Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

16. Jänner 2015

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Zahlen den Zahlenmengen zuordnen

Lösungserwartung:

Die Zahl $\sqrt{-4}$ liegt in $\mathbb{C}$.	☒
Die Zahl $0,\dot{9}$ liegt in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$.	☒
Die Zahl π liegt in $\mathbb{R}$.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 2

Praxisgemeinschaft

Lösungserwartung:

$6 \cdot 40 = (6 - x) \cdot 60$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung.
Alle Gleichungen, die den gegebenen Text der Fragestellung entsprechend korrekt wiedergeben, sind als richtig zu werten!

Aufgabe 3

Quadratische Gleichung mit genau zwei Lösungen

Lösungserwartung:

$q < 25$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 4

Lineares Gleichungssystem

Lösungserwartung:

$x = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$

$y = \frac{24}{5} \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow L = \{\ \}$

Über der gegebenen Grundmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge für das angegebene Gleichungssystem leer.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Lösungsmenge. Die Lösungsmenge kann sowohl verbal formuliert als auch symbolisch angegeben sein. Die Werte für die beiden Variablen müssen nicht angegeben sein.

Aufgabe 5

Normalvektoren

Lösungserwartung:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 6

Geradengleichung

Lösungserwartung:

h: $2x - 5y = 0$

oder:

h: $y = \frac{2}{5} \cdot x$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Alle äquivalenten Gleichungen sind als richtig zu werten.
Auch die Angabe einer korrekten Parameterdarstellung der Geraden h ist als richtig zu werten.

Aufgabe 7

Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen

Lösungserwartung:

$S = (1|4)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 8

Wasserkosten

Lösungserwartung:

a gibt die Fixkosten an.
b gibt die (variablen) Kosten pro m^3 Wasser an.

Lösungsschlüssel:

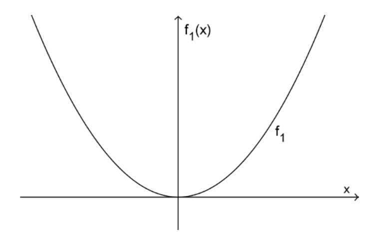
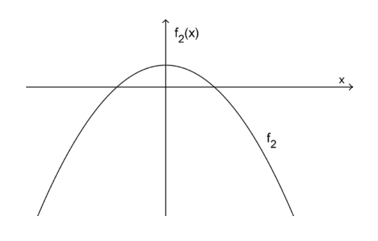
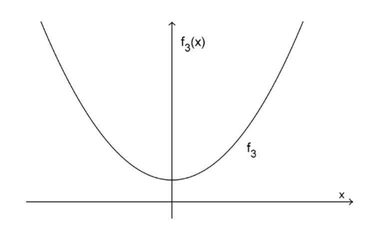
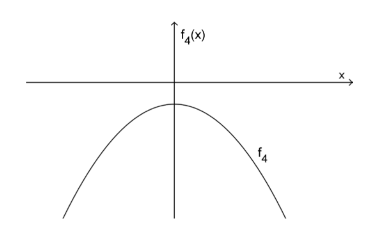
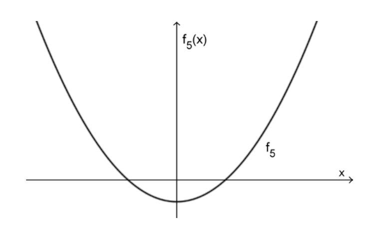
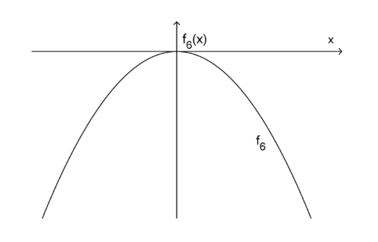
Ein Punkt für die richtige Lösung.
Beide Parameter müssen richtig gedeutet sein, damit die Lösung als richtig gewertet wird.

Aufgabe 9

Parabeln zuordnen

Lösungserwartung:

$a < 0$ und $b < 0$	D
$a < 0$ und $b > 0$	B
$a > 0$ und $b < 0$	E
$a > 0$ und $b > 0$	C

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Aussagen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Aufgabe 10

Symmetrische Polynomfunktion

Lösungserwartung:

Wegen der Symmetrie muss ein weiterer lokaler Tiefpunkt vorliegen und damit auch ein lokaler Hochpunkt. Beim Vorliegen von mindestens drei Extrempunkten muss die Polynomfunktion mindestens 4. Grades sein.

Alternativen:
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und daher auch eines Hochpunkts
– Vorliegen von insgesamt drei Extrempunkten
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und nur gerader Potenzen aufgrund der Symmetrie

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine korrekte Argumentation.

