

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

Mathematik

9. Mai 2014

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft



Aufgabe 1

Positive rationale Zahlen

Lösungserwartung:

$0,9 \cdot 10^{-3}$	<input checked="" type="checkbox"/>
$\sqrt{0,01}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 2

Punktladungen

Lösungserwartung:

$$F = C \cdot \frac{2 \cdot q_1 \cdot 2 \cdot q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = C \cdot \frac{16 \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Der Betrag der Kraft F wird 16-mal so groß.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Weder die Rechnung noch ein Antwortsatz müssen angegeben werden. Die Angabe des Faktors 16 ist ausreichend.

Aufgabe 3

Quadratische Gleichung

Lösungserwartung:

Die quadratische Gleichung $rx^2 + sx + t = 0$ hat genau dann für alle $r \neq 0; r, s, t \in \mathbb{R}$
_____ ^① _____, wenn _____ ^② _____ gilt.

①	
zwei reelle Lösungen	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
$s^2 - 4rt > 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

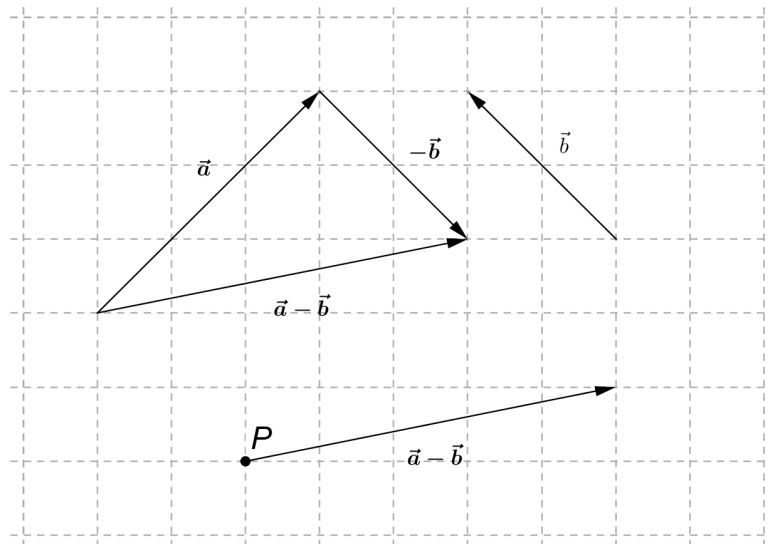
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 4

Vektorkonstruktion

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Darstellung des gesuchten Pfeils ausreicht. Der Anfangspunkt des Ergebnisvektors muss P sein.

Aufgabe 5

Parallele Geraden

Lösungserwartung:

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung bzw. parallele Richtungsvektoren.

$$k_g = -\frac{1}{4}$$

$$\vec{a}_h = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ und aus } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \text{ folgt } k_h = k_g$$

oder

$$g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\vec{a}_g = \vec{a}_h$.

Oder:

Auch eine Begründung mit Normalvektoren ist möglich.

$$g: x + 4y = 32$$

$$h: x + 4y = 16$$

Somit ist $\vec{n}_g \parallel \vec{n}_h$.

oder

$$\vec{n}_g \cdot \vec{a}_h = 0$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt wird vergeben, wenn eine Begründung vorhanden und mathematisch korrekt ist.

Aufgabe 6

Definition der Winkelfunktionen

Lösungserwartung:

$\sin \alpha = \frac{p}{r}$	<input checked="" type="checkbox"/>
$\cos \beta = \frac{p}{r}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Gleichungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 7

Zerfallsprozess

Lösungserwartung:

$t_H = 3$	<input checked="" type="checkbox"/>
$N(t_H) = 400$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 8

Steigung einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

<table border="1"><thead><tr><th>x</th><th>$m(x)$</th></tr></thead><tbody><tr><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>8</td><td>-3</td></tr></tbody></table>	x	$m(x)$	5	3	6	1	8	-3	<input type="checkbox"/>
x	$m(x)$								
5	3								
6	1								
8	-3								
$l(x) = \frac{3 - 4x}{2}$	<input type="checkbox"/>								

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Darstellungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 9

Gleichung einer quadratischen Funktion

Lösungserwartung:

$$a = \frac{1}{4} \text{ oder } a = 0,25$$

$$b = 2$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Parameter richtig angegeben sein müssen.

