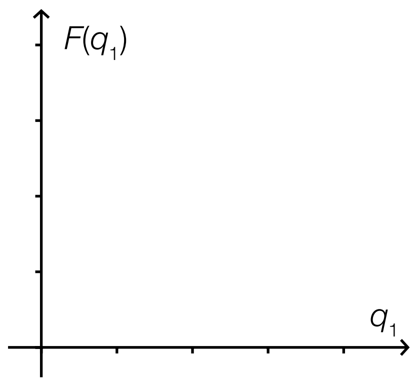
Leitfrage:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen die Graphen folgender funktionaler Abhängigkeiten und erläutern Sie jeweils den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung!

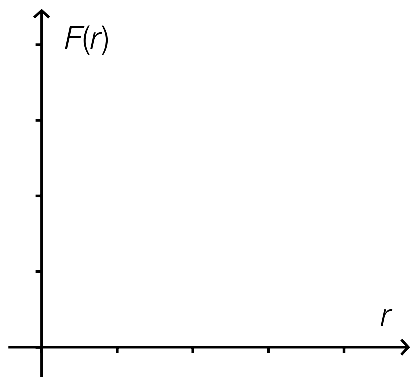
a) $F(q_1)$ bei konstantem q_2 und konstantem Abstand r

b) $F(r)$ bei konstanten Ladungsmengen

a)



b)



Lösung zur Aufgabe 2

Coulomb-Kraft

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

a) F bleibt unverändert, da $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

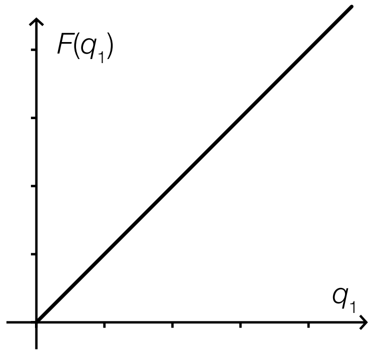
b) F wird halbiert, da $\dfrac{1 \cdot 2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$.

Lösungsschlüssel:

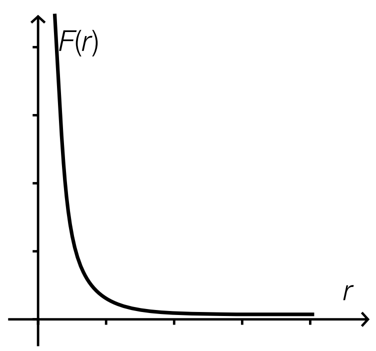
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die jeweiligen Auswirkungen auf F für beide Veränderungen (a und b) korrekt angeführt und begründet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

a) F ist direkt proportional zu q_1 (lineare Funktion durch den Koordinatenursprung).



b) F ist indirekt proportional zu r^2.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide funktionalen Abhängigkeiten die Graphen richtig skizziert werden und der jeweilige Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung korrekt erläutert wird.

Aufgabe 3

Senkrechter Wurf

Ein Körper wird aus einer Anfangshöhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Die durch die Erdanziehungskraft verursachte Beschleunigung wird mit g bezeichnet.
Die Wurfhöhe des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt t kann in diesem Fall durch eine Polynomfunktion h mit $h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ näherungsweise beschrieben werden. Dabei wird t in Sekunden und $h(t)$ in Metern angegeben.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die nachstehenden Ausdrücke im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

a) $\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (t_2 > t_1)$

b) $h'(t_2)$

c) $h''(t_2)$

Leitfrage:

Geben Sie an, unter welcher Voraussetzung $h'(t_2) \approx \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$ für $t_2 > t_1$ gilt!

Die Gleichung $h'(t) = 0$ hat die Lösung t^*. Geben Sie diese Lösung in Abhängigkeit von den Parametern der Funktion h an!

Deuten Sie die Lösung t^* und den Ausdruck $h(t^*)$ im gegebenen Zusammenhang!

Lösung zur Aufgabe 3

Senkrechter Wurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

a) die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[t_1; t_2]$

b) die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_2

c) die momentane Beschleunigung des Körpers zum Zeitpunkt t_2 (beträgt in diesem Fall $-g$)

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Ausdrücke (sinngemäß) richtig interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Momentangeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) zum Zeitpunkt t_2 stimmt mit der mittleren Geschwindigkeit (mittlere Änderungsrate) im Intervall $[t_1; t_2]$ annähernd überein, wenn $t_1 \approx t_2$ gilt.

$$h'(t) = v_0 - g \cdot t \;\Rightarrow\; h'(t^*) = 0 \;\Rightarrow\; v_0 - g \cdot t^* = 0 \;\Rightarrow\; t^* = \frac{v_0}{g}$$

Zum Zeitpunkt t^* erreicht der Körper seine maximale Höhe (die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist null).
$h(t^*)$ ist die maximale Höhe, die der Körper erreicht.