Aufgabe 11

Exponentialfunktion

Lösungserwartung:

$b = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

Aufgabe 12

Parameter der Schwingungsfunktionen

Lösungserwartung:

Die Amplitude von *g* ist dreimal so groß wie die Amplitude von *f*.	☒
Die Kreisfrequenz von *f* beträgt 1.	☒
Die Kreisfrequenz von *g* ist doppelt so groß wie die Kreisfrequenz von *f*.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 13

Elektrische Spannung

Lösungserwartung:

Der Term gibt die relative Änderung der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ an.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 14

Freier Fall

Lösungserwartung:

$s'(t) = v(t) = 10 \cdot t$
$v(2) = 20$ m/s

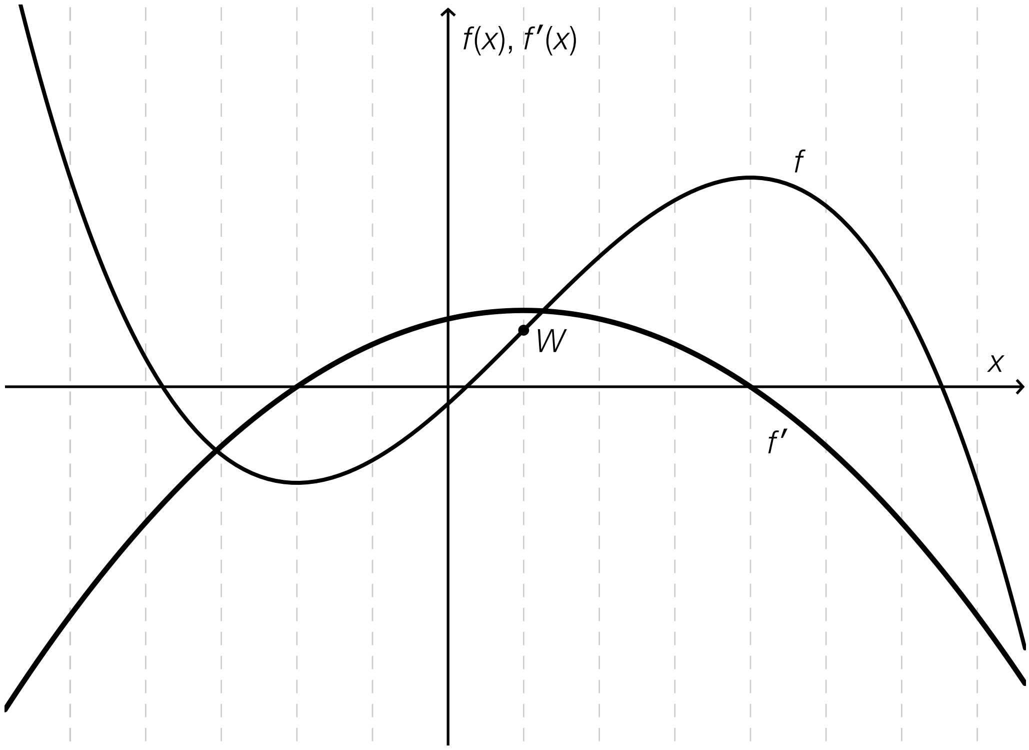
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Angabe der Einheit ist dabei nicht erforderlich.

Aufgabe 15

Graph einer Ableitungsfunktion

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Kriterien für die Richtigkeit des Graphen: Die Nullstellen von f' müssen bei den Extremstellen von f liegen und die x-Koordinate des Scheitels von f' bei der Wendestelle von f.
Der Graph muss zumindest annähernd einer Parabel entsprechen.

Aufgabe 16

Negative erste Ableitung

Lösungserwartung:

$I = (-3; 4)$

oder:

$I = [-3; 4)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Lösung ist nur dann als richtig zu werten, wenn das Lösungsintervall bei 4 offen ist.

Aufgabe 17

Funktionsgleichungen

Lösungserwartung:

$F_1(x) = x^3 + 2x$

$F_2(x) = x^3 + 2x + 1$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe von zwei verschiedenen korrekten Funktionsgleichungen, wobei alle Funktionen in der Form $F(x) = x^3 + 2x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ als richtig zu werten sind.