Aufgabe 10

Wachstum

Lösungserwartung:

$$f(2) = 900$$

$$f(3) = 1\,350$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Werte richtig angegeben sein müssen.

Aufgabe 11

Exponentialfunktion

Lösungserwartung:

$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f(x+1) = a \cdot f(x)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 12

Sinusfunktion

Lösungserwartung:

Um den Graphen von g zu erhalten, muss a ① und b ② .

①	
halbiert werden	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
verdoppelt werden	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 13

Prozente

Lösungserwartung:

Wenn die Inflationsrate in den letzten Monaten von 2 % auf 1,5 % gesunken ist, bedeutet das eine relative Abnahme der Inflationsrate um 25 %.	<input checked="" type="checkbox"/>
Eine Zunahme um 200 % bedeutet eine Steigerung auf das Dreifache.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 14

Ableitungswerte ordnen

Lösungserwartung:

$$f'(1) < f'(0) < f'(3) < f'(4)$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Lösung gilt als richtig, wenn alle Werte in der richtigen Reihenfolge angeordnet werden.

Auch die Ordnung der Werte in der Form $f'(1), f'(0), f'(3), f'(4)$ gilt als richtig.

Aufgabe 15

Nikotin

Lösungserwartung:

0,03 mg

2 %

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die korrekte Angabe der beiden Zahlenwerte.

Aufgabe 16

Eigenschaften einer Funktion

Lösungserwartung:

Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0 f(0))$ hat die Steigung 2.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f .	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

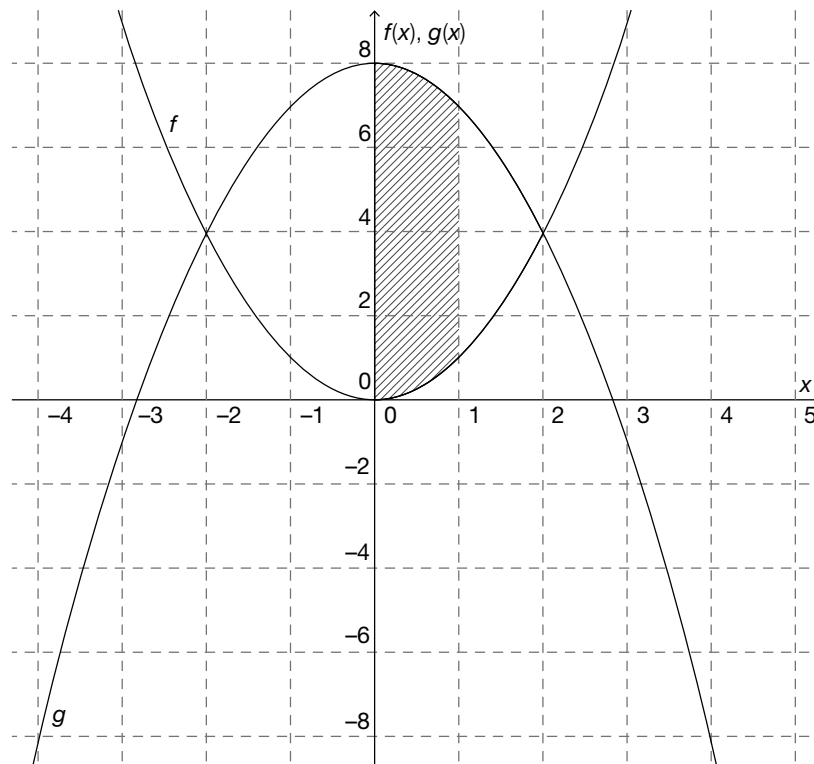
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 17

Schnitt zweier Funktionen

Lösungserwartung:

Zu schraffieren ist das Flächenstück zwischen den Graphen f und g , der Geraden $x = 1$ sowie der senkrechten Koordinatenachse.



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn die gesuchte Fläche klar ersichtlich und korrekt schraffiert ist.

Aufgabe 18

Pflanzenwachstum

Lösungserwartung:

$$\frac{40 \cdot 4}{2} + 10 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 4}{2} = 140$$

Die Pflanze wächst in diesen 60 Tagen 140 cm.

Ein weiterer (sehr aufwendiger) Lösungsweg wäre die Berechnung der Funktionsgleichungen in den einzelnen Wachstumsabschnitten sowie die Berechnung der entsprechenden bestimmten Integrale.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Weder die Rechnung noch ein Antwortsatz müssen angegeben werden. Die Angabe des richtigen Zahlenwertes ist ausreichend.

Aufgabe 19

Schulstatistik

Lösungserwartung:

In Kärnten ist der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern größer als in Tirol.	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern ist in Wien höher als in allen anderen Bundesländern.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 20

Boxplot-Analyse

Lösungserwartung:

Mehr als 60 % der befragten Mädchen haben einen Schulweg von mindestens 4 km.	<input checked="" type="checkbox"/>
Mindestens 50 % der Mädchen und mindestens 75 % der Burschen haben einen Schulweg, der kleiner oder gleich 6 km ist.	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 21

Arithmetisches Mittel

Lösungserwartung:

$$\bar{x}_{\text{neu}} = 7,6$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 22

Hausübungskontrolle

Lösungserwartung:

$$P(\text{„2 Burschen, 1 Mädchen“}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot 3 = \frac{44}{95} \approx 0,46 = 46 \%$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,46; 0,47] bzw. [46 %; 47 %]. Sollte als Lösungsmethode die hypergeometrische Verteilung gewählt werden, ist dies auch als richtig zu werten:

$$P(E) = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{3}}$$

Aufgabe 23

Diskrete Zufallsvariable

Lösungserwartung:

$P(3 \leq X \leq 6)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau eine Antwort angekreuzt ist und das Kreuz richtig gesetzt ist.

Aufgabe 24

Multiple-Choice-Antwort

Lösungserwartung:

X ... Anzahl der richtigen Antworten

$$W(X \geq 4) = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{64} \approx 0,02 = 2 \%$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,015; 0,02] bzw. [1,5 %; 2 %].

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

Mathematik

9. Mai 2014

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Aufgabe 1

Hallenbad

a) Lösungserwartung:

Partei A: Das Hallenbad muss renoviert werden, da die Besucherzahlen über die letzten Jahre annähernd konstant geblieben sind.

Partei B: Das Hallenbad soll nicht renoviert werden, da die Besucherzahlen in den letzten Jahren stark abgenommen haben.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei A.
 - Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei B.
- Zulässig sind auch andere Formulierungen, die den Kern der Aussagen treffen.

b) Lösungserwartung:

- 1) Die senkrechte Achse beginnt bei null, allerdings ist der erste Abschnitt bis zum ersten Skalierungswert verkürzt dargestellt.
- 2) Änderung/„Verfeinerung“ der Skalierung
- 3) Die x-Achsen-Skala beginnt mit 2002, daher fällt „der ansteigende Teil“ in der Graphik weg (vgl. Anstieg der Besucherzahlen lt. Partei A).

Lösungsschlüssel:

Zwei Punkte: je ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekt angeführte Manipulation.

c) Lösungserwartung:

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Besucher/innen pro Tag	168,5	169,3	170,0	171,8	172,0	174,2	176,9	180,6

Investitionen in das Hallenbad lohnen sich, denn in den letzten acht Jahren stieg die Zahl der täglichen Besucher/innen jedes Jahr an.

Lösungsschlüssel:

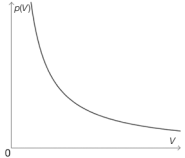
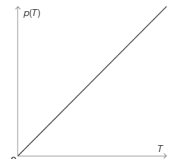
- Ein Ausgleichspunkt für die richtigen Werte in der Tabelle. Die Angabe einer Null nach dem Komma (z. B.: 170,0) kann entfallen.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort.

Aufgabe 2

Zustandsgleichung idealer Gase

a) Lösungserwartung:

Volumen halbieren oder Temperatur verdoppeln.

	<input checked="" type="checkbox"/>
	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Möglichkeiten, die zu einer Verdoppelung des Drucks führen, wobei beide Möglichkeiten angegeben werden müssen.
- Ein Punkt für das ausschließliche Ankreuzen der beiden richtigen Graphen.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Begründungen:

Der Druck nimmt mit steigendem Volumen ab. Die Funktion ist streng monoton fallend.

$$\left. \begin{array}{l} p(V_2) < p(V_1) \\ V_2 > V_1 \end{array} \right\} \text{ Daher ist der Quotient negativ.}$$

$$p'(V) = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V^2} \text{ beschreibt die momentane Druckänderung.}$$

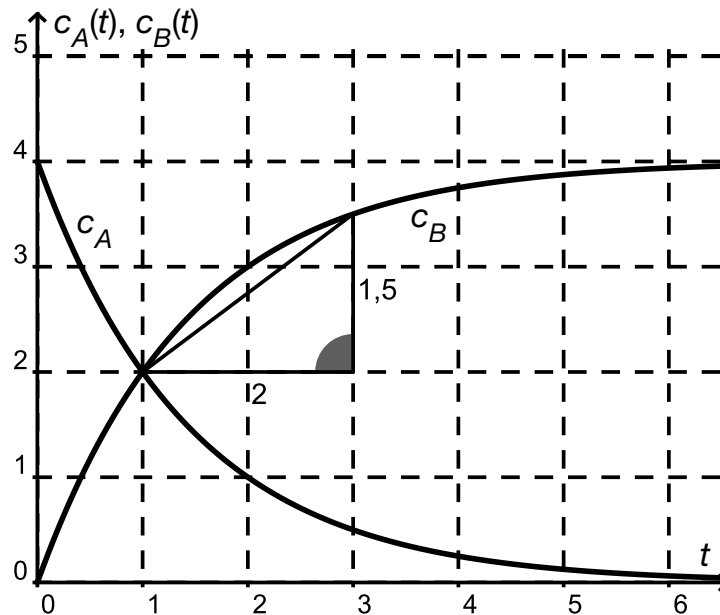
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die Ermittlung der Funktionsgleichung für die Druckänderung. Die Schreibweise $p'(V)$ muss nicht verwendet werden. Wichtig ist, dass der Funktionsterm stimmt und eine funktionale Schreibweise verwendet wird.

Aufgabe 3

Chemische Reaktionsgeschwindigkeit

a) Lösungserwartung:



$$\frac{1,5}{2} = 0,75 \frac{\text{Mol}}{\text{Liter} \cdot \text{Minute}}$$

Mögliche Interpretationen:

Die Konzentration von A nimmt zu jedem Zeitpunkt gleich stark ab, wie die Konzentration von B zu diesem Zeitpunkt zunimmt.

Oder:

Die beiden Reaktionsgeschwindigkeiten sind zu jedem Zeitpunkt betragsmäßig gleich groß.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Ermitteln der durchschnittlichen Reaktionsgeschwindigkeit. Jedes Ergebnis, das im Intervall $[0,7; 0,8]$ liegt, ist als richtig zu werten. Die Einheit muss nicht angegeben werden. Falls ein richtiges Ergebnis mit einer falschen Einheit angegeben ist, so ist die Aufgabe als richtig gelöst zu werten.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Deutung der momentanen Änderungsraten der Konzentrationen der Stoffe A und B.

b) Lösungserwartung:

c_0 ist die Anfangskonzentration des Stoffes zum Zeitpunkt $t = 0$.

Für den Ausgangsstoff A ist der Graph (bzw. die Funktion) streng monoton fallend, d. h., der Parameter k im Exponenten der Exponentialfunktion muss negativ sein.

Möglicher Ansatz:

$$\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{k \cdot \tau}$$

und/oder

$$\frac{1}{2} = e^{k \cdot \tau}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{-\ln(2)}{k}$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Deutung von c_0 und eine (sinngemäß) korrekte Argumentation, warum der Parameter k negativ ist.
- Ein Punkt für den richtigen Ansatz und das richtige Ergebnis für τ .