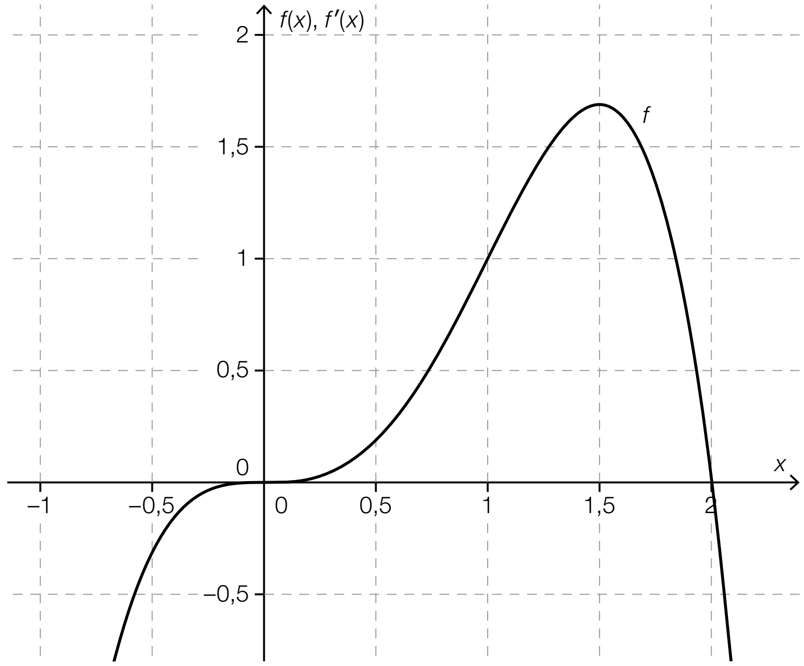
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Voraussetzung für die ungefähre Gleichheit der momentanen und der mittleren Änderungsrate genannt sowie t^* richtig berechnet wird und die Lösung t^* sowie der Ausdruck $h(t^*)$ (sinngemäß) richtig gedeutet werden.

Aufgabe 4

Polynomfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f! Achten Sie dabei besonders darauf, die Nullstellen von f' korrekt einzuzeichnen und das Monotonieverhalten von f' korrekt darzustellen!

Leitfrage:

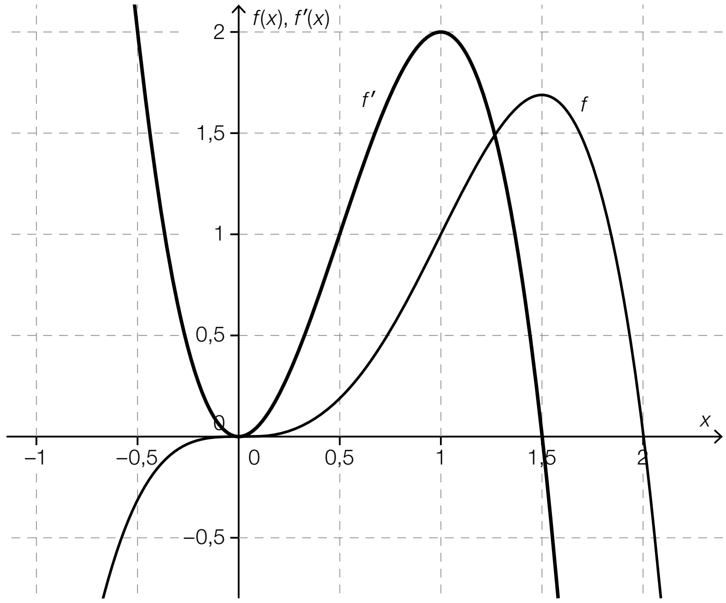
Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens vom Grad 4 sein muss!

Eine Funktionsgleichung der Polynomfunktion f vom Grad 4 lautet allgemein:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.
Begründen Sie, warum für die in der Abbildung dargestellte Polynomfunktion $c = d = e = 0$ gilt!

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Nullstellen von f' an den Stellen 0 und 1,5 eingezeichnet werden. Weiters muss die Funktion f' für $x < 0$ fallend, für $0 < x < 1$ steigend und für $x > 1$ fallend sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Polynomfunktion f hat mindestens zwei Wendestellen, daher muss der Grad von f mindestens 4 sein.

$e = 0$, weil der Graph von f durch den Punkt $(0|0)$ verläuft.

$d = 0$ und $c = 0$, weil f an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente hat, daher sind $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, daher $f'(0) = d = 0$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, daher $f''(0) = 2c = 0$, daher $c = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine (sinngemäß) korrekte Begründung für den Grad der Funktion f und für $c = d = e = 0$ angegeben wird.

Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Auf vier Seitenflächen eines „fairen" sechsseitigen Würfels ist die Zahl 1 abgebildet, auf zwei Seitenflächen die Zahl 2. Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.

Bei einem Zufallsversuch wird der Würfel zweimal geworfen. Als Ergebnis jedes einzelnen Wurfes gilt diejenige Zahl, die auf der nach oben zeigenden Seitenfläche abgebildet ist.
Die Zufallsvariable X beschreibt das Produkt der bei den beiden Würfen eintretenden Ergebnisse, also das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Werte die Zufallsvariable X annehmen kann, und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Der beschriebene, aus jeweils zwei Würfen bestehende Zufallsversuch wird fünfmal ausgeführt. Die Zufallsvariable Y beschreibt, wie oft dabei das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen den Wert 1 ergibt.
Erläutern Sie, warum Y als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden kann, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 2)$!

Lösung zur Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

X kann die Werte 1, 2 und 4 annehmen.

Da für die Wahrscheinlichkeiten, dass die Zahl 1oder 2 nach dem Wurf nach oben zeigt, die Werte $P(1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ gelten, ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
2	$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
4	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle Werte, die die Zufallsvariable annehmen kann, sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung korrekt angegeben werden und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es handelt sich um eine Binomialverteilung, weil

- pro Versuch zwischen zwei möglichen Ergebnissen (das Produkt der gewürfelten Zahlen ist 1 oder nicht 1) unterschieden wird,
- die Versuche voneinander unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeit für ein Produkt vom Wert 1 über alle Versuche hinweg als konstant angenommen werden kann.

Mit $n = 5$, $p = \frac{4}{9}$ und $k = 2$ ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P(Y = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 \approx 0{,}339$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedingungen für das Vorliegen einer Binomialverteilung (sinngemäß) korrekt angegeben werden und die gesuchte Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben wird. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,33; 0,34]