Aufgabe 18

Integral

Lösungserwartung:

$\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 6{,}75$	☒
$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 0$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 19

Temperaturaufzeichnungen von Braunschweig

Lösungserwartung:

Im Zeitraum 2002 – 2006 lag der Median der jeweiligen Tagesmitteltemperaturen jeweils im Intervall [7 °C; 13 °C].	☒
Das Jahr 2003 wies die größte Spannweite der Tagesmitteltemperaturen auf.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 20

Änderung statistischer Kennzahlen

Lösungserwartung:

arithmetisches Mittel	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Aufgabe 21

Grundraum eines Zufallsversuchs

Lösungserwartung:

Ω = {(0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 1)}

Lösungsschlüssel:

Die Lösung ist dann als richtig zu werten, wenn die in der Lösungserwartung angegebenen Zahlentripel korrekt angeführt sind. Die Trennzeichensetzung zwischen den Zahlen 0 und 1 kann beliebig erfolgen. Die Beschriftung der Menge mit „Ω =“ ist nicht notwendig. Die Reihenfolge der Tripel ist nicht vorgegeben.

Aufgabe 22

Baumdiagramm

Lösungserwartung:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{29} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{29} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{29} = \frac{32}{87} \approx 0{,}3678 = 36{,}78\ \%$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Lösung gilt als richtig, wenn die Wahrscheinlichkeit in einer der angegebenen Schreibweisen des Intervalls richtig angegeben ist.

Lösungsintervall in Dezimalschreibweise: [0,36; 0,37]

Lösungsintervall in Prozentschreibweise: [36 %; 37 %]

Lösung als Bruch: $\frac{32}{87}$

Aufgabe 23

Erwartungswert

Lösungserwartung:

$E(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1 = \frac{14}{5} = 2{,}8$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen (als Bruch oder Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

Aufgabe 24

Würfeln

Lösungserwartung:

Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, höchstens acht Sechser zu werfen.	☒
Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, weniger als neun Sechser zu werfen.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

16. Jänner 2015

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Krippenstein / *five fingers*

a) Lösungserwartung:

$\tan(\alpha) = \frac{750}{2160} \Rightarrow \alpha \approx 19{,}15°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}3342$ rad

$S' = (750 \mid 1350)$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Berechnung.
  Lösungsintervall: [19°; 19,2°] bzw. [0,33 rad; 0,335 rad].
– Ein Punkt für die korrekte Berechnung.

b) Lösungserwartung:

$\frac{p(1350) - p(2100)}{p(1350)} \approx 0{,}085 = 8{,}5\ \%$

Die prozentuelle Druckabnahme pro Höhenmeter ist konstant.	☒
Der zur Funktion p gehörige Graph ist streng monoton fallend.	☒
Der zur Funktion p gehörige Graph nähert sich asymptotisch der waagrechten Achse.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Lösungsintervall: [0,084; 0,085] bzw. [8,4 %; 8,5 %]. Lösungen aus dem Intervall [–0,085; –0,084] bzw. [–8,5 %; –8,4 %] sind ebenso als richtig zu werten.
– Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 2

CO_2-Gehalt der Atmosphäre

a) **Lösungserwartung:**

$K(t) = 310 \cdot \left(\sqrt[30]{\frac{350}{310}}\right)^t$

oder:

$K(t) = 310 \cdot 1{,}004^t$

Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 0,4 % pro Jahr.	☒
Für das Jahr 2010 werden nach diesem Wachstumsgesetz ca. 395 ppm prognostiziert.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$. Toleranzintervall für a: [1,004; 1,0041].
– Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

b) **Lösungserwartung:**

1800: 280 ppm
1900: 300 ppm

$K(t) = k \cdot t + d$
$300 = k \cdot 100 + 280 \;\Rightarrow\; k = 0{,}2$

$K(t) = 0{,}2 \cdot t + 280$

$K(210) = 322 \text{ ppm} \neq 390 \text{ ppm}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$.
– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis.

c) Lösungserwartung:

Der Ausdruck besagt, dass im angegebenen Zeitraum der Sauerstoffgehalt um 0,4 Prozentpunkte pro 1 Million Jahre abnimmt.

In den letzten 1 000 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre meistens niedriger als heute.	☒
In den letzten 600 Mio. Jahren ist der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre nie unter 5 Volumsprozent gefallen.	☒
Vor 200 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre etwa so groß wie heute.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
– Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

d) Lösungserwartung:

$y'(t) = 0{,}000384t^2 + 0{,}02688t + 0{,}2304$
$y''(t) = 0{,}000768t + 0{,}02688$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = -60,\ t_2 = -10$
$y''(-10) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$y''(-60) < 0 \Rightarrow$ Maximum bei –60 Mio. Jahren
Vor 60 Millionen Jahren ist ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten.