Auch der Ansatz $\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{-k \cdot \tau}$ mit der Lösung $\tau = \frac{\ln(2)}{k}$ ist als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Grenzkosten

a) Lösungserwartung:

$$\bar{K}(x) = \frac{0,001 \cdot x^3 - 0,09 \cdot x^2 + 2,8 \cdot x + 5}{x} = 0,001 \cdot x^2 - 0,09 \cdot x + 2,8 + 5 \cdot x^{-1}$$

$$\bar{K}(100) = 3,85$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Stückkostenfunktion, wobei der Funktionsterm nicht vereinfacht werden muss.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Funktionswertes (sollte die Stückkostenfunktion zwar im Ansatz richtig, aber in der Vereinfachung fehlerhaft berechnet worden sein, jedoch der Funktionswert dann korrekt berechnet worden sein, ist dieser Punkt zu geben).

b) Lösungserwartung:

Der Differenzenquotient $\frac{K(x+1) - K(x)}{(x+1) - x} = K(x+1) - K(x)$ bzw. die absolute Änderung $K(x+1) - K(x)$ wäre mathematisch korrekt (anstatt des Differenzialquotienten).

Für eine lineare Kostenfunktion ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Änderungsmaß. Eine der beiden Möglichkeiten muss zumindest begrifflich angeführt sein. Die formale Definition des Differenzenquotienten kann gegebenenfalls nachgesehen werden.

Anmerkung: Der betriebswirtschaftlich eigentlich genutzte Differenzialquotient gibt die momentane Änderungsrate an einer bestimmten Stelle an. Die betriebswirtschaftliche Interpretation bezieht sich aber auf eine Änderungsrate (= Kostenzuwachs) bei einer Produktionssteigerung um eine Gütereinheit – also eigentlich auf die Änderungsrate in einem Intervall $[x; x+1]$, weswegen die Verwendung des Differenzenquotienten bzw. der absoluten Änderung mathematisch korrekt ist. (Geometrisch wird die Sekantensteigung durch die Tangentensteigung ersetzt.)

- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionstyps. (Auch graphische Überlegungen – ein Graph einer linearen Funktion – gelten als richtige Antwort.)

Aufgabe 5

Sportwagen

a) Lösungserwartung:

$$a(t) = v'(t) = -1,5 \cdot t^2 + 7,5 \cdot t$$
$$a(2) = -1,5 \cdot 2^2 + 7,5 \cdot 2 = 9 \Rightarrow a(2) = 9 \text{ m/s}^2$$

Auch die Berechnung über den Differenzenquotienten mit korrektem Grenzwertübergang ist zulässig.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt, wenn $a(t)$ als 1. Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion korrekt bestimmt wurde.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Ergebnisses. Sollte $a(t)$ im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

b) Lösungserwartung:

$$s(4) = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (-0,5 \cdot t^3 + 3,75 \cdot t^2) dt$$
$$s(4) = \int_0^4 (-0,5 \cdot t^3 + 3,75 \cdot t^2) dt = (-0,125 \cdot t^4 + 1,25 \cdot t^3) \Big|_0^4 = 48 \Rightarrow s(4) = 48 \text{ m}$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt, wenn der Ansatz $s(4) = \int_0^4 v(t) dt$ mit dem bestimmten Integral inklusive der richtigen Grenzen vorhanden ist.
- Ein Punkt für das richtige Ergebnis. Sollte das bestimmte Integral im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

c) Lösungserwartung:

Es liegt ein linearer funktionaler Zusammenhang vor.

$$v_1(t) = \frac{28}{4} \cdot t + 0 = 7 \cdot t$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt, wenn erkannt wurde, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, und dieser angegeben wurde (entweder textlich oder auch in Form einer Funktionsgleichung). Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn zwar ein linearer Zusammenhang erkannt wurde, aber die Funktionsgleichung falsch aufgestellt wurde.
- Ein Punkt, wenn die Funktionsgleichung mit den korrekten Parametern aufgestellt wurde.