Alternative Möglichkeiten des Maximumnachweises:

Es wird nachgewiesen, dass die Ableitungsfunktion $y'(x)$ links vom lokalen Maximum positiv ist und dass sie rechts vom lokalen Maximum negativ ist.

oder:

Es wird nachgewiesen, dass gilt: $y(-60 - a) < y(-60)$ und $y(-60 + a) < y(-60)$ für eine reelle Zahl a.

oder:

Es wird argumentiert, dass bei einer Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Koeffizienten die kleinere Nullstelle der ersten Ableitung eine lokale Maximumstelle ist.

oder:

Weil $y(-60) > y(-10)$ und y ein Polynom 3. Grades ist, muss das lokale Maximum bei $t = -60$ liegen.

oder:

Es gilt: $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \infty$; $y(-60) \approx 6{,}91$; $y(-10) \approx -1{,}09$.
Deshalb ist bei $t = -60$ ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Berechnung der Jahreszahl (es genügt, als Lösung –60 Mio. Jahre anzugeben).
- Ein Punkt für einen (sinngemäß) korrekten Nachweis.

Aufgabe 3

Verkehrsunfälle

a) Lösungserwartung:

Die größte absolute Abnahme fand im Zeitintervall von 1971 bis 1981 statt (–884), die größte relative Abnahme war in den Jahren von 2001 bis 2011 (–0,454 bzw. –45,4 %).

Da für die Berechnung der relativen Abnahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Abnahme und größte relative Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die korrekten Zeitintervalle und die richtigen Abnahmewerte vergeben. Toleranzintervall für relative Abnahme: [–0,46; –0,45] bzw. [–46 %; –45 %]; die Vorzeichen müssen nicht angegeben sein.
– Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) richtige verbale Begründung vergeben. Dabei kann die Begründung auch anhand konkreter Zahlen erfolgen.

b) Lösungserwartung:

$f(t) = -0{,}065t + 3{,}7$

Diese Funktion kann höchstens 57 Jahre, also bis zum Beginn des Jahres 2028, zur Modellbildung herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die Angabe eines korrekten Funktionsterms vergeben. (Der Punkt kann auch vergeben werden, wenn eine andere Variable als t verwendet wird.) Toleranzintervall für die ersten Parameter: [–0,08; –0,05].
– Ein Punkt wird für die Angabe der entsprechenden Zeitspanne und/oder des entsprechenden Jahres vergeben. Toleranzintervalle: [51 Jahre; 70 Jahre], [2022; 2042].

c) Lösungserwartung:

Die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden nahm durchschnittlich um 607,3 pro Jahr ab.

Anzahl der Unfälle mit Personenschaden pro tausend KFZ:

- 1961: 30 (berechneter Wert liegt bei ≈ 29,9)
- 1971: 23 (berechneter Wert liegt bei ≈ 22,5)

Bezogen auf die Anzahl der zugelassenen KFZ hat die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden also tatsächlich abgenommen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die korrekte Angabe der durchschnittlichen jährlichen Abnahme vergeben. Toleranzintervall: [600; 610].
– Ein Punkt wird für das Heranziehen des entsprechenden Datenmaterials und eine korrekte Berechnung vergeben. Die Aussage kann auch anhand der relativen Werte präzisiert werden.

d) Lösungserwartung:

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten	Summe
einspuriges KFZ	8605	85	8690
PKW	24853	290	25143
sonstige	11567	148	11715
Summe	45025	523	45548

$\frac{(85 + 290)}{45548} \approx 0,008$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,8 %.

Die Wahrscheinlichkeit, den Unfall zu überleben, wenn man mit einem PKW verunglückt, beträgt 99 %.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt wird für die richtige Angabe der Wahrscheinlichkeit vergeben. Toleranzintervall: [0,008; 0,0083] bzw. [0,8 %; 0,83 %].
– Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation vergeben.

Aufgabe 4

Atmung

a) Lösungserwartung:

Die Periodenlänge beträgt 4 Sekunden.

Die Periodenlänge gibt die Zeitdauer eines Atemzyklus (= einmal Einatmen und einmal Ausatmen) an.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Ermittlung der Periodenlänge. Es genügt dabei die Angabe des gesuchten Wertes, eine Rechnung oder Zeichnung ist nicht erforderlich.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der Periodenlänge.
  Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen. Ohne konkreten Bezug zum gegebenen Kontext ist die Antwort nicht als korrekt zu werten.

b) Lösungserwartung:

$$\int_0^2 L(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\mathrm{d}t = \left(-0{,}6 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right) \Big|_0^2 \approx 0{,}76$$

Durch das bestimmte Integral wird das gesamte Luftvolumen (in Litern) berechnet, das während des Einatmens (in den ersten beiden Sekunden) in die Lunge strömt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [0,76; 0,80]. Die Einheit muss beim Ergebnis nicht zwingend angeführt werden.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
  Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen.